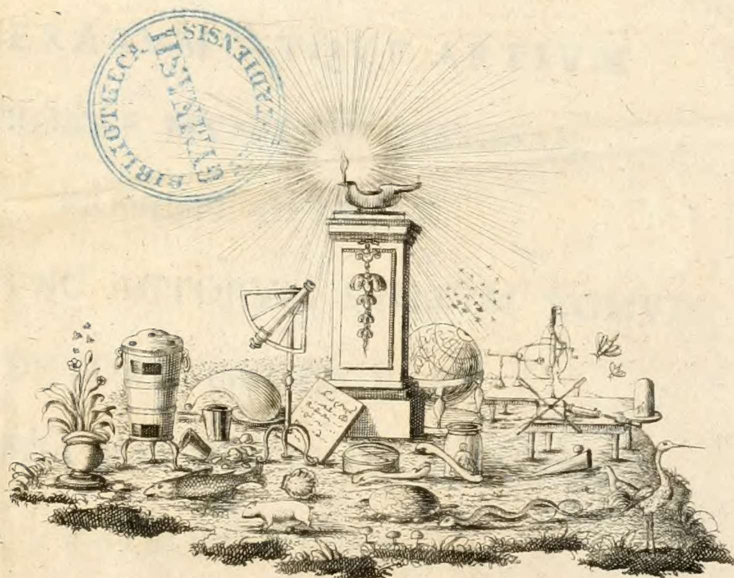
ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVII.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXVIII.

.16.70291 april 28

CATHARINAE II.

AVGVSTISSIMAE AC POTENTISSIMAE

OMNIVM RVSSIARVM IMPERATRICI

ET AVTOCRATORI

MAGNAE PIAE FELICI

PATRIAE MATRI INDVLGENTISSIMAE

LEGISLATRICI SAPIENTISSIMAE

LITTERARVM ATQVE ARTIVM

PATRONAE MVNIFICENTISSIMAE

PRINCIPI OPTIMAE

PRIMVM HVNC ACTORVM SVORVM TOMVM

DEVOTISSIME DEDICAT

ACADEMIA IMPERIALIS SCIENTIARVM

PETROPOLITANA

DIRECTORE

SERGIO DE DOMASCHNEV.

AVERTISSEMENT.

Les *Actes de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, dont le public reçoit aujourd'hui le premier volume, ne sont proprement qu'une continuation des ses Mémoires qu'elle avoit publiés jusqu'ici sous le tître de* Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.

Depuis sa fondation, c'est à dire depuis l'année 1726, jusqu'à son renouvellement en 1747, l'Académie en publia quatorze Tomes. Elle en recommença ensuite une nouvelle collection, à laquelle elle donna le tître de Novi Commentarii: *& depuis 1747, jusqu'à la célébration de son premier Jubilé demi-séculaire en 1776, il en parut encore vingt Tomes, desquels le XIV*[me] *pour 1769 est divisé en deux volumes.*

Comme l'Académie voyoit ces commentaires augmenter en nombre & en volume, & que leur ac-

quisition devenoit par là de plus en plus onéreuse, elle résolut de changer encore le titre avec l'année 1777, pourque cette nouvelle suite de ses collections formât en quelque maniere un ouvrage séparé, & qu'on pût l'acquerir sans être obligé de se charger des commentaires précédens. Elle jugea à propos en même tems de porter des changemens considérables dans la grosseur & la forme même des volumes, pour en diminuer le prix & en favoriser la séparation, & les rendre ensuite intéressans à un plus grand nombre de personnes.

En conséquence de cette résolution, il paroîtra de ces Actes de l'Académie Impériale des Sciences deux volumes par an, dont chacun n'excedera pas 400 pages. L'année sera de cette maniere partagée en deux Sémestres, *qui contiendront les mémoires présentés & lus par Mrs. les Académiciens pendant ce même intervalle de six mois. Ces mémoires seront écrits aussi bien en françois qu'en latin, selon que les Auteurs les jugeront plus ou moins appropriés aux personnes*

qui

qui n'entendent pas la langue ſavante. Enfin on fera précéder chaque volume d'une partie hiſtorique, qui ſera écrite en langue françoiſe; cette langue étant aujourd'hui la plus généralement connue.

Dans cette partie hiſtorique on rendra un compte exact de ce qui s'eſt paſſé de plus remarquable à l'Académie pendant le cours du ſémeſtre, auquel le volume ſe rapportera; on y expoſera tous les changemens & les faits intéreſſans, les Aſſemblées publiques & ſolemnelles, avec les diſcours qui y auront été prononcés, les queſtions propoſées, & la diſtribution des prix, les machines, inventions & ouvrages préſentés à l'Académie, & enfin les précis des mémoires qui pourront intéreſſer le public ou lui être de quelque utilité.

Au reſte pour réparer la lacune d'une année qu'il y aura de cette façon entre le dernier tome des nouveaux Commentaires qui eſt pour 1775 & ce premier volume des Actes, qui ne commencent qu'a-

vec l'année 1777, l'Académie ſe propoſe de publier des Tables des matieres contenues dans ſes Commentaires tant anciens que nouveaux & de donner ſon hiſtoire depuis ſa fondation juſqu'à la célébration de ſon premier Jubilé demi-ſéculaire incluſivement; ce qui tiendra lieu du volume qui manque pour l'année 1776.

TABLE.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES

MDCCLXXVII. Janvier —— Juin
avec quatre planches de figures.

MÉTÉ-

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVII. Pars prior
cum tabulis XIII. aeri incisis.

MATHEMATICA

PHYSICO-

PHYSICO - MATHEMATICA

PHYSICA

ASTRONOMICA

MONITVM.

Circa dissertationem Ill. Euleri, *de tabula numerorum primorum ad Millionem vsque et vltra continuanda*, quae extat in Tomo Commentariorum XIX. praecedentis collectionis, notandum est, numerum 1000009, in tabula annexa numerorum primorum millione maiorum occurrentem, non esse primum, sed diuisore gaudere 293, quippe qui diuisor, Schemati praemisso pro valore $q = 33333$ sub residuo 19 loco signi Primorum p inserendus, tum temporis pro vnica hac areola fuerat praetermissus, vti deinceps, facta reuisione calculorum pro construenda hac tabula institutorum, compertum est; qua de re huiusmodi disquisitionum Curiosos hoc loco certiores facere haud abs re fore duximus.

HISTOIRE

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXVII.

Janvier —— Juin.

ASSEMBLÉES SOLEMNELLES.



Nous avons à rendre compte de deux événemens également intéressans & glorieux pour notre Académie : l'aggrégation de STANISLAS AUGUSTE & la visite de GUSTAVE III. deux Monarques qui indépendamment du Diademe dont Leurs têtes sont ornées occupent des places non moins brillantes parmi les génies de notre Siecle.

Ce fut le Mardi, 6 de Juin, dans une Assemblée extraordinaire de tous les Academiciens & Adjoints, tenue à onze heures avant midi & présidée par Mr. de *Domaschnef*, Gentil-Homme de la Chambre de *l'Imperatrice*,

 que

que celui-ci communiqua la lettre par laquelle Sa Majeſté le Roy de Pologne a bien voulu permettre que l'Académie Le comptât au nombre de ſes Aſſociés honoraires. Le Secrétaire de Conferences en fit la lecture, & M. le Directeur auſſi bien que tous ceux qui étoient aſſemblés, après l'avoir écoutée avec une attention des plus reſpectueuſes, ſe leverent & ſe feliciterent reciproquement de cette Aſſociation diſtinguée & glorieuſe. La lettre du Monarque eſt conçue en ces termes.

Monſieur de Domaſchnef,

Une Académie fondée par PIERRE le Grand, *&* *protégée par* CATHERINE II. *d'une maniere qui augmente ſi efficacement la maſſe des connoiſſances utiles, & par conſéquent le bonheur du Genre humain honore ceux qu'elle aſſocie, autant qu'elle intéreſſe l'univers à ſes ſuccès. J'accepte avec reconnoiſſance l'invitation que vous Me faites, Monſieur, de devenir membre de la Société, à laquelle Vous préſidez ſi dignement, & Je reçois comme un préſent très agréable les médailles, deſtinées à célébrer le premier Jubilé d'une Académie, dont les travaux pendant les cinquante premieres années de ſon exiſtence ſont conſignés dans ſes mémoires à la juſte reconnoiſſance de la poſtérité. Je regarde les rélations comme toutes établies entre Nous, puisqu'elles ſont fondées ſur l'eſtime que vous m'avez inſpirée, & qui me porte à vous aſſûrer tout particulierement que Je ſuis,*

Monſieur de Domaſchnef,

Varſovie
ce 21. Avril 1777.

Votre très affectionné
Stanislas Auguſte, Roi.

Tout ce que l'Europe ſait des vertus & des qualités éminentes de cet auguſte Académicien, auxquelles les ſciences

ſciences ont tant de part, peut donner une idée de l'émotion que cette lecture produiſit ſur l'aſſemblée. On n'ignore pas que le devoir de régner a beſoin de délaſſemens, même de conſolations: on ſait que ce ſont les ſciences qui ont cette douce tâche auprès de ce Monarque, qui ayant fait ſentir à ſes Etats les avantages de l'ordre & de l'union, leur donne une conſiſtence permanente par les lumieres, qui émanent de ſon génie & ſe répandent ſur toutes les claſſes des Citoyens. (*) Ce n'eſt que le défaut de cette union qui a donné lieu aux troubles qui ont tant agité ce Royaume. Tranſportés en idée le génie de STANISLAS à quelques Siecles en arriere et l'Hiſtoire de la Pologne auroit été, ce qu'elle va devenir: une Leçon aux Etats.

Cette Séance fût terminée par la lecture d'un écrit dans lequel M. le Prof. Krafft rend compte à l'Académie d'une eſpece de leſſive qui en pénétrant les bois & les autres matieres combuſtibles, leur fait perdre la qualité de s'enflammer & de communiquer le feu aux corps qui leur ſont proches.

La ſeconde Aſſemblée ſolemnelle fut tenue dans un jour de Seance ordinaire le Vendredi 23. Juin avant midi. Elle fut honorée de la préſence de S. M. le Roi de Suede, (ſous le nom du Comte de Gothland). La Societé ſe trouvoit ce jour-là aſſemblée en plein; outre les membres ordinaires, tous les honoraires s'y étoient rendus, ainſi que les Miniſtres étrangers, les Seigneurs de la Suite

 de

(*) *Etabliſſement de la Commiſſion pour l'éducation nationale.* L'Europe eſt inſtruite du zele, de la ſolidité & de la ſageſſe des moyens dont cette illuſtre Compagnie s'eſt ſervie pour faire participer tous les Polonois à cet inſigne bienfait de leur Roi.

de Monsieur le Comte, les Principaux de la Cour, & les autres amateurs des Sciences.

L'Illustre Etranger fut reçu au bas de l'escalier par Monsieur de *Domaschnef*, Directeur Président, accompagné des deux Secrétaires. La compagnie resta dans la Salle d'assemblée ; & ce fut pour accorder la modestie du Prince avec les hommages que lui doivent les Sciences à tant de titres, que Monsieur le Directeur, qui avoit deja eu l'honneur de lui étre présenté, alla au devant de lui comme par empressement pour quelqu'un qu'il connoissoit personnellement.

L'Auguste Etranger ne voulut point accepter la place d'honneur qui lui fut offerte, il s'empara d'une des chaises qui avoient été placées pour les Etrangers. Dès que Monsieur le Directeur & la compagnie eurent pris place, Monsieur de *Domaschnef* ouvrit la Séance à l'ordinaire, en requérant le Secrétaire de faire la lecture du Journal de la derniere Séance. Cette lecture fut suivie d'une autre faite par Monsieur Pallas, sur la structure des montagnes, & les changemens arrivés au Globe rélativement à la Russie. Ensuite Monsieur de *Domaschnef* en fit une, dans laquelle, en justifiant le titre de Philosophique donné à ce Siecle, il insinua tout ce que les sciences & les talens doivent à l'illustre protecteur des lettres, que l'Académie avoit l'honneur de recevoir (*). Enfin le Conseiller d'état actuel Mr. de Stehlin, membre ordinaire de l'Académie, communiqua & lut une lettre du Pere Cibot, Missionaire à Pé-king, & l'un des associés de l'Académie

(*) Ces deux Discours avoient d'abord été imprimés séparément : mais comme de telles pieces detachées sont sujettes à s'égarer facilement, on a jugé à propos de les réunir encore au présent recit.

démie Impériale des Sciences. Cette lettre datée du 13. Septembre 1775, a pour objet une éſpéce de Champignons, qui jusqu'ici n'a pas encore été connue des Phyſiciens naturaliſtes.

Ce ſavant Miſſionnaire qui travaille avec tant de ſuccès à la propagation des lumières de la foi & de celles de la raiſon, avoit joint à ſa lettre un mémoire ſur la culture de ces champignons; mais Monſieur le Directeur jugea à propos d'en remettre la lecture à la ſéance prochaine (*). Celle ci fut terminée par la demande que fit Monſieur le Directeur, ſi quelqu'un avoit encore quelque propoſition à faire? Aprés un moment de ſilence toute la compagnie s'étant levée, Monſieur de *Domaſchnef* s'approcha de Sa Majeſté & eut l'honneur de lui préſenter tous les Académiciens honoraires & ordinaires, en commençant par ceux qui en même tems ſont de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm. Après quoi il conduiſit le Monarque au Cabinet d'Hiſtoire naturelle & de curioſités.

Dans le Périſtyle & en montant l'eſcalier, Monſieur le Comte de Gothland vit les buſtes des Illuſtres Suédois, tels que Linnaeus, Wallerius, & de la célébre Chriſtine, ainſi que de Descartes à qui GUSTAVE III. a érigé un monument, qu'on y voyoit auſſi repréſenté, tel qu'il eſt placé dans l'Egliſe de St. Oloff avec ſes inſcriptions.

Ce Prince agréa les différens porte-feuilles (tous aux armes de Gothland) contenant des plans, des deſſins, des eſtampes &c. que Monſieur le Directeur lui préſenta dans les

(*) L'Extrait de ce Mémoire ſe trouve ci-après à l'Article *Hiſtoire naturelle.*

les diverſes chambres du Cabinet qu'il parcourut, & qui étoient rélatives aux objets qui y ſont contenus.

Dans le cabinet des Médailles il vit le recueil le plus complet de médailles Suédoiſes, & de monnoies courantes au coin de GUSTAVE III. Il accepta ici la grande médaille de l'Académie, & ſon jetton en or. Toute ſa Suite en reçut de pareilles en argent. On préſenta auſſi au Prince un gros morceau de 4 livres de fer natif (*), dans une boëte de vermeil, ornée des armes de Gothland, artiſtement cizelées, & entourées de guirlandes en or de différentes couleurs.

S. M. après avoir vu les Inſtrumens de Phyſique expérimentale, examina les diverſes curioſités, & raretés Chinoiſes, & Mongales, & comme elles parurent L'intéreſſer, Monſieur de *Domaſchnef* ſaiſit cette occaſion, pour lui offrir une Collection des Deſſins de toutes ces pieces, enluminés au naturel.

Après avoir examiné le Cabinet, Monſieur le Comte de Gothland paſſa à la Bibliotheque. Le Manuſcript original de l'Inſtruction pour le Code, composé & écrit par *CATHERINE II.* (dépot qui aſſure à notre Bibliotheque la ſupériorité ſur toutes les autres,) arrêta longtems le Voyageur, qui ſe mit à le lire avec le plus grand intérêt. Monſieur de *Domaſchnef* voyant que ce ſeroit aux dépens de tout ce qui reſtoit encore à voir, ne put Lui donner autrement le change, qu'en Lui préſentant l'Image de la choſe qui abſorboit ſon attention. Ce qu'il fit en offrant à l'Emule de l'Auteur de cet immortel ouvrage, un exemplaire de la grande Edition de ce livre faite dans les quatre langues les plus connues, la Ruſſe, la Latine, la Françoiſe, & l'Allemande, ce qu'il accepta avec la plus grande ſenſibilité.

En

(*) Voyez ci-deſſous à l'Article *Hiſtoire naturelle.*

En ſortant de la Bibliotheque, Monſieur le Comte de Gothland examina avec beaucoup d'attention l'image de PIERRE I. de grandeur naturelle, pouſſé en cire, dont le moule avoit été pris ſur le Monarque même. Il ſe fit expliquer dans le même appartement un tableau allégorique qui ſe trouve placé vis-à-vis de cette image ſi chere à la nation (*).

De là il ſe rendit à l'Obſervatoire, & il ſe donna même la peine de monter à la plate-forme par un eſcalier tournant des plus incommodes, où il ne fut ſuivi que par Monſieur de *Domaſchnef* & par un des ſes Chambellans. En-

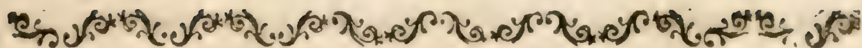
(*) L'Idée de cette repréſentation qu'on nomme le *Voeu univerſel*, ou le ſupplément à l'hiſtoire de *Pierre le Grand*, a été fournie à Monſieur de Domaſchnef par le cri général de tous les curieux qui venoient contempler l'image du Fondateur de St. Pétersbourg, ou plutôt de toute la Ruſſie; tous s'écrioient: Ah! s'il voyoit ce qu'on a fait après lui, ce qu'on a bâti ſur les fondemens qu'il a mis! En conſéquence de cette reflexion le tableau repréſente *Pierre le Grand* en Apothéoſe, à qui le Temps, tenant d'une main ſon ſablier, ſur lequel on voit le nombre *L* fait appercevoir, que dans ce période Sa Statue Equeſtre ſera élevée ſur un rocher, qu'on aura ſu rendre mobile & tranſporter à une diſtance de vingt Verſtes de ſon lieu natal: On y voit de plus un temple magnifique de marbre de Ruſſie, dédié au Saint du jour où *Pierre le Grand* naquit, & le Dome de l'Hôtel de l'Amirauté chargé de pavillons Turcs, au deſſus deſquels domine le pavillon triomphant de la Ruſſie. Le Port dreſſé ſur la Néva qui mene à la Forteresſe, eſt couvert d'une proceſſion militaire qui marchant en triomphe, porte les trophées pris ſur les Ennemis, pour les poſer dans l'Egliſe de St. Pierre où repoſent les cendres de ce Héros. Alluſion au jour, où CATHERINE II., aſſiſtant au Te-Deum, qui fut chanté dans cette Cathédrale à l'occaſion des victoires remportées par Sa flotte, prit des mains de l'Amiral les Trophées nouvellement apportés, & alla les dépoſer au pied de la Tombe du Créateur de la marine Ruſſe.

De l'autre main le Temps fait remarquer le médaillon de CATHERINE II. que la Rénommée porte au temple de l'Immortalité. Le Manche de ſa trompette eſt garni d'un drap, qui en ſe déroulant laiſſe appercevoir les augmentations de l'Empire de Ruſſie, particulierement les nouvelles acquiſitions ſur la Mer noire.

Enſuite Monſieur le Comte de Gothland ſouhaita de voir le fameux globe de Gottorp, qui ſe trouve ſous une tour batie exprès; & à peine eut-il demandé ſi on pouvoit en voir l'intérieur, qu'une partie de ce globe s'enfonça, & préſenta dans ſon ſein un berceau formé autour de l'axe du monde: ce berceau ombrageoit une table de douze couverts, offrant à l'Hôte auguſte tout ce que la terre produit de plus exquis dans les Climats les plus heureux. L'art ſupplée pour cet effet au Soleil, & ſi celui-ci ne produit pas tout ſeul des peches & des ananas, il ne les éclaire pas moins ſur leurs tiges, que la chaleur entretenue & ménagée oblige de croitre & de fructifier. Le Monarque du Nord ne les dédaigna pas. Ce Prince, Sa ſuite, quelques Seigneurs de la cour, & Monſieur le Directeur entrérent donc dans le ſein du Globe. Les armes de Gothland y paroiſſoïent par tout entrelacées de fleurs; Monſieur le Comte s'y arrêta une demi-heure; en ſortant il témoigna à Monſieur de Domaſchnef ſon contentement dans les termes le plus flatteurs, & comme il ſe trouvoit pour ainſi dire dans les Domaines de la Géographie, celui-ci ſaiſit cette occaſion pour lui préſenter la nouvelle grande Carte de la Ruſſie dreſſée à l'Académie avec un recueil de Cartes ſpéciales formant un Atlas de cet Empire.

En paſſant de là dans les Imprimeries de l'Académie, Monſieur le Comte ramaſſa une feuille qui ſembla tomber par hazard de la preſſe: c'étoit ſon portrait avec des vers au bas: Il eut encore la curioſité de regarder ce qu'on imprimoit dans différentes langues & il ne vit partout que des choſes qui ſe rapportoient à ſon Auguſte preſence. La Poéſie ou plutôt le ſentiment empruntoit tous les idiomes pour célébrer cet hôte illuſtre. Tout ce que l'imprimerie poſſédoit en gravures, la collection des anciens Czars, les vues de St. Pétersbourg, celles des environs &c., fut ici preſenté à l'Il-

l'Illuſtre Etranger, qui en l'acceptant parut très ſenſible à toutes ces attentions. Il ne ceſſoit de le temoigner à Monſieur le Directeur dans les termes les plus affectueux; & comme ne voulant pas ſe ſeparer de lui, il lui propoſa de venir diner avec Lui, honneur que Monſieur de Domaſchnef ne put accepter, ayant déja prié chez lui pour la même raiſon pluſieurs Cavaliers de la Suite du Roi, & tous les Académiciens. Ce que le Prince ayant appris, inſiſta lui même pour qu'il reſtât avec ſa compagnie. Ce fut à cette occaſion que l'Illuſtre voyageur fit entrevoir à Monſieur le Directeur l'eſpérance d'augmenter un jour le nombre des aſſociés couronnés de cette Académie, & ce fut avec cette idée flatteuſe que celle-ci prit congé de lui à deux heures & demie après midi. L'Academie reſta ainſi toute pénétrée de l'indulgence avec la quelle ce Protecteur éclairé des Sciences a bien voulu agréer tout ce que ſon zele a pu imaginer pour Lui temoigner ſa plus vive ſenſibilité de l'honneur qu'elle en a reçu.



DISCOURS

prononcé par Mr. de *Domaſchnef* le 23 Juin 1777, dans l'Aſſemblée de l'Académie Impériale des Sciences que Monſieur le Comte de Gothland honora de Sa préſence.

Dévoués à entretenir le feu ſacré de la vérité pour l'appliquer à la recherche des Secrets de la nature, à la propagation des lumieres, & à l'anéantiſſement des préjugés qui brillent quelques fois d'une lueur ſacrilège; rien ne ſauroit nous encourager & nous évertuer d'avantage dans la pourſuite de notre épineuſe carriere, que de voir y participer des hommes diſtingués encore plus par leurs fonctions, que par leurs titres; de nous apercevoir, que le Gout de connoiſſances, la paſſion de l'inſtruction prédomine en Eux ſur toutes les autres, au point qu'en ſe dérobant à l'éclat, qui les environne, ils franchiſſent tout pour étudier le vrai, pour imiter l'utile. Quelle ſatisfaction, Quelle gloire pour nous! de les voir entrer dans nos vues avec toute l'ardeur de l'héroïsme (la vérité en a un à elle) les pouſſer au-delà des bornes, que la méditation recueillie & tranquille n'oſeroit quelquefois ſoupçonner, & réagir enfin ſur nous mêmes avec toute l'énergie du Génie. Auſſi nous faiſons nous une fête toutes les fois que nous avons l'honneur & la ſatisfaction de recevoir des Voyageurs obſervateurs, qui conſtatent ſi évidemment le titre glorieux de *Philoſophique* dont ſe pare l'époque où nous vivons.

La voix du ſentiment a donné ce Surnom éclatant à notre Siecle. Seroit-ce à cauſe que le nom de Philo-

titre

ſophe y eſt devenu ſi commun ? mais la prétention à ce titre ſi rarement confirmé par la vraie Philoſophie a été de tout tems & de tous les lieux, où l'on avoit une idée d'un ſavoir quelconque ; pourquoi ne ſeroit-ce que ce période du tems qui ſoit décoré d'une Diſtinction ſi belle & ſi reſpectable ? C'eſt que l'eſprit philoſophique y eſt devenu celui du jour, & conſtitue le principe ſacré des loix & des moeurs. C'eſt lui encore, qui faiſant influer l'humanité dans la Juſtice & les Sentimens dans les uſages, devient la baſe des deux plus grands objets de la Société, *la législation & la morale*, c'eſt ce qui le caractériſe d'une maniere ſi frappante, & lui donne la prééminence décidée ſur ceux qui l'avoient précedé, dans lesquels l'eſprit non pas de raiſonnement, mais d'étiquette ſemble avoir été la plus recherchée des connoiſſances humaines.

On diroit qu'on ſe plaiſoit alors à creuſer des abîmes pour marquer les différentes claſſes entre les hommes ; on oublioit que l'objet de la Société eſt leur réunion & ſa perfection la plus grande liaiſon de ſes membres. Ce n'eſt que dans ce Siecle-ci, que l'amour des hommes & l'eſtime publique ſont devenus le but & la recompenſe des perſonnes de tous les rangs. C'eſt le flambeau de la Philoſophie, qui nous a éclairé ſur nos vrais intérêts, & ce ſont les Sciences qui purifierent & étendirent jusqu'à nos jouïſſances. En étudiant l'eſſence & les modifications de notre ame, elles ont influé ſur la maniere de voir & de ſentir ; car tandis que le vulgaire eſt ébloui & étourdi par les maſſes qu'il ſe repréſente brutes & informes, l'homme éclairé éprouve une immenſité de ſenſations dans l'analiſe des plus petites parcelles de notre Globe ; le Génie jouït de l'alternative de ſuivre le mouvement des mondes dans l'immenſité de l'Eſpace & celui de la ſeve dans une plante qui rampe ſous ſes pieds.

Si l'on reproche au luxe qui eſt auſſi une ſuite des progrès des connoiſſances humaines, d'avoir augmenté les infirmités de notre corps; de combien de contagions la Philoſophie n'a-t-elle pas garanti nos ames? elle rendit nos ſens plus fins, nos ſentimens plus délicats, nos idees plus claires, en un mot, notre exiſtence plus ſentie; elle releva toutes nos facultés & les dirigeant à leur véritable but, les fit concourir à l'agrandiſſement de la maſſe du bonheur tant général qu'individuel. L'imagination même, cette mere de l'eſpérance qui crée l'avenir, reproduit le paſſé, embellit le préſent, doit uniquement à la Philoſophie la découverte de cette mine de couleurs vives & variées, dont elle pare tout ce qu'elle touche. C'eſt elle auſſi, qui lui a appris le Secret de raprocher les beautés éparſes de la nature, & de rendre palpable aux yeux ce qui n'étoit concevable qu'à l'eſprit. Quel contraſte avec les Spectres hideux du fanatisme, qu'elle enfantoit dans les Siecles d'ignorance qui fit à l'Eſpece humaine des plaies dont elle ſaigne encore.

Auſſi les Souverains, grands hommes, ſe ſont-ils empreſſés à elever des temples à la Philoſophie. Ce ſont ces Sanctuaires (*), où le Génie interroge l'oracle de la nature, c'eſt ce culte établi à la vérité par les Monarques Philoſophes, qui porterent cette empreinte indelebile & ſacrée dans leurs loix & dans nos actions; c'eſt cet heureux beſoin de communication entre les eſprits, qui eſt devenu le lien le plus chéri des hommes, & qui a ſi efficacement conſolidé & raffermi les couches de la pyramide ſociale; c'eſt dans ce Siecle qu'un jeune Roi voiſin en écrivant à une des plus ſavantes & des plus illuſtres Acadé-

(*) Les Académies.

démies s'exprime ainsi: „ *Le plus sûr moïen de rendre les* „ *hommes meilleurs*, dit-il, *est de les éclairer*, *&* *ainsi* „ *le premier devoir des Princes est d'honorer les lettres &* „ *ceux qui les cultivent* (*).

C'est en faveur de pareils principes devenus ceux du Gouvernement, que les Sciences ont étendu leur empire si loin & sont devenues le point de réunion de toutes les races de l'espece humaine; sublimes dans leurs objets, elles se mettent au-dessus de toutes ces entraves subalternes, qui les separent, & font une seule famille de tous les êtres raisonnables. Si anciennement les Monarques appelloient les Philosophes auprès d'eux; dans le Siècle philosophique on a vu les Rois, venir se mêler parmi ces derniers. C'est ainsi que notre immortel Fondateur alla au foïer des Sciences faire éclorre à leur feu éternel & sacré ces germes de tous les talens, que la nature avoit déposés au fond de son ame; c'est ainsi que depuis peu un Philosophe couronné, qui a donné la leçon & l'exemple dans l'Art de la victoire (**) nous honora de son association; c'est de même qu'un autre Roi citoïen, dont les grandes & douces vertus ont été les voïes au Trone, se lia à nous (***); c'est par l'effet de cette même élévation philosophique que l'Europe admira de nos jours un jeune Prince, dont le berceau a été sur la premiere marche du Trone & qui né pour porter & affermir la couronne & l'état, se glorifia d'exercer un office dans l'Académie

(*) Lettre du Prince Roïal de Suede (le Roi d'aujourd'hui) à l'Académie des Sciences de Paris, du 26. Juillet 1768.

(**) L'Art de la guerre, poëme par la Philosophe de Sans-Souci.

(***) Stanislas Auguste, Roi de Pologne.

démie de ſon Roïaume. Quel ſublime noviciat pour la Roïauté! (*)

Et cela doit-il nous étonner de la part du Prince, qui encore à l'aurore de ſon âge, éleve un Monument au Reſtaurateur de la Philoſophie (**)? Il prouve par là à l'univers enchanté de ce ſpectacle, que le Genie eſt vraiment immortel, que la nuit du tems n'altere point ſon éclat, que les Idées d'un grand homme ſont un leg à tous ceux qui ſavent ſe l'approprier; & cet Auguſte Succeſſeur vient de démontrer combien il eſt capable de faire valoir ſon héritage.

Le Mauſolée de Deſcartes eſt certainement le plus beau triomphe de la Philoſophie, du ſiecle, du Païs & du Prince qui l'éleve: ſa vue enflammera tant d'eſprits, qui reſteroient peut-être dans une inertie perpétuelle, ſoutiendra tant d'autres dans cette carriere, où il n'y a que le ſimulacre de la gloire, qui peut faire ſupporter toutes les peines, dont elle eſt parſemée. Oui, les honneurs rendus aux ſciences ſont tous au profit de la vérité. Il n'y a point de bienfaits, dont l'influence ſoit plus généralement utile que ceux qu'on leur rend; toute l'humanité y participe. Car l'intérêt de la vérité ſeule, eſt dans l'union des hommes, tandisque presque tous les autres tendent à les iſoler. C'eſt donc par ces aſiles conſacrés à l'étude des raports de l'homme avec la nature; c'eſt par les dépots des idées des Philoſophes (***) que leurs fondateurs s'im-

(*) Guſtave III. Roi de Suéde a été élû Chancelier de l'Univerſité d'Upſal, étant Prince Roïal.

(**) Toute l'Europe & ſur-tout la France & la Suede ſavent, que le Prince Roïal de Suéde Guſtave Adolphe (le Roi d'aujourd'hui) à élevé un Mauſolée au grand Deſcartes.

(***) Les Bibliothéques.

s'immortalisent plus que par tous les Trophées. C'est ainsi que le nom de l'Académie a survecu à celui du Capitole.

Maitres des Nations ! répandez les lumieres, c'est dans leur seul Commerce que tous gagnent ; celui qui reçoit & celui qui donne. La perte n'est que pour le fanatisme & l'erreur. Sciences, bienfaitrices genereuses de l'humanité ! votre clarté est comme celle de cet Astre, qui ne la concentre pas sur un seul païs, mais embrase de ses raïons toute la surface du Globe. C'est ainsi que le celebre & infatigable Linné (*) donne à l'univers entier le spectacle de la chaine des Etres, qu'il a su appercevoir & distinguer ; il caracterise tous les chainons qui la composent, assigne à chacun d'eux sa place, remplit les intermediaires entre l'Hyppopotame & les Molecules organiques, entre le Platane & la Mousse. C'est par son secret que nous voïons sous un seul point de vue les nuances des especes que l'Esprit le plus pénétrant & la memoire la plus heureuse auroient été embarassés à rapprocher.

Nous nous applaudissons de compter parmi nos Collegues présens, un de vos compatriotes, illustres Hôtes ! qui d'un oeil exercé à lire dans les cieux vient de surprendre dans l'immensité de l'espace le cours d'une Comete, qui a su se dérober jusqu'à présent à tous les observateurs, quoique favorisés d'un ciel plus serein & d'instru-

(*) Célebre naturaliste de Suede ou plutôt de l'univers, qui a donné le Systeme complet des trois Regnes de la Nature généralement adopté. Il est membre de l'Académie de St. Pétersbourg.

inſtrumens également rapprochans. Et ſi le vigilant (*) Lexel n'a éte deſoriente ni par la grandeur, ni par la diſtance du Globe radieux dont il avoit ſaiſi les loix, le célebre Wallérius (**) n'a pas été non plus éconduit par l'extreme ténuité des élémens dont la combinaiſon fait une ſi prodigieuſe variété des corps, de leurs formes & de leurs effets. Il eſt donné à cette nation de nous étonner par les découvertes dans les Sciences & de nous charmer par les Chef-d'oeuvres dans les Arts; de reproduire des Plines & des Apelles. Nous voions même dans notre Cité l'émule de ce dernier décoré des marques du génie. Le tems qui ne ſait que monter & deſcendre eſt fixé par Roslin: il ſemble qu'il ait arraché une plume de ſes ailes pour faire ſon pinceau dont il forme les traits de l'image adorable de notre Grande Protectrice. Tous ont accouru dans ſon attelier pour y voir les traits d'un autre Souverain (***) & c'eſt pour ſoulager notre imagination embraſée par la renommée que le jeune Héros occupoit tant, & qui a ouvert pour nos voiſins une carriere de bonheur, qui doit étre d'autant plus infaillible qu'il ſemble avoir adopté les principes qui nous rendent ſi heureux nous mêmes. J'ai contemplé cette image, j'en ai été frappé & j'en ai rapporté une impreſſion vive & profonde, qui s'eſt gravée ineffaçablement dans mon eſprit, comme

(*) Aſtronome de notre Académie. Il vient de déterminer par le calcul, le temps de la révolution d'une des plus proches Cométes de la terre parmi celles qui ont été connues.

(**) Fameux Chimiſte de Suede, Membre de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, depuis le jour de la célebration de ſon Jubilé

(***) Portrait de Guſtave III. Roi de Suede, peint par le Chevalier Roslin. Il y a long-tems que le public a prononcé ſur le chef-d'oeuvre de la peinture dans ce tableau, mais ce n'eſt que depuis peu de jours qu'il admire la reſſemblance.

comme tout ce qu'il fait se grave dans le coeur. Les sociétés savantes sur-tout, Lui doivent des hommages solemnels pour l'elevation, à la quelle il les a portées. O jour mémorable dans les fastes de la Philosophie! Quel nom donneroit-elle au Roi, qui prend les marques distinctives du Genie pour les supports de sa Couronne! (*) Quelle époque pour la Création de cet ordre illustre! Sous quels auspices il s'établit! L'auguste & immortel Nom de Vasa devient un nom de famille pour le Génie.

Cette illustre race, dont l'héroïsme dans tous les Genres a éte l'appanage, offre le plus grand triomphe aux lettres dans la passion qu'avoit pour elles l'Auguste & célebre Christine, pour qui le devoir de régner devint une distraction trop importune; mais en réflechissant sur le sacrifice étonnant, que cette Reine avoit fait à son gout pour les Sciences; on doit convenir, que la Philosophie de son siecle n'a pas eté portee à ce sublime, dont nous la voions briller dans ce siecle philosophique. Elle se contentoit alors d'éclairer les hommes; mais celle du notre, excitee & soutenue par l'amour de l'humanité; plus vigoureuse & plus persuasive, en éclairant aux hommes les voies du bonheur, se fait un devoir de les y conduire.

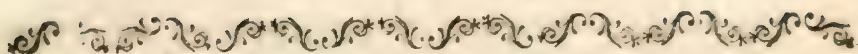
C'est le tableau ravissant de ses opérations mis dans tout son jour dans la carrière immense du Gouvernement, qui a dû Vous frapper chez nous, Voiageurs observateurs! C'est cette étendue du Genie, qui embrasse tout; cette

(*) L'Ordre de Vasa fut institué en Suede par Gustave III. le jour de son Couronnement le 29 Mai 1772 pour la Distinction & la Recompense des talens; par un des Statuts de cet ordre le Roi ne peut être couronné sans le recevoir préalablement le jour qu'il est couronné.

c'eſt cette activité, cette fécondité, qui ſupplée à tout, cette perſévérance de la raiſon, qui examine, qui approfondit tout, qui ne néglige, ne dedaigne rien, ſur-tout c'eſt cet aſſujettiſſement ſi rare, & ſi difficile pour le Génie, aux travaux de détail, & qui ne peut s'expliquer que par le dévouement du patriotiſme & par l'amour de l'humanité le plus exaltée. Enfin c'eſt ce ſpectacle ſublime qui démontre que le bonheur n'eſt jamais plus efficace ni plus univerſel que lorsqu'il émane du Trone, & que c'eſt dans ce cas qu'il s'empare de l'ame toute entiere. Ce dépôt immortel de la morale des Nations (*) en eſt une preuve parlante. C'eſt Vous, illuſtres Voïageurs! qui par Vos dignités & encore plus par Vos talens influéz ſur le ſort des hommes, l'impreſſion que Vous emporterés de chez nous ne pourroit qu'augmenter la ſatisfaction que Vous aviés du tant de fois éprouver en répendant la félicité ſur ceux qui dépendent de vous. Ce ſont des principes ſemblables à ceux qui ſont contenus dans ce Code (†) & tels qu'on les voit chez le peuple voiſin, qui des actes du Gouvernement, font des leçons du bonheur & de leur exécution la pratique des Vertus.

(*) (†) L'Académie qui a le bonheur de poſſéder le manuſcript de l'Inſtruction pour le Code de CATHERINE II. écrit de ſa propre main, l'a toujours ſur la table dans ſes ſéances ſolemnelles. Il eſt déposé dans un monument de bronze doré avec des figures & inſcriptions analogues au ſujet.

OBSER-



OBSERVATIONS

ſur la formation des montagnes & les changemens arrivés au Globe, particulierement à l'égard de l'Empire de Ruſſie; par Mr. *P. S. Pallas* lues le 23. Juin 1777 à l'Aſſemblée de l'Académie Impériale des Sciences, que Monſieur le Comte de Gothland daigna illuſtrer de Sa préſence.

Depuis le renouvellement des ſciences on n'a ceſſé de former des hypotheſes ſur la ſtructure apparente de notre Planete, ſur l'origine de ſes montagnes, ſur les couches remplies de productions marines, & ſur les autres traces de ces grandes cataſtrophes du globe, dont l'hiſtoire la plus ancienne de la plûpart des peuples aſiatiques nous a conſervé quelque connoiſſance & dont on s'eſt efforcé de trouver ou de ſuppoſer les cauſes naturelles. La plûpart de ces hypotheſes depuis celle de la chûte des anciens continents, jusqu'aux plus modernes, telles que celle de Monſieur le Comte *de Buffon* & d'autres Auteurs célebres de notre ſiecle, ne manquent pas d'obſervations juſtes & de conſéquences bien-appliquées, mais elles pechent toutes en ce que les auteurs, s'attachant à une ſeule ou pluſieurs obſervations & cauſes particulieres, en ont voulu déduire toutes les opérations de la Nature ſi féconde en reſſources, & ſe ſont égarés en explications & en oppoſitions à perte de vue. C'eſt pour ainſi dire avec des prejugés nationaux, ou avec les idées puiſées dans la ſphere particuliere des connoiſſances de chacun de ces auteurs, qu'ils ont jugé de la ſtructure du globe

entier d'après les montagnes de leurs patries; & comme plusieurs de ces créateurs en hypothèses n'ont pas même connu par leurs propres yeux la nature des grandes chaines de montagnes, ou tout au plus n'ont été au fait que de celles, qui traversent l'Europe, leurs théories ont été adaptées à la structure particuliere de celles là & bien souvent d'une petite partie des mêmes, qui étoit le plus à leur portée, (tout comme les anciens & quelques ultramontains modernes ont jugé du flux & du reflux de l'Océan, pas les petits mouvemens de la Méditerranée, qu'ils étoient à portée de connoitre:) —— *Woodward* par exemple sans s'inquieter de ces chaines de vieille roche, étaïoit son systeme sur la formation des couches & des montagnes pendant le déluge, sur la persuasion où il étoit, que toutes les montagnes de l'Univers fussent composées de couches à peu près horizontales. Mr. le Comte *de Buffon* de même ne semble avoir jugé des montagnes en général, que par celles de la France, qui pour la plûpart sont composées de couches à peu près horizontales ou simplement dérangées par l'effet de quelques Volcans. Il n'auroit pas sans cela déduit la formation des cailloux & de l'ancienne roche même (*a*) de matières charriées & déposées par les courants de mer; ni avancé que les traces de la mer se voient jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes (*b*), que ces montagnes sont toutes composées de couches horizontales, ainsi que les plaines (*c*), & que les Volcans ne se trouvent que dans les hautes Alpes (*d*); toutes assertions totalement ou en partie contraires

(*a*) Histoire naturelle Ed. 12°. Vol. 1. p. 128.
(*b*) Ibid. p. 111.
(*c*) Ibid. p. 116.
(*d*) Ibid. p. 164.

traires à l'ordre général de la Nature. Beaucoup de Naturaliſtes Italiens, ayant ſous leurs yeux les effets immenſes des Volcans encore allumés chez eux, ou les traces frequentes de ceux qui ſe ſont éteints, ont aimé à tout déduire de ces feux ſouterrains. Un ſavant Minéralogiſte Autrichien (Mr. *Délius*) d'après les monts Crapacs, dont les plus hautes cimes, qu'il a vues, conſiſtent en roche calcaire (véritable ou qui lui reſſemble à la vue) juge, que toutes les hautes montagnes du globe, ainſi que ſa baſe ou le noyau même de notre Planete, doivent être de cette roche. Je pourrois alléguer une infinité d'autres exemples de cette nature; mais je ne me ſuis point propoſé dans ce diſcours, de diſcuter toutes les hypotheſes anciennes & modernes ſur l'état préſent de notre globe, qui ne ſont pas en petit nombre, mais qui ſe réduiſent preſque toutes ou à ſuppoſer la ruine d'une premiere coque unie & ſolide de l'ancien globe; la ſubmerſion de continens par le dérangement des mers, différemment imaginé; une diſſolution ſubite de la ſurface du globe dans le tems du deluge; l'influence & même le choc de quelque Comete; une diminution lente & générale des eaux de la mer; ou enfin à faire jouer les Volcans, que l'on a été juſqu'à attribuer au feu central gratuitement ſuppoſé, & que d'autres Phyſiciens ont emploié pour rendre raiſon de la formation des métaux par ſublimation, de l'origine des fontaines par diſtillation, en faiſant de notre planete tantôt un laboratoire chymique, tantôt une machine hydraulique, ſuppoſitions plus adaptées aux idées méthodiques d'eſprits raiſonneurs, qui s'amuſent de telles hypotheſes, que ne le ſont les grandes opérations variées de la Nature, qui ſouvent, à l'obſervation, détruit les plus beaux ſyſtemes de cabinet & même quelquefois les démonſtrations mathématiques.

Ce

Ce n'eſt que de nos jours, qu'on a commencé à généraliſer quelques connoiſſances ſur la conſtitution de la ſurface de notre globe & des grandes chaines de montagnes primitives. C'eſt aux ſavans Minérographes Suedois & Allemands, que l'on doit les premieres idées nettes & préciſes ſur l'ordre que la Nature a ſuivi en formant ces élévations du globe & dans l'arrangement des couches qui compoſent les collines & les plaines de nos continens. J'ai parcouru, ſous les auſpices de notre GRANDE & AUGUSTE SOUVERAINE, presque toute la longueur de l'Aſie & une bonne partie de deux des plus grandes chaines de montagnes, que ſoutienne la terre habitable, & je trouve avec une ſurpriſe bien agréable, que tous les réſultats de mes obſervations, faites ſans une connoiſſance de ces dernieres découvertes & par conſéquent ſans aucune prévention pour le ſyſteme qu'elles étaient, répondent exactement aux apperçus de ces Naturaliſtes & ſervent également à confirmer les idees judicieuſes & vraies, qu'ils ont commencé à nous donner ſur la ſtructure intérieure du globe.

C'eſt donc autant pour étendre ces idées au vaſte terrein de l'Empire Ruſſe, que pour détailler quelques penſées, fondées ſur mes propres obſervations, touchant l'ancien état de notre globe, & les cataſtrophes qui lui ſont arrivées, que je vais preſenter un expoſé ſuivi de ce qui ſe trouve épars ſur cette matière dans les Journaux de mes voïages.

D'après ce que nous ſavons ſur les Alpes Suedoiſes, Suiſſes, & Tyroloiſes, ſur l'Appennin, ſur les montagnes qui environnent la Bohème, ſur le Caucaſe, ſur les montagnes de la Sibérie, ſur les Andes même, l'on peut admettre en axiome que les plus hautes montagnes du globe,

be, qui forment les chaines continues, font faites de cette roche qu'on nomme Granite, dont la bafe eft toujours un Quarz, plus ou moins mêlé de Feldfpath, de Mica & de petites Bafaltes éparfes fans aucun ordre & par fragmens irréguliers, en différentes portions. Autant que des obfervations faites à la furface & les fouilles des mines & des puits, quoique bien peu profondes en comparaifon de la maffe de notre planete, peuvent inftruire, cette vieille roche & le fable produit par fa décompofition forment la bafe de tous les continens. C'eft le granite qu'on rencontre au deffous des plus profondes couches des montagnes & fouvent dans les terres baffes où ces couches font enlevées par la violence des inondations; c'eft lui qui forme les grandes boffes ou plateaux, & pour ainfi dire le cœur des plus grandes alpes de l'univers connu; de façon que rien n'eft plus vraifemblable que de prendre cette roche pour le principal ingrédient de l'interieur de notre globe. J'avoue qu'une telle conftitution ne fauroit favorifer la doctrine du feu central; bien au contraire les Phyficiens qui placent au noïau de la Terre une maffe énorme d'aimant, doivent mieux fe trouver de cette asfertion, puisque l'aimant, toujours micacé & trés-fouvent mêlé de quarz, montre plus d'affinité à la roche granitique qu'aux minéraux phlogiftiques, ou à la roche calcaire & au fable pur, que d'autres ont prétendu occuper tout l'intérieur du globe. Au refte la matière du granite ne peut avoir été le produit d'un feu de fufion, qui en altere plûtot les principes. Mr. *de Buffon* & d'autres en fuppofant que la matière des planetes ait été détachée de la maffe du Soleil par le choc d'une comete, ou que des comètes embrafées & fondues par le feu du Soleil foient venues former ces corps de notre fyfteme, fe virent obligés d'adopter cette production de la roche primitive, tan-

dis qu'il n'eſt pas encore bien prouvé, que le ſoleil brule d'un feu aſſés violent, pour que ſa maſſe ſoit dans un état de fuſion. Il n'appartient peut-être point aux hommes d'approfondir la véritable cauſe qui a jetté cette maſſe énorme de matiere vitrifiable dans l'orbite où nous circulons, & l'ingénieux Auteur des *Recherches ſur les Americains* ſemble avoir raiſon de dire: „ Qu'il vaut autant „ écrire un traité ſur la formation des étoiles, que ſur „ celle des rochers, qui ont été élevés par les mains puiſ- „ ſantes de la Nature créatrice, à laquelle nous devons la „ petite planéte ſur laquelle les Philoſophes raiſonnent. "

Toujours il eſt prouvé par une obſervation générale & conſtante, que cette ancienne roche, que nous appellons granite & qui ne ſe trouve jamais en couches, mais en blocs & rochers, ou du moins en maſſes entaſſées les unes ſur les autres, ne contient jamais la moindre trace de pétrifications ou d'empreinte organique, de façon qu'elle ſemble avoir été antérieure à toute la Nature organiſee, ou du moins (ſi l'on admet les âges & les periodes du monde des Indiens & des Egyptiens) réduite dans l'etat où nous la voïons par une refonte totale, qui a détruit jusqu'aux moindres traces de tout corps organique, qui pourrait avoir exiſté avant une telle cataſtrophe. Nous voïons auſſi, que les plus hautes éminences qu'elle forme, ſoit en plateaux, ſoit en croupes de montagnes ou pics eſcarpés. ne ſont jamais recouvertes de couches argilleuſes ou calcaires, originaires de la mer, mais ſemblent avoir été de tout temps, ou depuis leur formation elevées & à ſec au-deſſus du niveau des mers (*e*). Obſervation qui réfu-

(*e*) Mr. le C. *de Buffon* convient lui-même (vol. 11. p. 35.) que les ſommets des plus hautes alpes qu'il ait vus, ſouvent à deux ou 3-0 toiſes

réfute l'hypothese de ceux qui croïent que toutes ces élevations montagneuses du globe sont l'effet du feu central & de ses explosions dans les premiers âges de la terre, lorsque la croute, qui environnait ce brasier merveilleux, n'avait encore pas assés de solidité pour resister également à un tel agent intérieur: ce qui n'aurait pu se faire, sans élever en même tems differentes couches étrangeres, qui dussent se trouver perchées sur les grandes hauteurs escarpées des montagnes granitiques. Un seul exemple de cette nature prouveroit, qu'il peut y avoir des feux souterrains ou des foiers de Volcans plus bas que le granite, ou dans l'intérieur de cette roche; mais jusqu'ici on l'a cherché en vain, quoique les foïers de plusieurs Volcans éteints, qu'on a examinés de nos jours, semblent avoir été placés immédiatement sur la vieille roche.

Je tracerai ici les principales élévations de cette ancienne roche dans l'Empire russe & toute l'Asie boréale,

d 2 au-

toises en descendant, sont ordinairement composés de rochers de différentes especes de granite, qu'il avoue dans un autre endroit ne jamais contenir de coquilles, & par là il contredit ce que nous avons cité de lui plus haut. Il n'est pas plus exact, en mettant le granite au nombre des matieres arrangées par couches (vol. II. p. 27.). J'avoue que certains granites semblent entassés par couches de plusieurs pieds d'épaisseur. Mais les félures qui ont divisé cette roche en grandes masses parallélépipedes, ne démontrent pas plus sa formation par le dépôt des eaux, que les articulations du basalte, ou les fentes d'une argille durcie au feu. Nous voïons une preuve illustre contre l'opinion qui met le granite au nombre des pierres en couches formées par le dépôt des eaux, dans cette roche énorme que l'AUGUSTE EMULE de PIERRE le GRAND a choisie pour soutenir le Monument de son digne prédécesseur, roche dont les dimensions primitives de 27 pieds de haut, sur 44 de long & 22 de large, ne se prêtent point à ces idées, & dont la masse solide de 5000,000 de livres ne pourra jamais être déterrée dans aucune couche de dépôt du globe.

autant que j'ai pu en acquerir de connoiſſances certaines par mes propres yeux, ou par des rélations dignes de confiance. —— Les obſervations des derniers voyageurs ont conſtaté que le Caucaſe, qui occupe l'eſpace entre la mer Caſpienne & le Pont-Euxin, eſt une des plus hautes élévations de granite, qui exiſtent ſur notre globe, très-régulierement accompagnée de ces bandes ſchiſteuſes qui recouvrent toûjours les côtés des grandes chaines, ainſi que de montagnes ſecondaires & tertiaires qui les accompagnent, ainſi qu'il ſera expoſé dans la ſuite, à l'occaſion des montagnes de la Sibérie. L'on a moins de connoiſſances préciſes ſur les montagnes qui forment l'enceinte méridionale de la mer Caſpienne. Mais à en juger par le peu que j'en ai pu apprendre, ce ſont plutôt des montagnes ſchiſteuſes & calcaires, ſoulevées à des hauteurs conſidérables par l'effet des feux ſouterrains, qui ſemblent auſſi avoir formé l'Ararat (peut-être continu à cette chaine), & qui ne ſont pas encore entierement éteints dans les montagnes de la Perſe. Ce n'eſt qu'en paſſant que je parle de ces premieres chaines aſiatiques, pour ne point anticiper ſur les détails, que nous devons en attendre de la ſavante plume de Mr. le Profeſſeur *Güldenſtaedt* mon Confrere. Il me ſera permis d'être plus ample au ſujet de celles que je connois par moi-même.

Une chaine célebre depuis longtemps, mieux reconnue de nos jours par les fréquens établiſſemens métalliques qu'on y a formés & par les voïages phyſiques qui l'ont traverſée en tout ſens, c'eſt celle des *montagnes d'Oural*, que le reſpect des peuples qui l'avoiſinent leur a fait appeller la Ceinture de la terre & que *Strahlenberg* donna avec raiſon pour limite naturelle entre l'Europe

&

& l'Asie. Le granite & le quarz ne forment ici qu'une bande étroite qui va en serpentant du midi au nord. Sa plus grande largeur se trouve sur les sources du Iaïk & du Bielaïa, où elle est renforcée de quelques hautes montagnes détachées de la chaine, par lesquelles la roche granitique s'éleve au milieu de la bande schisteuse, surtout du côté du couchant. Elle continue de là foiblement & en diminuant surtout de hauteur, jusqu'aux sources du Toura, souvent presque interrompue, affaissée & recouverte par les couches schisteuses qui l'accompagnent; puis s'élargissant de nouveau, elle remplit par de très hautes montagnes l'espace entre les sources du Kama & Petchora d'un côté, & les eaux qui coulent à l'orient pour se réunir dans le Tawda (*f*). Enfin elle finit en décroissant, mais

d 3

(*f*) L'abbé *Chappe d'Auteroche* a eu raison de contredire *Ysbrand Ides* & *Lange* par rapport à la hauteur excessive que ces voïageurs avaient attribuée à cette partie des monts Ourals, qui passe entre Solykamsk & Verkhotourie. Il est aussi excusable d'avoir supposé la Sibérie ou les plaines au-delà de ces montagnes moins élevées au-dessus de celles d'Europe, que *Strahlenberg* l'assure. Les parties boréales, par où son voïage a conduit l'Observateur françois, sont effectivement des plaines basses, couvertes de forêts & très souvent marécageuses. Mais il convient lui même que le plan de la Sibérie s'élève vers le midi, c'est-à-dire vers les Alpes qui forment sa frontiere, & puisque cette chaine s'élargit & s'éléve de plus en plus vers l'orient, l'élévation des plaines de la Sibérie y devient de même plus considérable & leur pente plus rapide; ce qui justifie l'assertion de *Strahlenberg*. Cette situation de la Sibérie en plan incliné vers la mer glaciale, son exposition aux vents de nord & de nord-est, pendant que ceux du midi sont interceptés par la grande chaine, couverte pour la plûpart de neiges continuelles, & ceux de l'ouest par la chaine ouralique, devient une cause plus puissante pour rendre le climat de ce païs si rude, que ne le seroit l'élévation seule, ou la salinité des terres à laquelle notre Abbé voudroit entierement attribuer la rigueur des froids qui y regnent. Je citerai, en preuve de cette assertion, les environs de la fonderie de Barnaoul sur l'Ob, ga-

mais toujours hérissée de rochers, vers les bords de la mer glaciale, où elle forme le grand Cap qui est à l'ouest du golfe de la riviere Ob, puis tourne au nord-est, le long des côtes arctiques, où par une branche marine, elle forme la Nova Semlja, & répond enfin par des côtes escarpées à la grande chaine boréale d'Europe, laquelle aïant parcouru toute la Scandinavie en forme de fer à cheval, vient remplir de rochers granitiques & d'autres montagnes les basses terres de la Finlande, & semble d'une autre part continuer du Cap-Nord de la Norvege, par

rantis des vents du nord par une trainée de montagnes & de forets, qui s'avancent entre le Tom & l'Ob, où toute sorte de jardinage, même les melons & les citrouilles viennent parfaitement bien en pleine terre, tandis qu'à deux degrés plus au Sud la pente des montagnes Altaïques, exposée au nord, ne produit rien; je citerai les vallées de Sélenginsk & les environs de la riviere Abakân, fleuries au mois d'Avril au pied des montagnes, sur le nord desquelles regnent les frimats & les neiges jusqu'au mois de Juin. Une partie de notre Europe doit peut-être la douceur de son climat aux alpes de la Scandinavie & de l'Ecosse, qui détournent les vents du nord, & à ce que les glaces du nord ont un débouché libre entre l'Europe & l'Amérique, pour être entrainées par les courants vers les tropiques, de sorte que les vents du nord y sont moins refroidis & moins soutenus en été. Ce sont au contraire ces glaces renfermées par le Cap Nord & le Spitsberg, qui influent déja sur le climat de la Russie boréale. Les déserts d'Astrakan semblent par opposition devoir l'intensité de leur été, qui y favorise jusqu'aux plantes propres à la Perse & à la Syrie, à son exposition aux vents de sud & de sud-Est & aux terres élevées qui les couvrent au nord. Ce n'est aussi précisément que les vents de nord-est & de sud-ouest réfléchis par les montagnes d'Oural & le Caucase, qui y font régner les plus fortes gélées en hiver & qui amenent la fraicheur en été. — Je ne vois rien en tout cela qui dût nous faire recourir au feu central, si peu énergique d'ailleurs, que le profond de la mer n'en n'a pu être réchauffé au degré que l'est sa surface, comme les observations thermométriques, faites à différentes profondeurs, en font foi.

par la chaine marine du Spitsberg, en rempliſſant peut-être d'îles & de briſants l'Océan arctique, pour ſe réunir par le pole aux pointes boréales & orientales de l'Aſie & de l'Amérique ſeptentrionale : continuation qui devient probable par ſa conformité aux loix que la Nature ſemble obſerver dans la continuité des chaines montagneuſes du globe, & qui rendroit très-chimériques toutes les tentatives des peuples commerçants de l'Europe, pour pénétrer par le pôle à la Chine & au Japon.

Vers le midi la chaine Ouralique va de l'endroit où j'ai placé ſa principale force, en diminuant jusqu'au delà du Jaik, pour ſe diſtribuer en petites trainées de montagnes ſchiſteuſes & de collines de l'ordre ſecondaire, qui ſe répandent entre l'éſt & l'oueſt vers la Ruſſie méridionale, les environs du lac Aral & les branches occidentales de la grande *chaine Altaïque.*

Je paſſe à l'idée générale de cette derniere chaine, laquelle fait partie d'un des plus puiſſants ſyſtemes de montagnes qui aient été reconnus ſur notre planete. La grande chaine qui borde au midi toute la Sibérie, depuis l'Irtiche jusqu'à l'Océan oriental ou la partie boréale de la grande mer, n'eſt qu'une des branches de ce grand ſyſteme dont je donnerai l'eſquiſſe, d'après les connoiſſances que j'ai pu m'en procurer, bien différente de ce qu'on en a debité jusqu'ici. Je commencerai par remarquer que les montagnes de notre globe ne ſont pas toutes diſtribuées par chaines tournées en différentes directions & (ſelon *Bourguet*) ordinairement dans le ſens de la méridienne ou de l'equateur, croiſées ou cohérentes en forme de croſſe, de réſeau, ou de côtes réunies à une epine commune. Toutes ces idées, dont la derniere eſt la plus familière aux Minéralgiſtes Suédois, ſont encore calquées

ſur

ſur la conſtitution des païs où elles ont pris naiſſance, ſans être adaptées au plan général de la Nature. Il y a des ſyſtemes de montagnes dont les branches ou chaines vont ſe réunir à un ou pluſieurs centres raſſemblés ou quelque plateau commun, qui maitriſe toutes ces chaines en hauteur effective. Tel ſemble être ce grand aſſemblage de montagnes dont les raïons parcourent tout l'intérieur du continet de l'Aſie en différents ſens & qui en ont été le premier terrein habitable. La forme du continent de l'Afrique ſemble indiquer un arrangement différent de montagnes, mais l'intérieur de cette partie du monde eſt trop peu connu, pour pouvoir en juger avec certitude.

Pour trouver la plus grande élévation effective de l'Aſie, le moïen le plus ſûr & le plus ordinairement emploïé eſt de remonter le cours des grandes rivieres qui ſe jettent dans les mers oppoſées & de rechercher leurs premieres ſources. L'Inde & le Gange, qui vont mêler leurs eaux à l'Océan Indien, & le Ghôango, qui traverſant la Chine ſe jette dans l'Océan oriental, prennent leurs principales ſources dans les effroïables groupes de montagnes au nord des Indes, dont le Tybet & le roïaume de Cachemire ſont hériſſés, & qui ont été celebrés par tous les voyageurs. C'eſt dons là le terrein le plus élevé à l'égard de toute l'Aſie méridionale: c'eſt de là que tous ces heureux climats panchent vers le tropique & reçoivent l'influence de la zone torride par les vents du midi. C'eſt de là que partent les chaines de montagnes qui parcourent la Perſe vers l'occident, les deux Preſqu'iles de l'Inde au ſud & la Chine vers l'orient. C'eſt dans les vallées du midi de cet ancien païs, qu'on doit chercher la premiere patrie de notre eſpece, ſurtout de la race des hom-

hommes blancs (*g*), qui ont été de là peupler en foule les

(*g*) Quoiqu'en dise Mr. *de Pauw*, la race des Negres n'est pas un produit si facile du climat, que lui & d'autres se l'imaginent. Les Portugais noircis en Afrique de *l'Abbé Demanet* ne sont pas encore clairement prouvés & pourroient bien devoir leur origine à l'incontinence physique de ces colons, & leur mélange avec les Negres du païs. Le sperme noir des derniers n'est pas mieux constaté & l'éthiops animal, dont cet auteur parle tant, n'est qu'une qualité occulte & pas une explication: aussi devroit-il être depuis long-tems détruit dans les Negres des Isles australes & de la nouvelle Guinée, qui acquierent souvent une laine roussâtre sans changer de couleur quant à la peau. Les Maures qui habitent depuis tant de siecles un climat plus ardent que mainte peuplade de Negres, conservent toujours les caracteres d'une autre race d'hommes. Comme l'Afrique n'est jointe à l'Asie par aucune chaine de montagnes bien élevées & tout-à-fait continues, ces continents devoient, lors de la plus grande élevation des mers dans les premiers âges du monde, former deux isles tout à fait séparées, dont la race noire peuploit l'une, transformée sous la zone torride par des influences qui agissent depuis une trés haute antiquité. Il n'est point nécessaire de recourir ici à une mésalliance de l'espece humaine, comme il semble qu'il en est arrivé une pour produire les montagnards longimanes ou Quimos du Madagascar, si toutefois il en existe. On pourroit avancer que la race des hommes noirs forme la tige primitive de l'espéce & que la blanche n'est qu'une dégéneration; puisque les animaux & oiseaux noirs changent souvent au blanc, & presque jamais les blancs au noir; mais la production des Negres blancs, tandis qu'il ne nait point de noirs, mais bien une espece d'Albinos, & quelques sujets tachetés de parents blancs ou basanés, prouveroient contre cette opinion. D'ailleurs les oiseaux de couleurs claires, mais bigarées, varient de même au noir, & il nait de véritables Negres parmi les lievres du nord & les Isatis, dont la robe incline d'ailleurs au blanc tellement, que la plûpart de ces animaux blanchissent en hiver. Je ne puis m'empêcher de faire remarquer ici, que tous les animaux, qui sont devenus domestiques dans le nord aussi bien que dans le midi, se trouvent originairement sauvages dans le milieu tempéré de l'Asie, à l'exception du Dromadaire, dont les deux races ne viennent bien qu'en Afrique, & se familiarisent difficilement avec le climat d'Asie. La patrie primitive du Taureau sauvage, du

les heureuſes contrées de la Chine, de la Perſe & ſur-tout de l'Inde, où de l'aveu de tout le monde habitent les

---

Buſle, du Mouflon qui a produit nos Brebis, de la Chevre à bézoard & du Bouc-étain qui ſe ſont mêlés pour produire la race métive de nos Chévres domeſtiques, eſt dans les chaines montagneuſes, qui occupent le milieu de l'Aſie & une partie de l'Europe. Le Renne abonde & ſert de bétail dans les hautes montagnes qui bordent la Sibérie, & qui rempliſſent ſon extremité orientale; il ſe trouve auſſi dans la chaine ouralique juſqu'au 56e. dégré, d'où il a été peupler les terres arctiques. Le Chameau à deux boſſes ſubſiſte ſauvage dans les grands déſerts entre le Tybet & la Chine. Le Sanglier occupe les forets & les marais de toute l'Aſie temperée. L'on connait aſſés le Chat ſauvage, duquel la race domeſtique eſt iſſue. Enfin la tige principale du Chien domeſtique dérive trés-certainement du Chakal, naturellement peu craintif de l'homme, ſuſceptible d'attachement & même (ſelon *Chardin*) d'inſtruction, & ſympathiſant avec le Chien berger, ainſi que nous l'avons vû dans celui qui nous fut amené de Perſe il y a deux ans. Je ne crois pourtant point, que la race de nos chiens ſoit pure, mais je la ſuppoſe croiſée, de tems immémorial, avec le Loup ordinaire, le Renard & peut-étre l'Hyene même, d'où nous eſt venu cette immenſe varieté dans les formes & la grandeur des Chiens: la plus grande variété, venuë de l'Inde du tems d'Aléxandre, étant probablement le produit de l'Hyene. Le Chakal qui eſt d'une taille moïenne entre ces eſpeces voiſines, devint, dans l'état domeſtique, d'autant plus propre à s'accoupler & à produire avec des individus apprivoiſés des autres eſpeces. — Il n'eſt pas douteux qu'une telle production ne puiſſe avoir lieu, puiſque ſous des circonſtances favorables le chien, tel qu'il eſt ajourd'hui, a produit avec le Loup en Angleterre (voy. *Pennant ſynopſ. p.* 144 *) & avec le Renard en Meklenbourg (voy. *Zimmermann ſpecim. Zoologiae geographicae p.* 471.): pour ne rien dire des Chiens-loups des anciens, &c. Tous ces animaux aſſujettis à l'homme, étant originaires de l'Aſie temperée, ſemblent prouver que le plateau de ce continent était auſſi la premiere patrie du dernier. Le hazard peut avoir transféré notre race en Afrique, dans un âge, où les plateaux de ce continent étaient encore ſeparés de l'Aſie par de grands intervalles de mer: & ce nouveau ſéjour étant tout entier dans la Zone torride, l'influence d'un climat auſſi brulant pendant une ſuite de

les nations les plus anciennement cultivées de l'univers, & où peut-être l'on doit chercher les racines des langues primitives de l'Asie & de l'Europe. Le Tybet même, la plus haute contrée de l'Asie, dont les habitants se disent issus d'une race de Singes aborigenes, auxquels d'ailleurs ils portent quelque ressemblance, n'a été (selon leurs traditions) policé que par des instructeurs venus de l'Inde & n'en étoit peut-être qu'une colonie echappée dans les premiers âges de la vie sauvage, ainsi que la plupart des peuples de l'Asie, les colonies de l'Europe & les habitants de tant d'Isles au midi de l'Asie.

De l'autre côté en recherchant l'origine des grands fleuves, qui traversent la Siberie pour meler leurs eaux à la mer arctique, des rivières qui se réunissent à l'Amur pour se rendre à la partie boreale de la grande mer & des eaux qui découlent à l'occident vers les grands bassins du desert de la Tatarie, dont le lac Aral est le plus considérable, on rencontre au dessus des sources de ces fleuves la suite des *montagnes Altaïques*. Tous les Asiatiques Nomades conviennent, que la partie la plus élevée des alpes de l'Asie septentrionale est à la montagne appellée *Boghdo* (Souveraine), qui faisoit la séparation naturelle entre les Hordes ennemies des Calmoucs & des Mongols. De cette montagne, dont les pics s'élevent

e 2 fort

siècles, dut bien faire changer de complexion à ces hommes transplantés. Tandis qu'en Amérique, où d'ailleurs l'espece humaine semble moins anciennement établie, des situations tout aussi ardentes n'ont pu produire autant d'effet, par la raison peut-être que les hommes y trouvant une chaine étendue du midi au Nord, pouvaint successivement changer de climats ou mêler leurs races nées en différentes latitudes, & par-là tempérer l'effet de la Zone torride.

fort au-dessus des neiges & de toutes les autres montagnes de l'Asie boréale, partent deux grandes & deux moiennes chaines, comme d'un centre commun. Celle qui va au Sud, sous le nom de *Moûssart*, se réunit aux montagnes du Tybet; une moindre chaine, qui porte le nom d'*Alak* (*h*), va à l'occident se distribuer entre le désert des Tartares independans & la Boukharie, communique par des chaines secondaires avec les extrémités des monts Ourals & la grande montagne (*Ouloû-taoû*) qui occupe le milieu de la Tatarie déserte & se perd enfin vers les montagnes de la Perse. Une troisieme chaine, sous le nom de *Khanghai*, va droit à l'orient entre le païs d'Ortoûs ou de Barkôl & la Mongalie, remplit celle-ci de rochers & de hautes montagnes, separe sous le nom changé de *Kinghan* les eaux de l'Amur d'avec celles du Ghôango ou fleuve jaune, & finit enfin par la chaine détournée, qui forme la Corée & par les brisants & les Isles situées vers le Japon.

La quatrieme chaine enfin, & la continuation principale, est celle qu'on connoit proprement sous le nom *d'Altaï* & qui forme la frontiere de la Sibérie depuis l'Irtiche jusqu'au fleuve Amùr. Sa plus grande élevation est située hors de la domination Russe. Elle va d'abord, depuis la haute montagne de Boghdo, passer au-dessus des sources de l'Irtiche & s'avance, par une branche toute remplie de montagnes de neige extremement rapides & rompues, entre l'Irtiche & l'Ob, où les montagnes schisteuses du second ordre, qui l'environnent & qui y sont en quel-

(*h*) Alac-oula selon les Calmoucs, Ala-taoû d'aprés les Tatares, signifie montagne ou chaine bigarrée, nom qui est dû à l'apparence qu'elle présente par ses montagnes entrecoupées de vallées profondes & nombreuses. Les mots de Khanghai & de Kinghan signifient: chaine de montagne par excellence.

quelques endroits percées par des élévations du granite, forment le département des mines le plus important de l'Empire Russe, qui fournit aujourd'hui des richesses immenses en argent aurifere, qui en promet de plus grandes pour l'avenir, & qui sera inépuisable pour les mines de cuivre, quand on voudra les exploiter. D'ici la grande chaine va toucher au lac Télezkoi, ou Altâin-koul, d'où le fleuve Ob prend sa source par le confluent de plusieurs rivieres & torrens. Elle semble ensuite s'éloigner pour embrasser & réunir les grandes rivieres qui composent le Jénisei, toutes enclavées dans ces hautes montagnes, lesquelles y prennent le nom de Säïanes & continuent sans la moindre interruption vers le lac Baïkal. Quoique ce premier rang de montagnes granitiques, dont je viens de raporter la suite & qui forment les limites naturelles de la domination Russe, soit extremement élevé, même au point, que la cime & la croupe de quelques unes donne dans la region des neiges; l'on voit cependant par le cours des rivieres qui composent le Jénisei & le Sélenga, que le plan général du terrein va en haussant au-delà de cette chaine, & il se trouve effectivement au-dessus des sources de ces rivieres, outre l'élévation générale du terrein, une chaine plus haute, parallele à la premiere, qui provient de la réunion d'une branche principale du *Khanghai*, & va en partie se jetter entre les sources du Tchikôi & des fleuves qui forment le systeme de l'Amûr, d'où elle produit, en s'unissant à l'épanchemnnt de la premiere branche, qui environne tout le systeme du lac Baïkal, la derniere continuation de cette puissante chaine, qui parcourt l'extrémité orientale de l'Asie, & dont nous dirons un mot, après avoir considéré l'espace, qui se trouve entre les grandes chaines que nous venons d'exposer & les hautes alpes du Tybet.

Par les rapports de voïageurs, surtout de ceux qui ont souvent accompagné les caravanes Russes destinées pour Pékin, il est hors de doute, que cet immense désert, qui s'étend de Nertchinsk sous le nom de *Gobée* ou de *Cha-mo* n'est véritablement qu'un plateau des plus élevés, auquel nous ne connoissons que la seule plaine de Quito de comparable (*i*). Une grande partie des plaines de la Mongalie entre la chaine Altaïque, & celle que j'ai nommé Khanghaï, de même que les petites plaines ou vallées qui se trouvent au milieu de ces chaines en différents endroits, sont à peu près à la même élévation au-dessus du niveau de la mer & des plaines. Ceux qui font le voïage de Pekin, voyent sensiblement le païs s'élever depuis la frontière de Selenginsk, dont le territoire est déja fort haut, jusqu'à la montagne Khàn-oula; on trouve alors les pentes fort roides de cette montagne à surmonter, & l'on entre enfin, presque sans descendre, dans la vaste plaine de la Gobée, où l'on ne trouve plus qu'un sol uni sans arbres, avec des collines peu sensibles, quelques lacs sales, & très-peu de sources, qui se perdent dans le gravier, jusqu'à ce qu'on descende par des gorges de montagnes, & des pentes fort rapides vers la grande muraille, d'où tout le païs s'incline encore sensiblement jusqu'aux plaines de Pekin. C'est aussi sur de semblables plans élevés, couverts de gravier & de cailloux, parmi lesquels il se trouve de belles pierres colorées, — sur de telles plaines, qui vraisemblablement sont nées

(*i*) L'Afrique doit avoir à son centre des contrées tout aussi élevées, entourées & croisées de montagnes, qui ont dû servir, comme ces plateaux de l'Asie & de l'Amérique, de pépiniere à la création organique. Aussi trouve-t-on une infinité d'especes d'animaux toutes particulieres à l'Afrique, & qui ne sont encore point répandues en Asie par les mêmes climats, & *vice versa*.

nées par la dégradation & l'affaiſſement de la vieille roche, que ſont ſitués les grands lacs Balkhache, Lop, & le Koko-noûr, ainſi qu'une infinité de réſervoirs plus petits, qui concentrent quelques ruiſſeaux des montagnes qui les environnent & empechent la décharge de leurs eaux.

L'étonnante élévation de tous ces déſerts n'eſt pas ſeulement prouvée par la gradation des chaines de montagnes qui entourent tout le milieu de l'Aſie d'où découlent les grands fleuves diſtribués par ce continent, bien-au deſſous desdites plaines, quoiqu'aſſés au-deſſus du niveau des mers, pour déterminer leur long cours par la pente des continents; elle l'eſt encore par les obſervations barométriques des Miſſionaires Jéſuites & d'autres Voïageurs, qui s'y ſont trouvés, ainſi que par le froid qui y regne, même en été, ſous une ſituation ſi heureuſe. D'ailleurs toutes les plus baſſes vallées de montagnes qui forment pour ainſi dire les bords & les gradins de cette immenſe hauteur, démontrent l'élévation de leur poſition, par des arbriſſeaux rabougris & rampants, & par leurs autres productions végétales. Il n'eſt que trop connu, pour que j'aye beſoin de le répéter, que les plantes alpines d'Europe croiſſent en Sibérie dans les plaines & les vallées, ſurtout où l'on approche de la grande chaine. Une circonſtance plus remarquable encore eſt, que ce n'eſt qu'aux environs de la chaine altäique, que commencent les belles plantes & les beaux arbuſtes particuliers à la Sibérie & tant recherchés des connoiſſeurs étrangers. Pluſieurs animaux, ennemis des plaines & par conſéquent moins enclins à ſe répandre, comme le Bufle à queue de cheval, le Tygre, la Zibeline, le Putois roux, le Portemuſc, le Lapreau de roche &c. ſont reſtés dans ce centre montagneux de l'Aſie. — Ce n'eſt point dans ces païs élevés qu'il faut chercher des preuves de l'aſſertion

tion du Philosophe *Bourguet*, renouvellée par Mr. le Comte de *Buffon*, sur les angles correspondans des montagnes; qui d'ailleurs souffre bien des exceptions dans les chaines granitiques, & même souvent dans les montagnes des ordres secondaires.

Voilà donc une grande étendue de païs croisés & herissés de montagnes, qui se trouve infiniment au-dessus des plaines du continent, située sous des paralleles assés variées pour que les productions du nord & du midi y aïent pu trouver, dans les premiers âges du monde, les sites propres pour leur végétation ou pour leur vie. Si l'on suppose (comme il n'y pas lieu d'en douter raisonnablement) que le niveau des mers étoit anciennement assés élevé, pour couvrir les couches horizontales des continents, que nous trouvons aujourd'hui remplies de productions marines: le centre de l'Asie aura donc formé une grande Isle entourée de montagnes & formant autant de grands Caps & de chaines marines, qu'il part de branches montagneuses de son centre. En supposant de plus, qu'au commencement ce plateau n'eut été que de granite tout nud: la décomposition, que cette roche éprouve journellement par les influences météoriques, devoit bientôt produire des amas de gravier (*k*), de roche pourrie & de limon qu'on

(*k*) Il est difficile à croire, qu'aucun sable ait jamais été produit par une précipitation des eaux de la mer, ainsi que quelques modernes, & surtout Mr. le Chevalier *de Linné* l'ont soutenu. Je suis entierement du sentiment des anciens, que tout sable doit son origine à la décomposition des pierres, mais surtout du granite. L'énorme quantité de cette matiere sur notre globe, répond assés à l'universalité probable du granite dans son intérieur; & certainement les couches de sables & de grais profondes & très-anciennes, ne peuvent-être dérivées, que de la décomposition du granite dans les premiers âges. Le granite formant une

qu'on voit dans les alpes être extrêmement fertiles pour la production de toutes sortes de végétaux.

La

---

grande partie du fond de la mer, doit continuellement y subir une décomposition, d'autant plus facile à la faveur des sels qu'elle tient en dissolution, ce qui approfondit naturellement les bassins de l'Océan, en le rendant la source la plus féconde des sables, que les flots amenent vers les côtes, & que les vents distribuent dans les terres. Le P. *Frisi*, qui prend les cailloux roulés, le gravier & le sable pour des ingrédients primordiaux de notre sphere, parceque le froissement de différentes pierres, dans ses expériences, ne lui a jamais donné de produits qui leur ressemblent, n'a pas pensé à cette décomposition naturelle de la plûpart des granites. Chaque ravin ou lit de riviere semé de cailloux roulés devoit pourtant le convaincre de l'action des eaux sur les pierres détachées. Les grands sables méditerranées de la Numidie & de la Tartarie, qu'il allegue en preuves contre l'origine marine du sable, ont jadis été en partie couverts par la mer, ainsi que je l'ai prouvé dans le IIme volume de mes Voïages à l'égard de la bande sablonneuse qui occupe le milieu du désert entre le Volga & le Jaïk. La décomposition des montagnes granitiques & spatheuses de Selenginsk, dont dérivent les sables des environs du Selenga, sont une preuve de la naissance de cette matiere dans les lieux méditerranées, que j'ai exposé dans le même Volume. La chaine granitique de la Sibérie semble même, à cause de la facilité de sa roche à se détruire, avoir beaucoup perdu de sa hauteur, vis-à-vis du Caucase & des alpes d'Europe. Presque toutes les montagnes granitiques de la Sibérie semblent composées de masses pour ainsi dire entassées, arrondies par la défaillance, & qui présenteroient aux peintres & aux poëtes les plus belles scenes des travaux des géants de l'antiquité, entassant des montagnes pour donner assaut aux cieux; & c'est des masses granitiques ainsi détachées qui ont paru merveilleuses à *Bourguet* (p. 245). Mr. le *Comte de Buffon* (hist. nat. II. p. 31 donne l'explication de l'origine de ces masses de roche vive ou de granite, qu'on voit éparses sur les plus hautes montagnes, en les faisant naitre dans les lits de sable, que les eaux ont par la suite entrainé, sans entamer la partie métamorphosée en roc. Comment ce grand Naturaliste, s'il a fait cette observation par lui-même, n'apperçut-il pas, que ces noïaux de roche, qui forment le sommet & les pointes saillantes

La chaine, que nous avons dit s'infinuer entre les origines des fleuves Onon & Ingoda & celles du Tchikoi & qui eſt accompagnée de fort hautes montagnes, continue ſans interruption au nord-eſt, & ſéparant les eaux de l'Amùr, d'avec celles du Lena & du Lac Baïkal; elle jette une branche de montagnes la plûpart ſchiſteuſes le long du fleuve Olecma, qui traverſe le Léna au deſſus de la ville de Jakoutsk & continue entre les deux Toungouska jusqu'au delà du Jéniſei, où elle ſe perd dans les plaines marécageuſes & couvertes de forêts qui occupent tout l'eſpace entre ce fleuve & la chaine Ouralique. Plus loin la chaine principale, très heriſſée de rochers, s'approche des côtes de la mer d'Okhozk, qu'elle cottoïe de fort près, en paſſant ſur les ſources des rivieres Oûth, Aldan & Maïa & finit en ſe diſtribuant par branches, qui ſe rangent entre les fleuves les plus orientaux de la mer glaciale, outre deux branches principales, dont l'une tourne au Sud, parcourt tout le Kamtchatka, en s'uniſſant à la grande chaine

des montagnes, ſont eux-mêmes la ſource du ſable, qu'ils produiſent de leurs ſurfaces, en ſe météoriſant? Il obſerve lui-même, que dans le granite & le grais il ne ſe trouve point de coquilles, quoiqu'il y en ait dans les ſables, dont il croit que ces roches tirent leur origine (vol. I. p. 406). Au lieu de reconnoitre en cela une preuve, que ce n'eſt pas le granite, qui nait du ſable, mais que celui-ci eſt une décompoſition poſtérieure au premier, il ſuppoſe que le ſable ne ſauroit ſe pétrifier qu'autant qu'il eſt pur. Le célebre *Wallerius* (mineral. vol. I. p. 426.) convient que le ſable contient tous les élemens du granite, le Quarz, le Feldſpat, le mica: il obſerve très judicieuſement, que les immenſes maſſes de granite ne sauraient devoir leur origine au ſable. La décompoſition du granite eſt ſûrement avancée par quelque principe ſalin, ſourtout dans celui de Finlande & de Sibérie. La ſalure des eaux & du ſol dans tous les plateaux de l'Aſie ne peut être attribuée qu'à ce principe du granite, qui peut auſſi avoir contribué à la premiere ſalure de mers.

chaine marine des Isles Kouriles vers le Japon, & donne à cette presqu'isle des côtes escarpées à l'est, qui correspondent à une autre chaine marine, formée par les Isles nouvellement découvertes, laquelle se signale, ainsi que la premiere & le Kamtchatka même, par des Volcans très puissants & de fréquents vestiges du feu souterrain, dont on ne voit presque plus de traces dans les montagnes méditerranées de la Sibérie (*l*). L'autre branche principale fournit le grand Cap des Tchoùkches avec ses promontoires & côtes brisées, qui correspondent par les Isles dites de St. Andrien, à une chaine qui se termine à la

 pointe

(*l*) Je parle de ces traces évidentes de Volcans, où l'on distingue les crateres, les laves, les pierres ponces, &c. telles qu'on en découvre en différentes parties de l'Europe. Cela ne m'empêche point de croire que toute la bande schisteuse & métallique de la Sibérie ait senti les effets de Volcans, dont le tems peut avoir détruit les traces évidentes. Les hautes montagnes de *Pouddingues* ou *Bréches*, qui composent une grande partie de la côte septentrionale de ce goufre, que forme aujourd'hui le lac Baykal, — peut-être aussi le terrein des mines d'or aux environs de Cathérinenbourg, indiquent de semblables efforts de la nature, & portent en même tems le caractere de la plus haute antiquité. Peut-être parviendra-t-on à découvrir en d'autres endroits de la Sibérie quelques vestiges plus récents & plus reconnoissables d'anciens Volcans. *Strahlenberg* a parlé de pierres ponces, qui devaient se trouver aux environs du Jénisei; mais les scories des travaux des anciens mineurs lui en ont imposé. J'ai cherché en vain les traces de Volcans le long de cette riviere; surtout aux environs de la montagne, où j'ai découvert cette masse de fer naturellement malléable, intimement mêlé & comme paitri d'une matiere vitreuse, jaune & transparente, laquelle est déposée dans le Cabinet de l'Académie, & dont la production devient problematique 1°. par sa grandeur, qui étoit de plus de 1600 livres; 2°. par la pureté & la ductilité du fer qu'elle contient, son alliage intime avec la matiere vitreuse; & 3°. une écorce, qui est de la nature des mines de fer, & qui semble avoir revêtu toute la masse.

pointe opposée de l'Amérique, & dont la direction, parallele (autant qu'on en est instruit) au gissement de la côte de ce continent, c'est à dire tirant du nord-ouest au sud-est, détruit jusqu'à la vraisemblance des découvertes paradoxes connues sous les noms de *de Fouca* & *de Fonte* (*m*). Il est pourtant certain que malgré cette correspondance des pointes septentrionales, la distance entre les deux continents est un peu plus considérable qu'on ne l'avoit supposée, quoique bien moins de ce que desireroient les partisans de la navigation au nord-est.

J'ai déja dit, que *la bande de montagnes primitives schisteuses* héterogenes, qui par toute la terre accompagne les chaines granitiques, & comprend les roches quarzeuses & talqueuses mixtes, trapézoïdes, serpentines, le schiste corné, les roches spathiques & cornées, les grais purs, le porphyre & le Jaspe, tous rocs félés en couches ou presque perpendiculaires ou du moins très rapidement inclinés (les plus favorables à la filtration des sources) semble aussi bien que le granite, antérieure à la création organisée. Une raison très forte pour appuyer cette supposition, c'est que la plûpart de ces roches, quoique lamelleuses en façon d'ardoise, n'ont jamais produit aux curieux la moindre trace de pétrifications ou empreintes de corps organisés. S'il s'en est trouvé, c'est apparement dans des fentes de ces roches, où ces corps ont été apportés par un déluge & encastrées après dans une matière infiltrée; de même qu'on a trouvé des restes d'Elephans dans le filon de la mine d'argent du Schlangenberg. Les caracte-

(*m*) Pour faire place à ces pretendues découvertes, Mr. *Bunche* fait tourner les chaines de montagnes de l'Amérique d'une maniere contraire à la vraisemblance & dont il y a très peu d'exemples sur toute la surface du globe.

caracteres, par lesquels plusieurs de ces roches semblent avoir souffert des effets d'un feu très violent, les puissantes veines & amas des minéraux les plus riches, qui se trouvent principalement dans la bande qui en est composée, leur position immédiate sur le granite & même le passage, par lequel on voit souvent en grand changer le granite en une des autres espéces; tout cela indique une origine bien plus ancienne & des causes bien differentes de celles, qui ont produit les montagnes secondaires.

On entrevoit de certaines loix, à l'égard de l'arrangement respectif de cet ordre secondaire d'anciennes roches, par tout les systemes de montagnes qui appartiennent à l'Empire Russe. La chaîne Ouralique, par exemple, a du côté de l'orient sur toute sa longueur une très grande abondance de schistes cornés, serpentins & talqueux, riches en filons de cuivre, qui forment le principal accompagnement du granite; & en Jaspes de diverses couleurs, plus extérieurs & souvent comme entrelacés avec les premiers, mais formant des suites de montagnes entiéres & occupant de très grands espaces. De ce même côté il y paroit beaucoup de quarz en grandes roches toutes pures, tant dans la principale chaîne, que dans le noïau des montagnes de Jaspe & jusques dans la plaine. Les marbres spateux & veinés percent en beaucoup d'endroits. La plûpart de ces especes ne paroissent point du tout à la lisiere occidentale de la chaine, qui n'est presque que de roche mélangée, de grais solide, de schistes argilleux, allumineux, phlogistiques &c. Les filons des mines d'or mêlées, les riches mines de cuivre en veines & chambrées, les mines de fer & d'aimant par amas & montagnes entieres, sont l'appanage de la bande schisteuse orientale; tandis que l'occidentale n'a pour elle que des

mines de fer de dépots & ſe montre généralement très pauvre en métaux. Le granite de la chaine qui borde la Sibérie eſt recouvert, du côté que nous connoiſſons, de roches cornées de la nature des pierres à fuſil, quelque fois tendant à la nature d'un grais fin, & de ſchiſtes très métalliferes de différente compoſition. Le Jaſpe n'y eſt qu'en filons, ou plans obliques iſolés, ce qui eſt très rare pour la chaine Ouralique, & s'obſerve dans la plus grande partie de la Sibérie, à l'exception de cette partie de ſa chaine, qui paſſe près de la mer d'Okhotſk, où le Jaſpe forme derechef des ſuites de montagnes, ainſi que nous venons de le dire des monts Ourals; mais comme cette roche tient ici le côté méridional de la chaine Sibérienne & que nous ne lui connoiſſons point ce côté ſur le reſte de ſa longueur, il ſe pourroit, que le Jaſpe y fut tout auſſi abondant. Il faudroit au reſte bien plus de fouilles & d'obſervations pour établir quelque choſe de certain ſur l'ordre reſpectif qu'obſervent ces roches.

Nous pourrons parler plus déciſivement ſur les *montagnes ſecondaires & tertiaires* de l'Empire, & c'eſt de celles-là, de la nature, de l'arrangement & du contenu de leurs couches, des grandes inégalités & de la forme du continent d'Europe & d'Aſie, que l'on peut tirer avec plus de confiance quelques lumieres ſur les changemens arrivés aux terres habitables. Ces deux ordres de montagnes préſentent la chronique de notre globe la plus ancienne, la moins ſujette aux falſifications & en même tems plus liſible que le caractere des chaines primitives; ce ſont les archives de la Nature, antérieures aux lettres & aux traditions les plus reculées, qu'il étoit réſervé à notre ſiecle obſervateur de fouiller, de commenter & de mettre au jour, mais que pluſieurs ſiecles après le notre n'épuiſeront pas.

Dans

Dans toute l'étendue des vastes dominations Russes, aussi bien que dans l'Europe entiere, les observateurs attentifs ont remarqué, que généralement la bande schisteuse des grandes chaines se trouve immédiatement recouverte ou cottée par la *bande calcaire.* Celle-ci forme deux ordres de montagnes, très differentes par la hauteur, la situation de leurs couches & la composition de la pierre calcaire qui les compose, différence, qui est très évidente dans cette bande calcaire qui forme la lisiere occidentale de toute la chaine Ouralique & dont le plan s'étend par tout le plat païs de la Russie. L'on observeroit la même chose à l'orient de la chaine & dans toute l'étendue de la Sibérie, si les couches calcaires horizontales n'y étoient recouvertes par les dépôts postérieurs, de façon qu'il ne paroit à la surface que les parties les plus saillantes de la bande (*n*) & si ce païs n'étoit trop nouvellement cultivé &

(*n*) Ceci donne en même tems l'explication, pourquoi les pétrifications marines sont si rares par toutes les plaines de la Sibérie & ne se trouvent abondamment, que vers les côtes de la Mer glaciale, où les couches horizontales, calcaires & glaiseuses, sont à découvert? — pourquoi l'on ne trouve point de craie en Sibérie, & par quelle raison les pierres à fusil, si communes en Russie & en Europe, y sont d'une rareté extrême? Bien des observations m'ont convaincu, que ces derniers sont un produit de l'argille, qui se trouve prise dans les lits calcaires ou ferrugineux. J'ai entr'autres trouvé des masses de pierre à fusil toutes criblées de canaux, qu'on ne saurait méconnoitre pour être faits par les larves de la Mouche-éphémere. J'ai vu en quelques endroits toutes les gradations d'argille noire durcie jusqu'à la nature de pierre à fusil. J'ai des masses de ces pétrifications, appellées Fongites, très communes chez nous dans les champs semés de ces cailloux & qui sont une espece de Millepore sphérique, dont l'extérieur se trouve parfaitement agatisé, tandis que tout l'intérieur est friable & calcaire. Ces Fongites agatisés peuvent se tailler en plaques à points transparents ou même criblés de petits pores. Quelques pierres à fusil d'Europe, qui se détruisent à l'air & acquierent un enduit

& trop peu exploité par des fouilles & autres opérations, que des hommes induſtrieux ont pratiquées dans les païs anciennement habités. Ce que je vais expoſer ſur les deux ordres de montagnes calcaires ſe rapportera donc principalemant à celles qui ſont à l'occident de la chaine oûralique.

Ce côté de la dite chaine conſiſte ſur cinquante à cent Verſtes de largeur, de roche calcaire ſolide, d'un grain uni, qui tantôt ne contient aucune trace de productions marines, tantót n'en conſerve que des empreintes auſſi legeres qu'éparſes. Cette roche s'élève en montagnes d'une hauteur très conſidérable, irrégulieres, rapides & coupées de vallons eſcarpés. Ces couches, généralement épaiſſes, ne ſont point de niveau, mais très inclinées à l'horizon, paralleles pour la plûpart à la direction de la chaine, qui eſt auſſi ordinairement celle de la bande ſchiſteuſe; — au lieu que du côté de l'orient les couches calcaires ſont très ſouvent au ſens de la chaine en direction plus ou moins approchante de l'angle droit. L'on trouve dans ces hautes montagnes calcaires de fréquentes grottes & cavernes très remarquables, tant par leur grandeur, que par les belles congélations & cryſtalliſations ſtalactiques dont elles s'ornent. Quelques unes de ces grottes ne peuvent être attribuées qu'à quelque bouleverſement des couches; d'autres ſemblent devoir leur origine à l'écoulement de ſources ſouterraines qui ont amolli, rongé & charrié une partie des couches qui en étoit ſuſceptible.

En

---

crétacé, dérivent probablement d'une argille calcaire. On n'en trouve en Ruſſie de ſemblables, que dans les montagnes cretaſſées de la Ruſſie méridionale.

En s'éloignant de la chaine, on voit les couches calcaires s'applanir affés rapidement, prendre une pofition horizontale & devenir abondantes en toutes fortes de coquillages, de madrépores & d'autres dépouilles marines. Telles on les voit partout dans les vallées les plus baffes qui fe trouvent aux pieds des montagnes (comme aux environs de la riviere Oufa); comme telles occupent-elles auffi toute l'étendue de la grande Ruffie, tant en collines, qu'en plat-pais: folides tantôt & feulement femées de productions marines, tantôt toutes compofées de coquilles & madrépores brifées, & de ce gravier calcaire, qui fe trouve toujours fur les parages où la mer abonde en pareilles productions; tantôt enfin diffoutes en craie & en marnes & fouvent entremêlées de couches de gravier & de cailloux roulés.

Auffitôt que des marais de l'Ingrie, qui forme vers la Baltique une efpece de golfe en baffes terres, l'on commence à monter vers le terrein élevé de la Ruffie, dont la pente fait ce qu'on appelle communement montagnes de Valdai, l'on ne ceffe de rencontrer à chaque pas les anciennes traces de la mer; d'abord dans un terrein coupé de ravines, qui a vifiblement fouffert d'une inondation de la plus grande violence ou plutôt par l'écoulement d'une énorme maffe d'eau; puis dans les couches calcaires entieres, qui ne peuvent être dues qu'au dépôt d'une mer tranquille, & que les traces des rivieres ont mis à découvert. Ce font en premier lieu des couches de terres de dépôts, femées de blocs de granite détachés de leur roche originaire; ce font des bancs immenfes de cailloux roulés & de gravier, mêlés de fragmens de pierre calcaire, de pétrifications brifées ou changées en pierres à fufil, d'offements même. Un femblable bouleverfement

des couches originaires, & ſurtout des bancs calcaires, a été obſervé jusqu'aux environs du lac Onega où commencent à s'élever les montagnes continuées aux Alpes Lapones & Suédoiſes. On l'obſerve dans toutes les terres voiſines du golfe de Finlande, où pour la plûpart les couches moins ſolides ſont emportées de deſſus la vielle roche, trop ſolide elle-même pour être entamée; il ſuffit de jetter un coup d'oeil entendu ſur la Carte, pour voir dans ce nombre de grands lacs entre ce golfe & la mer blanche, dans les isles, les écueils & les côtes briſées de ces parages, l'effet d'un deluge qui s'eſt écoulé par là. La concluſion de ce mémoire fera entrevoir, que la Baltique & la Mer blanche, ces grandes brèches du continent, pourroient elles-mêmes être regardées comme excavées par cette même violence.

Plus avant dans les terres, où les couches calcaires n'ont point été dérangées, l'obſervateur trouve partout la conviction la plus complete que ces couches, tantôt peu profondes, tantôt accumulées en bancs qui forment des collines iſolées ou coherentes par petites chaines, auſſi bien que la *couche glaiſeuſe*, qui ſe trouve généralement au deſſous du plan calcaire & tout auſſi abondante en productions marines, ont formé l'une & l'autre dans les premiers âges du globe le fond d'une mer profonde, qui ne ſauroit avoir produit ces dépots, originairement marins & ſans aucun mélange de reſtes d'animaux terreſtres, que pendant une longue ſuite de ſiecles. C'eſt ſurtout la couche *glaiſeuſe*, dont la profondeur chés nous n'eſt pas explorée & qui me ſemble continuée à une partie de la bande ſchiſteuſe des hautes chaines, qui doit avoir couté bien des ſiecles à la nature & qui prouve par ſes pétrifications que la mer doit l'avoir couvert à une très grande

grande profondeur (*o*). Ce même lit glaiſeux eſt le dépôt le plus général & le plus riche des pyrites, qui doivent par la décompoſition putréfactive d'une immenſe quantité d'animaux marins, de poiſſons, de zoophytes & de varecs, qui en contiennent les principes, s'engendrer dans tous les goufres de l'Océan, puisqu'on en trouve des coquilles incruſtées & cimentées, & des maſſes, dont la configuration ne peut être attribuée qu'au mouvement des ondes. L'abondance de ces Pyrites dans certaines glaiſes noires & ardoiſées eſt ſi prodigieuſe, qu'on les voit par fois ſurpaſſer en maſſe la glaiſe qui les contient. Mais cette abondance d'un minerai inflammable par l'humidité, jointe aux puiſſantes couches de ſchiſtes bitumineux & charboneux qui ſe trouvent ordinairement ſtratifiés dans le meme lit d'argille, ne laiſſe aucun doute ſur la dérivation

(*o*) Il eſt très-probable que les Ammones & les Bélemnites, dont nous ne connoiſſons pas encore les originaux, ne nous ſont reſtés inconnus qu'à cauſe qu'elles ne ſauroient vivre qu'à de grandes profondeurs. Leur abondance dans les lits de glaiſe, inférieurs au couches calcaires, en font une preuve indirecte. On a ſouvent agité la queſtion, pourquoi les pétrifications qu'on trouve dans les montagnes calcaires de l'Europe ſont pour la plûpart originaires des mers des Indes? Cette ſuppoſition elle-même paroit fauſſe Les productions que l'on croit particulieres aux mers éloignées ſont pour la plûpart les mêmes dans les mers du Nord, mais n'y viennent partout que dans les abymes, parceque leur exiſtence ſemble demander la preſſion d'une grande maſſe d'eau. Telles ſont entr'autres les Anomies (dites auſſi Poules & Becs de perroquets,) les Palmiers de mer ou Encrines. La Méditerranée d'ailleurs produit dans ſes abymes la plûpart des productions entaſſées dans nos couches calcaires. La raiſon, pourquoi la Mer du nord nous en fournit ſi peu, pourroit être ſon atterriſſement par le déluge dont nous parlerons après & dont le peu de profondeur de ces mers à de grandes diſtances de terre eſt la ſuite, qui les rend en même tems ſi peu fertiles en coraux, leſquels demandent un fond de roche à des profondeurs conſidérables, & par cette raiſon ne manquent pas à la mer de Norvege.

vation des incendies volcaniques, ſurtout celles qui arrivent dans le baſſin des mers, de ce même lit: théorie trop bien appuiée par les meilleures obſervations de differents païs, pour la mettre au rang des hypotheſes.

De la conſidération de ces couches, calcaire & argilleuſe, il ſuit, que toutes les terres qui devoient être un jour la patrie d'une puiſſante nation, la pépiniere de héros, le dernier aſile des ſciences & des arts, le champ pour opérer des prodiges au génie vaſte & créateur de PIERRE LE GRAND & à L'AUGUSTE *CATHE'RINE* SECONDE pour devenir ſon illuſtre émule en rendant heureux des millions de ſujets & en ſe faiſant admirer des peuples de la terre, — que toutes ces plaines de la grande Ruſſie étoient jadis — fond de l'Océan. — J'ai de plus avancé, à l'égard des chaines granitiques & des plateaux formés par la vieille roche, que la mer, dont on n'y voit aucune trace, ne peut jamais les avoir ſurmontés, comme Mr. le Comte *de Buffon* le penſe. Mais ces plateaux & ces hautes chaines ont toujours été isles & continens, bien moins étendus que ceux d'aujourd'hui, mais habitables aux animaux & végétaux terreſtres. Reſte à trouver les cauſes qui ont fait baiſſer le niveau des mers au point de découvrir cette grande étendue de terre, qui forme aujourd'hui les plaines des continens; qui ont mis à ſec ces bancs énormes de coquilles marines, & qui en ont pu elever une partie en hautes montagnes, dont l'élévation eſt trop prodigieuſe, pour admettre qu'elles aient été formées telles ſous les ondes d'une mer primitive. Je crois qu'il faut combiner les effets ſucceſſifs de volcans & d'autres forces ſouterraines, avec ceux d'un déluge, ou de pluſieurs de ces débordemens de l'Océan, pour donner des raiſons probables des changemens arrivés indubitable-

tablement ſur notre terre. Il faut réunir pluſieurs hypotheſes modernes, mais non pas s'attacher à une ſeule cauſe, comme ont fait presque tous les auteurs des differentes théories du globe.

Mais avant de donner l'idée d'une telle hypotheſe composée, qui ſemble conduire à l'explication de tout ce qu'on obſerve de plus étonnant dans l'etat actuel de la terre, je dois parler d'un ordre de montagnes très certainement poſtérieur aux couches marines, puisque celles-ci généralement lui ſervent de baſe. On n'a point jusqu'ici obſervé une ſuite de ces *montagnes tertiaires*, effet des cataſtrophes les plus modernes de notre globe, ſi marquée & puiſſante, que celle qui accompagne la chaine Ouralique au côté occidental ſur toute ſa longueur. Cette ſuite de montagnes, pour la plûpart composées de grais & de marnes rougeatres, entremélées de couches diverſement mixtes, forme une chaine par tout ſéparée, par une vallée plus ou moins large, de la bande de roche calcaire dont nous avons parlé. Sillonnée & entrecoupée de fréquens vallons, elle s'éléve ſouvent à plus de cent toiſes perpendiculaires, ſe répand vers les plaines de la Ruſſie en trainées de collines, qui ſéparent les rivieres, en accompagnant généralement la rive boréale ou occidentale & dégénere enfin en déſerts ſableux, qui occupent de grands eſpaces & s'etendent ſurtout par longues bandes paralleles aux principales traces que ſuivent les cours des rivieres. La principale force de ces montagnes tertiaires eſt plus près de la chaine primitive par tout le gouvernement d'Orenbourg & la Permie, où elle conſiſte principalement en grais & contient un fond inépuiſable de mines de cuivre ſableuſes, marneuſes & d'autres qui ſe voient ordinairement dans des couches horizontales. Plus

 loin

loin vers la plaine font des fuites de collines toutes marneufes, qui abondent autant en pierres gypfeufes, que les autres en minerais cuivreux. Je n'entre pas dans le détail de celles ci, qui indiquent furtout les fources falines: mais je dois dire des premiéres, qui abondent le plus & dont les plus hautes élévations des plaines, même celle de Mofcou, font formées, qu'elles contiennent très peu de traces de productions marines & jamais des amas entiers de ces corps, tels qu'une mer repofée pendant des fiecles de fuite a pu les accumuler dans les bancs calcaires. Rien au contraire de plus abondant dans ces montagnes de graís ftratifié fur l'ancien plan calcaire, que des troncs d'arbres entiers & des fragmens de bois petrifié, fouvent mineralifé par le cuivre ou le fer; des impreffions de troncs de palmiers, de tiges de plantes, de rofeaux & de quelques fruits étrangers; enfin des offemens d'animaux terreftres, fi rares dans les couches calcaires. Les bois pétrifiés fe trouvent jufques dans les collines de fable de la plaine; l'on en tire entr'autres des hauteurs fabloneufes aux environs de Sysran fur le Volga, changés en queux très fin, qui a confervé jusqu'à la texture organique du bois, & remarquables furtout par les traces très évidentes de ces vers rongeurs, qui attaquent les pilotis & autres bois plongés dans la mer & qui font proprement originaires de la mer des Indes.

Dans ces mêmes dépôts fableux & fouvent limoneux, giffent les reftes des grands animaux de l'Inde: ces offemens d'Eléphans, de Rhinoceros, de Bufles monftrueux, dont on déterre tous les jours un fi grand nombre & qui font l'admiration des curieux. En Siberie où l'on a découvert le long de presque toutes les rivieres ces reftes d'animaux étrangers & l'yvoire même bien confervé en fi grande

grande abondance qu'il forme un article de commerce, en Sibérie, dis je, c'eſt auſſi la couche la plus moderne de limon ſabloneux qui leur ſert de ſepulture; & nulle part ces monumens étrangers ne ſont ſi fréquens qu'aux endroits où la grande chaine, qui domine ſur toute la frontiere méridionale de la Sibérie, offre quelque dépreſſion, quelque ouverture conſidérable.

Ces grands oſſemens, tantôt épars, tantôt entaſſés par ſquelettes & même par hécatombes, conſiderés dans leurs ſites naturels, m'ont ſurtout convaincu de la réalité d'un deluge arrivé ſur notre terre, d'une cataſtrophe, dont j'avoue n'avoir pu concevoir la vraiſemblance avant d'avoir parcourru ces places & vu par moi-même tout ce qui peut y ſervir de preuve à cet événement mémorable (*p*). Une infinité de ces oſſemens couchés dans de lits mêlés de petites Tellines calcinées, d'os de poiſſons, de gloſſopetres, de bois chargés d'ocre, &c. prouve déja, qu'ils ont été tranſportés par des inondations. Mais la carcaſſe d'un Rhinoceros, trouvé avec ſa peau entiere, des reſtes de tendons, de ligamens & de cartilages dans les terres glacées des bords du Viloüi, dont j'ai dépoſé les parties les mieux conſervées au Cabinet de l'Académie, forme encore une preuve convainquante, que ce devait être un mouvement d'inondation des plus violens & des plus rapides, qui entraina jadis ces cadavres vers nos climats glacés, avant que la corruption eût le tems d'en détruire les parties molles. Il feroit à ſouhaiter qu'un obſervateur parvînt aux montagnes, qui occupent l'eſpace entre les fleuves Indighirka & Kovyma où, ſelon le raport des chaſſeurs,

(*p*) Voyez le Mémoire imprimé dans le XVIII. Volume des Nouveaux Commentaires de l'Académie Impériale de Pétersbourg.

chaſſeurs, de ſemblables carcaſſes d'Eléphans & d'autres animaux gigantesques, encore revêtues de leurs peaux, ont été remarquées à plusieurs repriſes.

Après cet apperçu des remarques faites en Ruſſie, qui paroiſſent les plus importantes pour avancer l'hiſtoire naturelle de notre globe, qu'il me ſoit permis d'ajouter une eſquiſſe fugitive d'hypotheſe telle, que j'imagine pouvoir ſervir à expliquer l'état préſent de la ſurface des terres.

En ſuppoſant donc, que les hautes chaines granitiques formaſſent de tout tems des Isles à la ſurface des eaux, & que la décompoſition du granite produiſit les premiers amas de ſable quarzeux & ſpathique & de limon micacé, dont les grais & les ſchiſtes des anciennes chaines ſont formés; la mer alors devoit amener les matieres légeres phlogiſtiques & ferrugineuſes, produites de la diſſolution de tant d'animaux & de végétaux dont elle eſt peuplée, & les reſtes de ces corps mêmes vers les côtes des terres, y former, en infiltrant ces principes dans les couches qui ſe formoient ſur le granite, des amas de pyrites, foiers des premieres Volcans, qu'on vit enfin éclater ſucceſſivement en différentes parties du globe. Ces anciens Volcans, dont des ſiecles peut-être ſans nombre ont detruit jusqu'aux traces, bouleverſerent les couches deja ſolidées par le tems, ſous lesquelles ſe firent leurs exploſions, changerent différemment en fuſant ou calcinant, par la violence active des feux, les matieres de ces couches, & produiſirent les premieres montagnes de la bande ſchiſteuſe qui répond en partie aux lits d'argille & de ſable des plaines: ainſi que ces montagnes calcaires,

dont

dont la roche eſt ſolide & pour la plûpart ſans traces de petrifications. C'eſt en partie dès lors que ces cavernes, ces fentes, ces felures en differentes directions, furent produites dans les couches, remplies dans les âges conſecutifs par l'infiltration de quartz, de ſpaths, de minerais, de matieres phlogiſtiques &c. que nous exploitons aujourd'hui ſous les noms d'amas & de filons ou veines. Ces opérations des volcans ont continué en differens endroits, ſur-tout dans le voiſinage & au fond des mers, jusqu'à nos jours. C'eſt par elles qu'on a vu de nouvelles Isles naitre du profond de l'océan; c'eſt elles qui probablement ſouleverent toutes ces énormes alpes calcaires de l'Europe, jadis roches de coraux & bancs de coquilles, comme il s'en trouve encore de nos jours dans les mers qui favoriſent ces productions, & où le fond de vaſe argilleux doit toujours abonder en pyrites. Par ces amas calcaires & le precipité argilleux, qui méchaniquement ſe filtra plus bas, le fond de la mer augmentoit toujours; les couches calcaires s'amonceloient à differentes hauteurs, differens pour les eſpeces qui devoient les compoſer, ſelon les lieux plus favorables à la production de l'une ou l'autre eſpece de ces êtres vivans, ou ſelon la direction des courans, qui entrainaient & tranſportaient certaines eſpeces vers de certains parages, ainſi que nous l'obſervons ſur toutes les côtes. Les flots ramenoient toujours les matieres legeres & menuës vers les terres. D'un autre côté les terres produites ſur les montagnes, tant de la décompoſition du granite & d'autres pierres, que par la deſtruction des animaux & des plantes, avec les debris des roches entrainés par les torrens, augmentoient les côtes & reculoient par petits degrés les bornes de la mer, que ſouvent quelque volcan forçoit encore à ſe retirer en ſoulevant les bas-fonds des côtes. Mais cette

diminution des mers, jointe à la consommation probable des eaux, n'auroit pu suffire pendant des millions d'années, pour mettre à sec toutes les couches marines horizontales, que nous admirons dans nos collines remplies de pétrifications bien loin des mers, & pour donner toute cette étendue à nos continens. Il dut arriver, après qu'une bonne étendue de païs, au pied des anciennes chaines, fut déja bien peuplée d'animaux, bien couverte de forets, des convulsions du globe qui purent, par des éruptions gigantesques au plus profond des mers, soulever & chasser les flots jusqu'à inonder violemment une grande partie des terres déja habitées, des montagnes même assés élevées, & augmenter les continens par le dépôt de matieres qui se trouvoient mélées à ces flots bouillonnans; en ouvrant peut-être en même tems dans l'intérieur du globe des cavernes immenses, qui purent engloutir une partie de l'Océan (q) & en abaisser le niveau au point, à peu près, où il s'est trouvé depuis les siecles de l'histoire des hommes.

Cette idée, qui n'est point nouvelle, a paru à quelques auteurs choquer la vraisemblance, par aucune autre raison que parce qu'on la joignoit à la fausse supposition, que la mer dut au commencement couvrir jusqu'aux plus hautes montagnes, ce que j'ai prouvé être incompatible avec l'état actuel des élévations primitives. Une masse d'eau requise pour égaler ou surpasser ces hauteurs sur toute la surface du globe, ne trouveroit sans doute assés d'espace dans l'intérieur de cette sphere, même en la supposant toute creusée de cavernes. Selon moi la mer ne dut jamais couvrir que les collines calcaires des plaines, dont

(q) Voy. *l'Hist. de l'Acad. de Paris*, *1716. p, 14.* suiv. *Buffon hist. nat. I. Vol. p. 365.* suiv.

dont la plus haute ne sauroit être évaluée beaucoup au delà de 200 toises perpendiculaires au dessus du niveau actuel des mers. Toutes les alpes calcaires, qui excedent cette hauteur, sont certainement élevées par l'action d'éruptions souterraines.

De plus la mer étant encore si haute sur notre planete, il ne sera pas plus contre la vraisemblance de la supposer alors grossie par d'énormes éruptions sousmarines & par d'autres causes naturelles peut-etre, qui pouvoient accompagner ces éruptions (comme des ouragans p. ex. & l'effet combiné des marées) grossie, dis-je, au point de rouler ses flots par dessus les hautes terres alors habitées, qui par leur opposition pouvoient encore augmenter la violence d'une mer close entr'eux & la puissance qui la soulevoit. Ne voit-on pas la marée, dont la hauteur moïenne ne surpasse pas les quinze pieds, par le rétrécissement des détroits, l'opposition des continens & d'autres causes s'élever avec violence jusqu'à cinquante, cent & même deux cent pieds? — Ou, pour conclure du petit au grand, n'a-t-on pas vu à différentes reprises les eaux de notre Néva, par des vents d'une certaine direction, grossies en peu d'heures de plus de deux & trois aunes, inonder la ville de Pétersbourg & produire des dégats très-grands, pour une cause si chétive en comparaison de la violence des flots de la mer? N'a-t-on pas aussi les exemples récents de terribles inondations de la mer, causées par les tremblemens de terre au Pérou & à nos parages du Kamtchatka?

Mr. *de Jussieu* a judicieusement conclu, sur les fougeres & les autres plantes indiennes, qui se trouvent empreintes dans les ardoises d'Europe, que l'inondation, qui

les coucha dans ces lits, devoit venir du Sud ou de l'océan des Indes. La même direction est prouvée par les restes d'animaux terrestres, qui ne vivent qu'entre les tropiques, entassés jusques dans nos terres arctiques. S'il existe donc dans l'océan indien des indices de brasiers souterrains, de causes assés puissantes pour produire une telle catastrophe; si les traces du déluge effectué par ces causes s'accordent avec la direction centrifuge des mers chassées de ce foïer, alors ce point de notre hypothese en acquerra une nouvelle force. Mais quoi de plus connu que les volcans dont tous les archipels de l'Inde, depuis l'Afrique jusqu'au Iapon & aux terres australes, sont remplis ou conservent les vestiges? Ceux, qui subsistent encore dans ces parages, sont même les plus puissans & les plus furieux de l'Univers. La plûpart des Physiciens, qui ont traité de la Géographie physique de la terre, s'accordent à considérer toutes ces isles, comme élevées sur les voutes immenses d'une fournaise commune. La premiere éruption de ces feux, qui y soulevèrent le fond d'une mer très-profonde & qui peut-être d'un seul éclat, ou par des secousses qui se succéderent de près, fit naitre les Isles de la Sonde, les Molucques & une partie des Philippines & des terres australes, devoit chasser de toutes parts une masse d'eaux qui surpasse l'imagination; laquelle heurtant contre la barriere que les chaines continues de l'Asie & de l'Europe lui opposoient au Nord, & poussée par les nouvelles ondées qui succédoient, dut causer des bouleversemens & des breches énormes dans les terres basses de ces continens, entrainer les bancs formés au devant d'eux & les couches supérieures des premieres terres, & en surmontant les parties moins élevées de la chaine, qui forme le milieu du continent, charrier & déposer sur les pentes opposées ces dépouilles mêlées aux

matieres

matieres dont l'éruption avoit déja chargé les eaux de la mer, y ensevelir sans ordre les debris d'arbres & de grands animaux, qui furent enveloppés dans la ruine, & former par ces depots successifs les montagnes tertiaires, dont nous avons parlé & les atterrissemens de la Sibérie; former enfin, en s'écoulant du côté du pole, avec toute la masse des eaux qui couvroient encore les plaines & que la diminution du niveau général, par les goufres alors ouverts, devoit entrainer, les inégalités, les vallées, les traces des fleuves, les lacs & les grands golfes de la mer septentrionale, dérangeant chemin-faisant les couches plus anciennes, & entrainant encore assés de matieres hétérogènes, pour combler une partie des profondeurs de la mer du nord & causer les bas-fonds de ses côtes.

En considérant les grands golfes de la mer, qui baigne l'Asie au midi, comme les traces faites en abordant, par les flots de l'Océan, l'on en rendra une raison bien plus plausible, que si l'on vouloit avec Mr. le Comte de *Buffon* (T. II. p. 114. suiv.) attribuer quelques unes de ces breches aux effets imperceptibles d'un mouvement constant des mers de l'orient en occident. L'on aura en même tems l'explication des autres irruptions de la mer, qui tracent la direction de notre déluge, partant de ce foier commun, que nous venons de placer dans les mers de l'Inde, — telles que la mer d'Okhotsk & de Pengina, le golfe de Perse, la Mer rouge, la Méditerranée avec l'Adriatique & la Mer noire, la Mer caspienne, la Baltique, avec le golfe de Bothnie, & la Mer blanche, qui sont des plus considerables de l'univers, & ne sauroient être attribuees à ce seul mouvement de l'Océan, qui n'a pu agir en tant de sens & en sens contraires. L'on voit aussi une raison probable des grands promontoires meri-

dionaux des continens, & pourquoi le terrein de la pente de l'Aſie au midi de ſa plus grande élévation & celui de l'Amerique à l'orient des Andes, eſt infiniment moindre, que des côtés oppoſés; les flots du déluge aïant rongé ces continens à leur abord & tranſporté les terres, pour en augmenter les plaines au delà des monts. Et par quel miracle l'Afrique, qui n'a aucun golfe à ſa côte orientale, ſeroit-elle ſans cela reſtée exempte de cet effet deſtructeur de l'Océan, ſi par ſon mouvement presqu'inſenſible il put l'être autant que Mr. le Comte de *Buffon* ſe l'imagine? comment l'Afrique n'en ſouffroit-elle pas? expoſée, comme elle l'eſt, toute entiere dans la Zone torride où la force du courant univerſel eſt la plus grande. Les parages, qui ſemblent à cet Auteur célebre des débris de continens envahis par la mer, (même en Amérique) pourront être à plus forte raiſon appellés des terres naiſſantes par le feu qui brûle au fond de ces mers, & qui peut-être communique par toutes les chaines marines de la grande Mer des Indes.

Ce ſeroit donc là ce *Déluge*, dont presque tous les anciens peuples de l'Aſie, les Caldéens, les Perſes, les Indiens, les Tybétains & les Chinois, ont conſervé la mémoire & fixent (quoiqu'avec des différences aſſez conſidérables) l'époque environ au tems du déluge moſaïque. L'Europe & les baſſes terres de l'Aſie ont depuis ſouffert de conſidérables changemens par d'autres inondations, tantôt dus à de ſemblables éruptions ſous-marines, tantôt à l'effuſion ſoudaine de grandes mers méditerranées, comme peut-être de celle, qui conſerve aujourd'hui ce nom, & du Pont-Euxin (*r*), qui laiſſoient

(*r*) L'idée de l'infatigable *Tournefort* & de Mr. le Comte de *Buffon* ſur l'ancien état de la Mer noire & ſa communication avec la mer Caſpienne, ſe trouve de plus en plus confirmée par les ob-

laiſſoient en même tems de grandes plaines limoneuſes à ſec; tantôt enfin à des irruptions de la mer & à la ſubmerſion des baſſes terres qui en étoient ſéparées par des digues naturelles. Pour ne rien dire des petits volcans partiaux & peu profonds, des effets produits par les torrens & les tremblemens de terre, l'atterriſſement cauſé par les vents, les eaux, & la végétation &c. qui me conduiroient trop loin & me feroient abuſer de la patience de cette Illuſtre Aſſemblée, d'autant plus, qu'on en trouve des détails ſuffiſans dans pluſieurs ouvrages connus.

Je

ſervations des voïageurs. Les phoques, quelques poiſſons & coquilles marines, que la mer Caſpienne a de commun avec la mer noire, rendent cette communication ancienne preſqu'indubitable & ces mêmes circonſtances prouvent auſſi que le lac Aral devoit jadis être joint à la mer Caſpienne. J'ai tracé (dans le *troiſieme volume* de mes *Voïages*) l'ancienne étendue de cette mer ſur tout le déſert d'Aſtrakhan & au delà du Jaïk, par cette apparence de côtes dont les hautes plaines de la Ruſſie bordent ce déſert, par l'état & les productions foſſiles de cette ancienne côte, & le limon ſalé, mêlé de coquilles marines calcinées, qui couvre toute la ſurface du déſert même. L'on trouve dans la *Deſcription de l'Ukranie de Guillaume le Vaſſeur Sr. de Beauplan* (à Rouen 1660. 4.) p. 9. un paſſage qui donne les mêmes apparences aux plaines du Boryſthene. Un Voïageur moderne (*Rich. Chandler travels in Aſia minor*) penſe que la mer s'étendoit autrefois juſqu'aux ſources du Méandre & formoit un golfe entre les montagnes de Meſſoghis & de Taurus. D'autres ont trouvé les traces récentes de la Mer dans les plaines de l'Aſie mineure & de la Perſe, & ſur le Danube bien loin des bornes actuelles des Mers noire & caſpienne. Les anciennes traditions ſur l'effuſion ſoudaine de la Mer noire par la Propontide, que *Tournefort* a ſoutenu par ſes obſervations, ſemblent à tous égards plus plauſibles, que l'opinion qui ſuppoſe que l'ancien détroit entre la Mer noire ait été deſſéché par l'accumulation du limon des fleuves.

Je ne prétends point après tout donner mes idées qui ne ſont qu'un compoſé de ce que pluſieurs grands hommes ont opiné ſur cette matiere, pour exemptes de toute difficulté. Mais j'oſe avancer, que la variete des moiens, emploïés par la Nature en formant & dérangeant les montagnes & changeant la ſurface des terres, eſt trop évidente pour pouvoir en rendre raiſon par aucune hypotheſe qui s'attache à un ſeul ou un petit nombre de ces moïens. En admettant au contraire tous ceux, dont nous voions ſur notre globe les traces indubitables, les cataſtrophes dont l'hiſtoire des hommes & le grand code de la Nature nous a conſervé des monumens, on doit s'approcher le plus de la probabilité : le ſeul point de perfection à déſirer en fait d'hypotheſes, qui ne peuvent jamais être miſes en démonſtration. Il me ſemble ſur tout qu'aucune cauſe plus naturelle, que celle que je viens d'admettre, ne pourroit être imaginée pour rendre raiſon du déluge univerſel, & de pluſieurs inondations moins générales, conſtatées par les traditions des peuples. Mais cette ſuppoſition peut ne point flatter la tranquillité luxurieuſe des nations qui habitent les plaines fertiles, puisque les petits effets de volcans ſous marins dans certains parages, dont les ſiecles de l'hiſtoire conſervent tant d'exemples, & dont le nôtre a vu les triſtes ſuites, ne ſauroient que faire craindre quelque jour des cataſtrophes plus terribles & fatales à des hémiſpheres entiers. Heureux alors ces montagnards que le ſort ſemble avoir maltraite en les plaçant entre les rochers des Alpes. Ils ſeront la nouvelle pépiniere du genre humain & conquérans ſans carnage, les plaines balayées par les flots deviendront leur domaine.

MECHA-

MÉCHANIQUE.

Description du Modele d'un Moulin à ſcier préſenté à l'Académie par Mr. *Richner*.

Le méchaniſme de ce moulin à bras, inventé pour la commodité des endroits, où il n'y a point d'eau vive, eſt aſſés différent de celui des moulins à eau, dont on ſe ſert ordinairement pour ſcier de grandes pieces de bois: & comme cette machine eſt recommandable par ſa ſimplicité & par l'utilité qu'on en pourroit tirer en pluſieurs occaſions, il ne ſera pas mal à propos d'en décrire en peu de mots les parties les plus eſſentielles, & celles ſurtout où elle s'ecarte de la ſtructure ordinaire des moulins à eau. Planche V.

Derriere les couliſſes A B, entre lesquelles gliſſe le Chaſſis qui porte la Scie, il y a des deux côtés deux poutres CD dreſſées verticalement & fermement liées avec les couliſſes du Chariot E F & l'aſſemblage du fond de toute la machine. Ces poutres ſoutiennent dans des enfourchemens arrondis *a*, une piece de bois *b* transverſale quarrée & entrecoupée dans les endroits où elle entre dans les enfourchemens par des tourillons cylindriques, pour y jouer librement, lorsqu'elle eſt miſe en mouvement par le moyen de deux ailes L M attachées aux deux bouts de la piece *b*, dont la face *c d* fait un quart de tour, dès que ces ailes ou leviers ſont remués par les moteurs. Ce mouvement ſe communique au bras *c e* & fait monter & deſcendre alternativement une chaſſe ou piece de

 bois

bois *f*, qui tient à ce bras & à l'entretoiſe ſupérieure de la ſcie par des boulons qui traverſent les enfourchemens *g g*, & qui fait monter & deſcendre pareillement la ſcie *h*.

Deux autres pieces de bois PQ fermement liées aux deux couliſſes de la ſcie A B & aux deux poutres verticales C D ſervent de pieces d'appui à une autre piece de bois transverſale & quarrée *k*, dont les tourillons jouent librement dans les cavités *n*. Cette piece étant miſe en mouvement par l'action de la ſcie au moyen du levier *p q*, fait avancer & reculer le bras *r*. A ce bras tient par un boulon qui traverſe ſon enfourchement la hampe ou le manche de bois *s t* garni d'un fer épatté à pied de biche, pour entrer dans les dents de la crémaillere K K, qui tourne par le choc ſucceſſif & régulier de la hampe. L'axe de la crémaillere fait tourner de même deux lanternes, dont les fuſeaux, comme dans les moulins à eau ordinaires, engrenent dans les dents *z*, qui bordent le deſſous des brancards du chariot G H, enchaſſés entre ſes couliſſes E F & font avancer peu à peu tant le chariot que la piece de bois à ſcier à chaque mouvement de la ſcie.

Il n'eſt pas douteux que cette machine utile, qui a encore le grand avantage de pouvoir être tranſportée dans les forêts à tel endroit qu'on voudra pour ſcier avec facilité les plus grands arbres ſur le lieu, ne ſoit en effet une invention de M. *Richner*: mais il eſt auſſi certain, qu'il n'eſt pas le premier qui en ait eu l'idée. Un Méchanicien de Commercy en Lorraine, nommé *Lombart* doit avoir inventé & executé en grand, il y a quelques années, une ſcie pareille, moyennant laquelle il a effectivement ſcié à peu de fraix les plus grands arbres en planches, ſur le lieu même où ils avoient été abattus.

Echelle

Echelle à feu présentée à l'Académie par le Sr. *Dahlgréen*, Maître Forgeron établi à St. Pétersbourg.

Tout ce qui promet un prompt & infaillible secours dans des malheurs aussi ravageans que le sont les incendies, intéresse trop l'humanité pour ne pas mériter une attention particuliere de l'Académie. Telle lui a paru l'invention d'une échelle de nouvelle construction, dont le Sr. *Dahlgréen*, Suédois de nation, lui a présenté un modele, & qui ensuite a été executée en grand à la satisfaction de l'inventeur.

Nous nous empressons par conséquent de faire part au Public de cette nouvelle machine, qui joint encore à l'usage avantageux qu'on en peut faire dans les incendies, une grande simplicité dans ses parties & une construction peu couteuse.

La premiere figure représente cette échelle encore repliée, telle qu'on la transporte à l'endroit de l'incendie où on en a bésoin. La facilité de la transporter & de la placer est encore un des avantages considérables de cette invention. A B, C D sont deux leviers de bois, joints & assemblés à leur milieu en *a*, & percés dans ce point par une barre qui les fixe à la caisse M N P Q & en traverse toute la largeur. Les extrémités supérieures C & B de ces deux leviers tiennent aux bouts inférieurs d'une seconde paire de leviers B E & C F, semblables aux premiers & joints par un clou à leur milieu *b*, mais sans être immédiatement fixés à la caisse. Les paires suivantes des leviers G F, E H, G K, I K ne different en rien de la seconde, & tout cet assemblage est terminé en

Planche II. Fig. 1.

 haut

haut par une espece de Gallerie R S. Un appareil parfaitement semblable se trouve aussi du côté opposé de la caisse, & l'un & l'autre tiennent entr'eux par des barres qui traversent chaques deux paires de leviers correspondans aux points, où ils se croisent, comme en *a*, C, B, *b*, E, F, etc.

Par cette construction on conçoit aisément, que lorsqu'on fait tourner les roues, les cordes en s'entortillant forceront les deux bouts inferieurs de la premiere paire de leviers à se rapprocher, & ces leviers se mouvant ainsi autour de leur centre, tous les autres leviers en feront autant autour de leurs points d'appui & prenant par ce mouvement une situation moins inclinée, ils s'éleveront verticalement.

Planche II. Fig. 2.

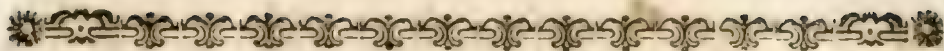
L'Echelle ainsi montée est représentée dans la seconde figure de la même Planche. L'une & l'autre des deux roues a son arrêt, qui s'y engraine, pour assurer à l'échelle la situation qu'on lui a donnée, & pour empêcher qu'elle ne retombe dans la caisse. Pour y mettre encore plus de fermeté, on accroche en haut & en bas des barres de fer horizontales *mn*, *pq*, & on en peut même ménager des semblables à chaque paire de leviers.

Enfin *t u*, *r s*, *v w* etc. sont des planches horizontales suspendues par des cordes, où les ouvriers se placent pour diriger delà la syringe de la pompe à feu vers l'endroit le plus exposé à la flamme. Le reste de la construction & l'usage de la machine se voit suffisamment par la figure, où il est encore bon de faire observer qu'un des plus grands avantages de ces sortes d'échelles consiste en ce qu'elles se soutiennent en l'air, sans être

appuiées

appuiées contre la maison, de la quelle on travaille à éteindre les flammes (*).

(*) Cette ingénieuse application d'un mechanisme d'ailleurs très connu à un usage aussi important, a valu au Sr. Dahlgréen une médaille académique que S. E. Mr. le Chambellan de Domaschnef lui a remis publiquement dans une Assemblée solemnelle de l'Académie, autant pour le recompenser que pour encourager tous ceux qui comme lui employeront leurs talens à des objets utiles.



PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE.

Electrophore perpétuel.

SA MAJESTE' IMPE'RIALE, notre très auguſte Souveraine, a fait exécuter & placer dans l'Académie un grand appareil électrique, connu aujourd'hui ſous le nom d'Electrophore perpétuel & imaginé l'année 1775 par un Gentilhomme de Côme nommé *Alexandre Volta*. Pendant que cette nouvelle machine électrique, executée ſelon Ses ordres par un Méchanicien Ruſſe, Mr. *Kulibin*, a été placée dans le Chateau Impérial à Czarsko-Selo, il a plu à *Sa Majeſté*, d'aſſiſter Elle même aux expériences électriques, faites avec cet appareil, qui joint à la ſimplicité du méchanisme la ſurpriſe des effets les plus ſinguliers. Il conſiſte en deux plaques de métal; l'une de ces deux plaques eſt recouverte d'une couche de poix, & l'autre, un peu plus petite, doit être ſuſpendue par des cordes de ſoie ou iſolée d'une façon équivalente, afin qu'on puiſſe la poſer ſur la ſurface réſineuſe, frottée avec la main ou un morceau de fourrure, & enſuite la relever ſans y toucher.

L'Electrophore en queſtion (*) le plus grand qu'on ait encore executé, a 9 pieds de longueur ſur 4½ de largeur. L'électricité y eſt produite par une maſſe réſineuſe, qui contient 180 livres de poix avec 80 livres de Cire d'Eſpagne.

La

(*) Il eſt repréſenté ſur la IIme Planche des figures qui appartiennent aux Mémoires de ce volume, & c'en eſt la 3me.

La defcription détaillée de cet appareil, & de ceux de fes effets, qui font particuliers à ces machines électriques d'un genre nouveau, ainfi que le développement de leur principe phyfique font le fujet d'un mémoire de *Mr. Krafft*, inféré au Tome préfent des *Actes de l'Académie* (pag. 154.) fous le titre: *Tentamen Theoriae Electrophori* c'eft à dire *Effai d'une Théorie des Electrophores perpétuels.*

Réflexions de Mr. *L. Euler* Sur quelques nouvelles expériences optiques, communiquées à l'Académie des Sciences, par Mr. *Wilfon.*

Les corps fur lesquels ces expériences ont été faites font connus fous le nom de Phosphores, qui ont la propriété, qu'ayant été éclairés par les rayons du Soleil, ou feulement expofés au grand jour, ils confervent leur lumiére encore pendant quelque temps fi on les tranfporte dans l'obfcurité, tout de même que s'ils étoient encore éclairés. Il y a long temps qu'on a reconnu cette propriété dans les pierres de Bologne, qui après avoir été bien éclairées & transpotées enfuite dans un lieu obfcur y demeurent vifibles affés longtems. Depuis les Chymiftes ont trouvé moyen de compofer de femblables corps de plufieurs autres matiéres différentes, & *Mr. Wilfon* a pouffé cette découverte fi loin, qu'il eft en étât de préparer de tels corps de toutes les couleurs, dont chacun ayant été bien éclairé conferve pendant longtemps dans une chambre obfcure fa propre couleur, par la quelle il demeure vifible au fpectateur.

Or

Or les nouvelles expériences, que cet habile Physicien a faites sur ces différentes especes de corps phosphoriques consistent dans les différentes manieres de les éclairer. Il s'est servi pour cet effet d'une chambre obscure, où l'on peut diviser par le moyen d'un prisme les rayons solaires en leurs couleurs primitives, qu'on voit dans les arcs en ciel; & comme on y peut intercepter telles couleurs qu'on voudra, il a tellement arrangé ses expériences, qu'un même corps phosphorique d'une certaine couleur a été successivement éclairé par tous les différens rayons solaires, & il a observé, qu'après que ce corps a été éclairé par les rayons de sa propre couleur, il n'en a reçu qu'une lueur assés foible dont il a été visible dans l'obscurité. Mais plus le rayon de lumiere dont il a éclairé ce corps différoit de sa propre couleur, plus il en reçut d'eclat dont il brilloit apres dans l'obscurité. Ainsi un tel corps phosphorique rouge ayant été éclairé par les rayons rouges, & ensuite transporté dans l'obscurité n'en conservoit qu'une assés foible lumiere, au lieu qu'après l'avoir éclairé successivement par les rayons jaunes, verts, bleus & violets, la lumiere qu'il en acquéroit devint de plus en plus brillante, & les rayons violets, qui sont les plus contraires à sa propre couleur produisirent le plus grand éclat.

Comme on se feroit sans doute attendu, que les rayons de la même couleur dont le corps est doué, lui imprimassent le plus vif éclat, il paroitra extremement étrange, que précisément le contraire soit arrivé dans ces expériences, & il semble, que ce phénomene se trouve dans une contradiction ouverte avec les autres phénomenes connus de la lumiere, par les quels nous sçavons, qu'un corps opaque ordinaire d'une certaine couleur ne sauroit être mieux

mieux éclairé, que par les rayons de la même couleur. Ainsi un tel corps rouge lors qu'on y dirige dans une chambre obscure les rayons rouges du Soleil, en acquiert un très haut brillant, pendant qu'en y dirigeant les rayons violets du Soleil, il n'en reçoit presque aucune illumination, mais demeure presque entierement invisible; & tout le monde sçait, qu'à la flamme bleue de l'esprit du vin allumé tous les corps rouges paroissent extremement sombres, pendant que les corps bleus y paroissent dans leur plus grand éclat.

Or quelqu' étrange que paroisse ce Paradoxe, si nous y réfléchissons attentivement, nous ne le trouverons plus si contraire aux propriétés connues de la lumiere; on n'a qu'à bien distinguer deux momens dans les expériences de Mr. *Wilson* dont le premier est celui où il a éclairé son corps phlogistique rouge par les rayons violets du Soleil, pendant lequel il n'y a aucun doute que le corps n'ait paru presque entierement destitué de toute couleur; ce n'étoit que dans le second moment lorsqu'il transportoit ce corps dans l'obscurité, qu'il a commencé a briller de sa propre couleur rouge, d'où l'on voit, que les rayons violets du Soleil n'ont pas immédiatement rendu visible le corps, mais qu'ils ont plutôt excité ses moindres particules à un certain mouvement, qui les a rendues propres ensuite à reluire dans l'obscurité de sa couleur naturelle. Par là il est clair, qu'il ne s'agit que d'expliquer comment les rayons violets ou tous les autres rayons hormis les rouges ayent été capables de mettre le corps dans un tel état qu'après avoir été transporté dans l'obscurité, il ait pu répandre ses propres rayons qui ont presque été supprimés pendant qu'il a été exposé aux rayons violets du Soleil. Or je crois, qu'une telle explication ne sera

pas fort difficile ſuivant la Théorie que j'ai donnée autrefois ſur la nature de la lumiere & la maniere dont les corps opaques nous deviennent viſibles.

Or d'abord il eſt aſſés clair & Mr. *Wilſon* ſemble en convenir lui même, que ces phénomenes ſont entierement contraires à la Théorie Newtonienne de la lumiere & des couleurs ; car ſelon cette Théorie les corps opaques ne ſauroient devenir viſibles, que par des rayons réfléchis de leurs ſurfaces. Donc pour qu'un corps rouge par exemple puiſſe être aperçu de nos yeux, il faut premierement qu'il y ait des rayons qui tombent ſur ſa ſurface, & enſuite qu'ils y ſouffrent certaines réfractions, par leſquelles tous les rayons qui ne ſont pas rouges ſoient abſorbés ; de ſorte qu'en troiſieme lieu les ſeuls rayons rouges ſoient réfléchis de ſa ſurface. Cela poſé on remarque dans ces nouvelles expériences d'abord deux circonſtances, directement contraires à ce Syſteme, dont la premiere eſt : que le corps phoſphorique rouge quoiqu'il n'ait été éclairé que par des rayons violets ne laiſſe pas que de nous paroitre rouge & même avec plus d'éclat que s'il avoit été éclairé par des rayons rouges ; de ſorte qu'il eſt impoſſible de concevoir d'où viennent les rayons rouges par leſquels ce corps nous devient viſible, attendu que par cette même Théorie les rayons violets ne ſauroient changer de nature. Mais la ſeconde circonſtance eſt encore d'avantage en contradiction avec cette Théorie, puisque le corps rouge en queſtion ne nous paroit ſous cette couleur, que quelque temps après qu'il a été éclairé par des rayons violets ; de ſorte qu'actuellement il n'y a plus aucun rayon qui tombe ſur ſa ſurface, & encore moins ſauroit-il y en avoir des réfléchis. D'où l'on voit, que la ſeule exiſtence de tels corps phoſphoriques pourroit ſuffire à renverſer

de ſond en comble la Théorie Newtonienne ſur la lumiere & les couleurs.

Lorſque j'ai établi autrefois ma nouvelle Théorie de la lumiere & des couleurs, j'ai prouvé inconteſtablement par pluſieures raiſons, que le ſentiment du grand *Newton* ne ſauroit être en aucune maniere admis dans la Phyſique; & il ſeroit ſuperflu de les répéter ici, après que je les ai expoſées fort en détail dans la premiere partie de mes Opuſcules imprimés à Berlin 1746 ſous le Titre de *Noua Theoria lucis & colorum*, & enſuite auſſi dans mes lettres à une Princeſſe d'Allemagne. Le fondement de cette Théorie conſiſte en ce que je ſuppoſe à la lumiere une origine ſemblable à celle des ſons; enſorte que comme le ſon eſt produit par un mouvement de vibration transmis par l'air, ainſi la lumiere eſt cauſée par un ſemblable mouvement de vibration transmis par l'éther dont l'élaſticité étant pluſieurs mille fois plus grande que celle de l'air pendant qu'il eſt auſſi pluſieurs mille fois plus ſubtil, j'ai d'abord heureuſement expliqué l'incroyable viteſſe dont les rayons de lumiere doivent arriver du Soleil juſqu'à nous. Enſuite j'ai fait voir très évidemment que les différentes couleurs ne ſont produites que par différens dégrés de rapidité dans le mouvement de vibration, de la même maniere que les ſons d'une octave dans la Muſique répondent chacun à un certain nombre de vibrations rendues dans une ſeconde.

Mais pour ce qui regarde de plus près les nouvelles expériences; j'ai démontré, qu'il eſt abſolument faux, que les corps opaques nous deviennent viſibles par des rayons réfléchis, comme on s'étoit généralement imaginé autrefois; mais qu'il faut abſolument, que les moindres

particules qui se trouvent dans la surface de ce corps soient mises dans un certain mouvement de vibration plus ou moins rapide selon que la couleur du corps l'exige, attendu qu'à chaque couleur il repond un certain nombre de vibrations achevées pendant une seconde; car alors ce même mouvement produit de semblables vibrations dans l'éther environnant, d'où resultent des rayons de la même couleur. Par là il est clair, que les rayons, par les quels nous voyons les corps opaques sont engendrés dans leur propre surface conformement au dégré d'élasticité dont les moindres particules y sont douées. Or pour mettre ces particules dans un tel mouvement de vibration il faut que des rayons de lumiere y tombent, lesquels par leur action les excitent à un tel mouvement, de la même maniere qu'une corde de musique en repos étant exposée à un son assés fort, commence à trembler & à rendre elle même un son qui répond à son degré de tension.

Cela posé, un corps phosphorique rouge tel que Mr. *Wilson* en a examiné ne nous sauroit devenir visible, qu'entant que les moindres particules dans sa surface soient excitées à un mouvement de vibration qui convient à sa propre couleur. Ce seront donc sans doute les rayons rouges qui seront les plus propres à imprimer à ces particules un tel mouvement de vibration, qui par la nature phosphorique de ce corps se conserveront encore pendant quelque temps après que les rayons incidens auront cessé d'y agir, mais d'une maniere beaucoup plus foible que pendant que les rayons rouges y ont agi actuellement. Voyons à présent, quel effet les rayons violets doivent produire sur ce même corps phosphorique rouge, & d'abord il est évident qu'ils ne sauroient porter ses moindres particules à un mouvement de vibration à cause de la con-

contrariété qui regne entre les vibrations des rayons violets & celles que les propres particules du corps ſont diſpoſés à recevoir. Par cette raiſon tout l'effet de ces rayons violets ſe reduira à pouſſer les particules du corps à un certain dégré de tenſion ſans leur imprimer un mouvement actuel. Donc auſſitôt que le corps ſera retiré de l'action de ces rayons, ſes moindres particules commenceront à ſe dégager de leur état de tenſion & recevront le même mouvement de vibration qui eſt propre à leur nature, & partant elles repandront des rayons rouges qui ſeront même d'autant plus forts, à cauſe du haut dégré de tenſion, que ſi le meme corps avoit été expoſé aux rayons rouges. Enfin par la nature des corps phoſphoriques ce mouvement de vibration pourra durer plus ou moins longtemps ſelon le dégré de la qualité phoſphorique dont ces corps ſeront doüés. De tout cela on comprend aiſément, que ces nouvelles expériences quelques paradoxes qu'elles ont paru d'abord ſont parfaitement bien d'accord avec ma Théorie de la lumiere & des couleurs, & qu'elles pourroient même ſervir à la porter à un plus haut degré de certitude, ſi elle n'étoit pas encore ſuffiſamment conſtatée.

Expérience
ſur le phoſphore ſulphuréo-calcaire de Mr. *Canton.*

Par Mr. *Krafft.*

Les nouvelles expériences ſur les phoſphores, dont Mr. *Wilſon*, Membre de la Societé Royale de Londres, a fait part à l'Académie, ſont également intéreſſantes & pour

la connoiſſance des ces corps & pour la théorie de la lumiere. Ce Phyſicien prépare avec des coquilles d'huitres un phoſphore, qui expoſé quelques ſecondes de tems à la lumiere du jour, offre dans l'obſcurité de très vives apparences de couleurs priſmatiques. Par un traitement particulier il prépare la ſurface ſuperieure de ces coquilles phoſphoriques, de maniere à ne briller, que de la ſeule couleur rouge ; & dans l'intenſité de cette lumiere rouge il a obſervé des nuances plus ou moins fortes, ſelon que le phoſphore avoit été expoſé à tel ou tel rayon coloré du Soleil, ſéparé par le moyen d'un priſme & introduit ſeul & à l'excluſion des autres dans une chambre obſcure. Le phoſphore, éclairé par le ſeul rayon rouge, le plus homogene à la couleur de ſa lumiere ordinaire, ne parut offrir dans l'obſcurité, qu'une foible lueur rouge; au lieu que ce rouge étoit dans ſon plus grand éclat, quand le phoſphore venoit d'être éclairé par le ſeul rayon violet, le plus hétherogene à ſa couleur originaire.

Ces belles découvertes m'ont donné occaſion, de faire ſur le phoſphore ſulphuréo - calcaire, qui offre dans l'obſcurité une lumiere blanche, une expérience analogue, que le Réverend Pere *Beccaria*, célebre Phyſicien de Turin, a annoncée le premier dans les Transactions philoſophiques de Londres ; Vol. LXI. P. 1. & qui eſt d'autant plus intéreſſante, que la couleur blanche eſt en quelque façon le mélange de toutes les autres. Il fit pluſieurs petites boëtes de métal à couvercles de verre differemment coloré. Ayant mis dans chaque boëte une quantité égale de ce phoſphore, il les expoſa au ſoleil, & les ouvrant dans un lieu obſcur, il trouva à chaque portion de ce phoſphore la couleur du couvercle qui le couvroit. *Conſit hoc experimento*, (dit ce Phyſicien) *non quantam ſolum*

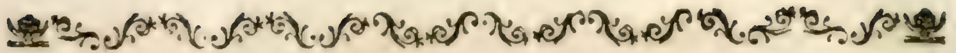
solum lucem ebiberit phosphorus, *sed et qualem*, *eam ipsum unice emittere.* Mrs. *Wilson*, *de Magellan*, & quelques autres Physiciens, ont répété cette expérience, sans réussir à trouver le resultat annoncé, quoiqn'ils ayent suivi exactement tous les procédés de l'Auteur.

J'ai cru, qu'il falloit aussi essayer cette expérience, en faisant usage d'un très bon prisme au lieu des couvercles de verre, pour séparer les rayons colorés du Soleil. Le phosphore a rendu dans l'obscurité une lumiere blanche vive & distincte; mais toutes les fois, que j'ai répété l'expérience, cette lumiere nous (*) a paru blanche & sans aucune autre couleur, quel que fût le rayon coloré du Soleil, qui eut éclairé le phosphore.

Mr. Allemand, célebre Physicien à Leyde, a constaté l'avis du Pere Beccaria par une expérience, qu'il a faite sur le phosphore de Bologne.

Il seroit intéressant de savoir, si peut-être cette qualité n'est pas particuliere à quelques especes de phosphores de lumiere blanche; par exemple, à celui de la pierre de Bologne; ou quelles sont les conditions nécessaires pour assûrer le succes de l'expérience.

(*) A la premiere expérience a assisté Mr. Gouthry, Médecin anglois, amateur très zélé de la Physique expérimentale.



HISTOIRE NATURELLE.

Deſcription d'un *Huſio* monſtrueux.

L'Académie reçut au commencement de Mars, de la part du Gouverneur d'Aſtrachan Mr. le Général de *Jacobi* la tête d'un eſturgeon de la grande eſpece connue en Ruſſie ſous le nom de *Belouga*, en allemand *Hauſen*, remarquable par une excreſcence extraordinaire qu'elle portoit. Le poiſſon dont cette tête avoit fait partie, n'avoit gueres ſurpaſſé ſept pieds en longueur, ce qui eſt la taille moyenne de cette eſpece.

Planche III Fig. 1. & 2. L'excreſcence ſe trouve placée presque au milieu du front entre les orbites, où ſa baſe tient immédiatement à la charpente oſſeuſe du Crane, qui s'y étoit viſiblement cariée & reconſolidée. Elle s'éleve en aſpérités irrégulieres & comme déchiquetées, qui s'inſinuant dans la ſubſtance même de l'excreſcence en augmentent l'immobilité.

C'eſt d'abord un cone tronqué irrégulierement & raboteux *a*, *a*, *a*, de 4 pouces anglois de haut ſur 5. p. 2. l. de diametre & 14. p. 6. l. de circonference à la baſe. Du ſommet de ce cone partent deux branches latérales *b*, *c*, en forme de croſſes, irregulierement cylindriques, émouſſées, & contournées en avant, dont la diſtance *b c* (2de figure) priſe transverſalement égale 11 pouces, la longueur de la branche gauche *c* ſurpaſſant conſidérablement celle qui eſt à la droite *b*.

La ſubſtance du corps de l'excreſcence eſt cartilagineuſe mais très compacte & dure, entremêlee de fibres ligamenteuſes des plus ténaces, qui ſe croiſent en tout

ſens

ſens & tournent en arcs & par rézeaux, ſans aucune trace de vaiſſeaux ſanguins. Les branches ſont ſimplement cartilagineuſes, ſans fibres, plus faciles à entamer avec le couteau & plus mollaſſes : auſſi s'affaiſſerent-elles conſidérablement, lorsque la tête qui pendant le tems de ſon tranſport avoit continuellement été gélée, commença à ſe dégéler. Toute la ſubſtance ſe deſſécha ſans pourriture & devint tranſparente comme de la colle en perdant environ la moitié de ſon volume. La figure ainſi que la poſition de cette excreſcence n'a rien de ſymmétrique, ſa diſtance à l'oeil droit ſe trouve d'un pouce plus grande que celle au gauche qui eſt d'1 pouce 5 lignes, ſa diſtance à la pointe du muſeau étant de 9. p. 5. l. & la diſtance à la nuque de 2. p. 4. l.

On ne peut ſe tromper ſur la nature & l'origine de cette excreſcence : vraiſemblablement elle a été cauſée par quelque coup de maſſue que ce poiſſon ſur le point d'être pris aura reçu des pêcheurs, & dont la force ne l'aura pas étourdi aſſes pour empêcher ſa fuite. Cependant la contuſion faite au péricrane a du occaſionner cette eſpece d'exoſtoſe cartilagineuſe qui au reſte eſt analogue à la nature des os du crane de ce poiſſon, tandis que les exoſtoſes qu'on trouve ſouvent d'un volume monſtrueux aux machoires des brochets ſont d'une ſubſtance oſſeuſe très blanche & compacte.

Deſcription d'une tête de Rhinoceros à deux cornes.

Les oſſemens du Rhinoceros & des autres animaux gigantesques qu'on découvre en differens endroits de la Sibérie & dont la deſcription a été donnée dans le XIIIe & XVIIe Tome des nouveaux Commentaires de l'Aca-

démie, ont réveillé l'attention des Physiciens observateurs, tant à l'égard des ces restes d'animaux étrangers épars dans les terres du Nord, que par rapport à l'histoire naturelle & à la description du Rhinoceros en particulier, qui malgré tout ce qu'en ont recueilli Mrs. *de Busson* & *Daubenton* est encore bien éloignée de sa perfection.

Mr. *Camper* célebre Anatomiste de Gröningue, qui joint aux connoissances profondes le mérite d'employer tous les avantages de sa fortune & de ses rélations, pour se procurer les animaux rares des climats les plus éloignés, afin d'augmenter le fond des lumieres que peut fournir l'Anatomie comparée, a communique à l'Académie une description détaillée d'une tête de Rhinoceros à deux cornes qui lui a été envoyée du Cap de Bonne-espérance. En attendant la publication de ce Mémoire & des planches qui y ont rapport, dont l'Académie a chargé un des ses Membres, nous rapporterons ici les différences essentielles que Mr. Camper a remarquées entre le crane de Rhinoceros d'Afrique & les cranes trouvés en Sibérie, dont Mr. Pallas avoit donné la description & qui semblent aussi avoir été armes de deux cornes.

Le Crane de Rhinoceros décrit par Mr. Camper a toutes les proportions, celles du museau surtout, plus racourcies que ceux de Sibérie; de sorte que l'orbite se trouve au milieu de toute sa longueur qui est beaucoup moins grande, à proportion de la grosseur & de la force de sa charpente. L'arriere de ce crane avance moins au delà des condyles, qui l'attachent à la premiere vertebre du col: les arcs zygomatiques sont plus larges & plus robustes; & ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que l'extrémité de la cloison des narines, qui est entierement osseuse

osseuse dans tous les cranes de Sibérie s'est trouvée dans le Rhinoceros du Cap entierement cartilagineuse, quoique les cornes considerables de celui-ci indiquassent un âge avancé. Aussi la voute osseuse qui sert de support à la grande corne, est bien moins considérable & moins large dans les figures de M. Camper que dans nos cranes de Sibérie. Les plus complets de ceux-ci, qui ont été décrits dans le XVIIe Volume des nouveaux Commentaires, semblent n'avoir eu dans chaque machoire que cinq dents molaires de chaque côté: ou en supposant que les alvéoles antérieures eussent servi à deux petites molaires, leur nombre n'auroit pas excedé six, au lieu que le crane du Rhinoceros d'Afrique en a sept bien conformées dans chaque rang, & que ces rangs avancent très près jusqu'à l'extrémité des machoires, qui dans les cranes de Sibérie sont beaucoup plus allongées.

Tant de différences essentielles, pour ne rien dire des autres moins considerables, qui se trouvent annotées dans la description de M. Camper, semblent prouver que le Rhinoceros d'Afrique est d'une espece tout à fait différente de celui des Indes & de l'Asie. C'est ce que le tems & les voyageurs Européens, dont l'esprit observateur se réveille de plus en plus, ne tarderont pas d'éclaircir.

Sur les Champignons, leur production & leur usage.

Le Pere *Cibot* Missionaire à Pé-king & membre de l'Académie des Sciences, lui a envoyé un mémoire, dans lequel il rapporte fort au long les différentes opinions, qui se trouvent dans les livres Chinois, sur la nature & la production des mousses & des Champignons.

Le plus effentiel de ce mémoire confifte dans la méthode dont les Chinois fe fervent, afin de multiplier pour les ufages économiques les Champignons & même les Agarics, dont les jeunes pouffes font une partie de la nourriture de ce peuple. „ Il ne s'agit, dit le P. Ci-„ bot, ainfi que nous l'avons obfervé en parlant du *Mo-„ kou-fin*, (*) que d'enterrer dans une bonne terre, „ en un lieu tourné au midi & bien ombragé, des mor-„ ceaux pourris du bois de l'arbre qu'on aura choifi, de „ les y laiffer paffer l'hyver & de les arrofer fouvent, „ furtout quand les chaleurs de l'été auront commencé. „ On couvrira ce bois d'un terreau de fes propres feuil-„ les, ou on l'arrofera avec de l'eau, où l'on en aura „ fait bouillir & où l'on aura fait fondre du Nitre. C'eft „ un moyen fûr pour avoir des Champignons dès la pre-„ miere année. „

Le R. P. appuie beaucoup fur l'opinion des Chinois que chaque arbre & même différentes parties d'un arbre, produifent une certaine efpece de champignons qui leur eft propre; ce qu'on n'ignore point en Europe, comme il le croit, quoiqu'on ne puiffe l'admettre qu'avec reftriction. Les Chinos emploient furtout *l'Ormeau*, *le Murier*, *le Saule*, *le Peuplier*, *le Pin* & *le Chataigner*. Le favant Miffionaire continue ainfi „ Comme les Chinois „ mangent & trouvent très bons les Agarics de plufieurs „ arbres, ils ont imaginé auffi le moyen de s'en procurer „ une recolte auffi abondante qu'ils la défirent. Ce moyen „ confifte à enterrer à demi le tronc de l'efpece d'arbre „ qu'ils ont choifi, le plus vieux eft le meilleur, dans un „ endroit ombragé & auffi tourné au midi; puis d'arrofer „ fouvent ce tronc & la terre d'alentour, furtout dans „ les

(*) Noui Commentarii Acad. Imp. Sc. Tom. X.X. pag. 371. feqq.

„ les grandes chaleurs. Tout ce qui eſt hors de terre „ de ce tronc, principalement quand il a ſon écorce, „ ſe couvre d'Agarics d'un bout à l'autre: on les cueille „ après quelques jours pour les manger, les confire au „ ſel ou les faire ſécher, & après peu de jours on en „ voit reparoitre d'autres. Ce qui dure ainſi pendant plu- „ ſieurs mois: il faut avoir l'attention au reſte de les cueil- „ lir après quelques jours, parcequ'ils ſe durciſſent & de- „ viennent ligneux. “

Enfin il fait part du moyen dont uſent les Chinois pour s'aſſûrer de la ſalubrité des Champignons, & qui conſiſte à faire bouillir avec eux quelques morceaux de jonc, dont la moëlle prend une teinte noiratre avec les eſpeces de Champignons qui ſont nuiſibles à l'homme. Ceci mérite pour le bien de l'humanité d'être conſtaté par des expériences réitérées.

D'une nouvelle eſpece de *Ledum* particuliere à l'Amérique ſeptentrionale

Mémoires pag. 213.

Le genre de *Ledum* n'offroit jusqu'ici qu'une ſeule eſpece très commune dans les marais de tout le Nord de l'Europe & de l'Aſie. Mr. *Bergius* nous en fait connoitre une nouvelle qu'on trouve dans l'Amérique ſeptentrionale, dont les feuilles reſſemblent à celles du Buis, & conſtituent par là la principale différence d'avec l'eſpece vulgaire. Découverte qui ne laiſſe pas que d'être très intereſſante pour la Botanique, ſurtout comme ce genre de plantes ſemble promettre des vertus médicinales, qu'on n'a pas encore approfondies par un nombre ſuffiſant d'experiences.

Des Mulets dans le Regne végétal.

Mémoires pag. 215.

Mr. *Koelreuter* a commencé depuis quelque tems de communiquer à l'Académie une partie des expériences laborieuſes & intéreſſantes qu'il continue de faire avec ſuccès ſur la production des plantes *Hybrides*, ou des mulets dans le regne végetal. Le dernier volume des Nouveaux Commentaires (*) contient celles qu'il a faites en mélant quelques eſpeces des genres du *Lychnis*, du *Cucubalus*, du *Silene*, & d'autres plantes de la même famille : & il a reuſſi ſurtout dans la production des individus mitoyens entre deux plantes de genres différens. (*Lychnis divica et Cucubalus viſcoſus.*)

Les expériences de ce même Phyſicien botaniſte qui ſont contenues dans ce premier ſemeſtre des Actes de l'Academie roulent ſur differentes eſpeces de *Digitales* ou Gands de Notre-Dame. La *Digitalis lutea* & la *Digitalis purpurea* ſe ſont fécondees réciproquement, & ont produit de veritables mulets mitoyens entre ces deux eſpeces, mais très ſupérieurs pour le cru & la duree de leurs racines aux eſpeces primitives. Une production pareille a eu lieu entre la *Digitalis lutea* & la *Digitalis Thapſi*, & ces mulets ont été ſi ſemblables aux premiers, que l'on ne ſauroit s'empecher de prendre la *Digitalis purpurea* & la *Thapſi* pour des variétés d'une ſeule & même eſpece, changée par l'influence du climat ; ce qui ſe confirme encore par la fecondité des mulets produits entre ces deux eſpeces.

Mr.

(*) Novi Commentarii Acad. Imp. Sc. Tom. XX. pag. 431.

Mr. Koelreuter s'est aussi procuré des mulets en fecondant les parties femelles de la *Digitalis ferruginea*, par la poussiere mâle de l'*ambigua*. Mais le melange des deux especes connues sous les noms de *Digitalis lutea* & *ambigua*, ainsi que plusieurs autres expériences infructueuses qu'il rapporte, ne lui ont rien produit; ce qui confirme d'un autre côté, que ces deux especes considérées par quelques Botanistes comme de simples variétés, sont reéllement diverses. Ce qui prouve encore d'avantage la regle qui a tenu bon dans toutes les expériences de notre habile Académicien: savoir que les especes qui n'engendrent rien ensemble, ou ne produisent que des mulets stériles par eux mêmes, ne sauroient jamais être regardées comme de simples variétés, mais qu'elles constituent plutôt des tiges ou des especes originairement différentes.

D'une Masse de fer natif trouvée en Sibérie.

Au mois de Mai l'Académie reçut de Sibérie la grande masse de fer naturellement malléable, dont Mr. le Prof. *Pallas* avoit fait la découverte pendant son séjour aux environs du Jenisei, & dont il a donné l'histoire & la description au troisieme volume des ses voyages.

Au dessous d'une écorce de mine de fer, dont toute la masse semble avoir été environnée, le fer malleable se découvre à la plus grande partie de la surface exterieure. Mais en emportant avec un ciseau d'acier de petits morceaux, on observe que vers l'intérieur le tissu de ce fer natif devient plus clair, & qu'une matiere vitreuse jaune & transparente qui remplit exactement les cavenosites de ce tissu y occupe de plus grands espaces. On en a même trouvé qui auroient pu contenir un oeuf de pigeon.

Il feroit à défirer qu'on fit couper toute la maffe par le milieu, pour en reconnoitre tout le tiffu intérieur, qui peut-être pourroit offrir quelque fubftance ou quelque difpofition de parties, intéreffante pour la Minéralogie, & jetter quelque lumiere fur la production de ce morceau unique & remarquable.

Au refte on n'y découvre aucune reffemblance avec des productions volcaniques.

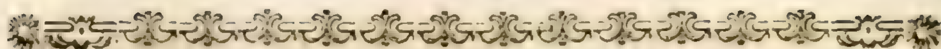
Sur l'Alcali minéral natif qu'on trouve en Sibérie.

Mémoires pag. 197.

Jusqu'ici on avoit confidéré l'Alcali minéral natif, qui eft fans doute le véritable *Natron* des anciens, comme une production affés rare dans le regne minéral. L'on en fit cependant la découverte en différens endroits de l'Europe & furtout dans les landes de la Hongrie. Mais aucun païs n'en produit fi abondamment & fi généralement que la Siberie & tous les deferts Afiatiques.

Mr. *Géorgi*, qui a recueilli toutes les obfervations faites à ce fujet pendant les derniers voyages entrepris fous la Direction de l'Académie pour la connoiffance de l'Hiftoire naturelle de l'Empire Ruffe, y joint les fiennes, & les expériences, par lefquelles il a pu fe convaincre que cet Alcali fe produit continuellement par la deftruction naturelle du fel marin, & du fel de Glauber dont les lacs & les marais fales de nos Provinces méridionales abondent. Il indique la grande utilité que l'on pourroit retirer de ces Alcalis naturels, dont la Ruffie poffede un fond inépuifable & qui peut fervir à tous les emplois de

la soude de commerce. Il donne enfin un procédé, probablement venu de la Chine, par lequel on se procure dans les fonderies de Nertschinsk un sel, qui remplit toutes les fonctions du Borax dans les opérations métallurgiques; procédé qui semble jetter un nouveau jour sur la production encore douteuse du *Tinkal*, qui nous vient des Indes.



MÉTÉOROLOGIE.

L'Extrait des obſervations météorologiques, qui termine ce premier tome des Actes Académiques, a la même forme que ceux qui ſe trouvent inſérés dans les quatre derniers volumes des nouveaux Commentaires.

L'Auteur ne fait qu'expoſer ſes obſervations, & s'il en tire des concluſions, elles n'ont pour but que la comparaiſon du temps qu'il a fait chaque mois & chaque année, avec celui qu'on a obſervé ſoit dans les années précédentes, ſoit dans d'autres régions de la terre. C'eſt pour faciliter ſurtout cette derniere comparaiſon de ſes obſervations avec celles des météorologues étrangers, qu'il fait toutes ſes annotations ſuivant le nouveau ſtile.

Les inſtrumens dont il ſe ſert ſont en petit nombre, mais conſtruits avec juſteſſe & expoſés convenablement.

Le Barometre eſt ſimple, & ſon échelle diviſée en pouces de France dont 12 conſtituent un pied de Roi: chaque pouce eſt ſubdiviſé en 20 parties égales; de ſorte qu'on y peut eſtimer la hauteur du mercure jusqu'à une centieme partie de pouce près. Ces centiemes parties dans les hauteurs barométriques ſont déſignées par les deux dernieres figures & ſeparées du nombre des pouces entiers par un point: Ainſi 28.23, marque une hauteur de 28 pouces entiers & de $\frac{23}{100}$ de pouce.

Pour

Pour réduire ces parties centiemes à des *lignes* dont 12 font un pouce, on n'a qu'à les multiplier par le nombre 12, & retrancher du produit les deux dernieres figures qui feront des centiemes d'une ligne. Enſuite pour ceux qui ſe ſervent de Barometres dont les échelles ſont diviſées en pouces anglois, il ſuffit de remarquer que la hauteur de 28 pouces de Paris répond à 29 $\frac{87}{100}$ pouces de Londres & que 2 pouces des premiers font à peu près 2 $\frac{13}{100}$ pouces des derniers.

Le Barometre eſt placé à une hauteur de 18 pieds au deſſus du niveau moyen de la Néva à une diſtance d'environ 5000 pieds de ſon embouchure ou du Golfe de Finlande.

Enfin l'obſervateur repréſente toutes les variations du Barometre qu'il obſerve par une ligne courbe, dont les appliquées correſpondent aux élévations & les abſciſſes aux jours & aux heures de l'obſervation. Cette méthode facilite de beaucoup la recherche de la plus grande & de la plus petite élévation, celle de la moyenne & des autres conſequences qu'on trouve dans ſes extraits.

Le Thermometre eſt à mercure & conſtruit ſuivant la méthode de Mr. *Delisle.* On compte les dégrés en deſcendant du point de l'eau bouillante qui eſt marqué par *zero* (o), & chaque dégré occupe la dix-millieme partie de tout le volume de mercure contenu dans la boule & dans le tuyeau de l'inſtrument. De cette maniere il s'eſt trouvé que le terme de la congélation naturelle eſt au 150me dégré, & celui du froid artificiel que Fahrenheit avoit employé dant ſes Thermometres, au 176$\frac{1}{2}$ dégré.

Le o de Delisle répond donc à 80 de Réaumur & à 212 de Fahrenheit: enſuite le 150 de Delisle coïncide

 avec

avec le o de Réaumur & le 32 de Fahrenheit; d'où 15 dégrés de Delisle font 8 dégrés de Réaumur, ou 18 dégrés de Fahrenheit. De là il feroit aifé de dreffer des tables de comparaifon pour réduire les dégrés du Thermometre de Delisle à ceux de Réaumur ou de Fahrenheit. Mais il fuffit d'indiquer ici qu'on en trouve une très complette dans le XVIIIe Tome des nouveaux Commentaires page 674.

Enfin le Thermometre dont l'Auteur de l'extrait fusmentionné fe fert, eft expofé en plein air vers le Nord: enforte que le Soleil n'y puiffe donner en aucune maniere, que vers les 4 heures du foir. Après ce tems s'il arrive à l'Obfervateur de vouloir confulter le dégré du froid, ou du chaud, il recourt à un fecond Thermometre de la même conftruction, qui étant expofé vers l'Eft eft à l'abri des rayons du Soleil dès le midi.

Compa-

Comparaison des cinq derniers hyvers
Année 1772 . . 73 —— 1776 . . 77.

	1772 — — 1773	1773 — — 1774	1774 — — 1775	1775 — — 1776	1776 — — 1777
Il neigeoit pour la premiere fois -	Oct. 20	Oct. 20	Oct. 5	Nov. 5	Oct. 29
— — — pour la derniere fois -	Avr. 2	Mars. 15	Juin. 2	Mai 5	Avrl. 27
L'intervalle entre ces deux termes	164 jours	146 jours	240 jours	182 jours	180 jours
Il géloit pour la premiere fois - -	Oct. 20	Oct. 20	Oct. 1	Oct. 30	Oct. 20
— — — pour la derniere fois - -	Avrl. 12	Avrl. 23	Mai. 13	Mai. 3	Avrl. 27
L'intervalle entre ces deux termes	174 jours	185 jours	225 jours	186 jours	189 jours
Pendant ce dernier intervalle de tems la Neva fut prise pendant - -	114 jours	153 jours	167 jours	165 jours	170 jours
Savoir depuis le	Dec. 23	Nov. 19	Nov. 7	Nov. 12	Nov. 12
jusqu'au	Avrl. 16	Avrl. 21	Avrl. 22	Avrl. 25	Avrl. 30
Le plus grand froid . . - - - -	203 d.	191 d.	191 d.	200 d.	189 d.
le	Jan. 29	Fevr. 10	Jan. 24	Jan. 18	Fevr. 2
Le moindre froid - - - - - - -	134 d.	136 d.	134 d.	136 d.	133 d.
le	Nov. 9	Nov. 1	Oct. 10	Avrl. 10	Avrl. 13
Le froid a été le matin & le soir plus grand que 200.	2 jours	0 jours	0 jours	0 jours	0 jours
ensuite entre 190 & 200 d.	4 ——	2 ——	3 ——	6 ——	0 ——
180 & 190 d.	14 ——	17 ——	14 ——	13 ——	5 ——
170 & 180 d.	18 ——	22 ——	30 ——	27 ——	33 ——
160 & 170 d.	31 ——	48 ——	61 ——	39 ——	65 ——
150 & 160 d.	59 ——	65 ——	73 ——	71 ——	79 ——
Ainsi au dessous de 150 d.	128 jours	154 jours	181 jours	156 jours	182 jours
Le froid à midi a été moindre que de 130 d.	0 jours	2 jours	1 jours	0 jours	0 jours
ensuite entre 140 & 130 d.	22 ——	9 ——	26 ——	8 ——	5 ——
150 & 140 d.	62 ——	73 ——	75 ——	79 ——	52 ——
Ainsi au dessus de 150 d.	84 jours	84 jours	102 jours	87 jours	57 jours
Le froid moyen, (*) matin & soir	160 d.	161 d.	161 d.	162 d.	162 d.
— — — — — à midi - - -	154 d.	153 d.	155 d.	154 d.	155 d.
Le froid moyen du matin & du soir depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin a été - - - - -	154 d.	155 d.	159 d.	156 d.	157 d.
& depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai - - - - - - -	159 d.	161 d.	162 d.	158 d.	162 d.

Comparaiſon des cinq derniers hyvers
Année 1772 . . 73 —— 1776 . . 77.

	1772 — — 1773	1773 — — 1774	1774 — — 1775	1775 — — 1776	1776 — — 1777
L'Etat du Barometre depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Avril, ce qui fait un intervalle de 182 à 183 jours.					
La plus grande élévation - - -	28. 78	28. 88	29. 11	28. 88	28. 88
le	Fevr. 10	Nov. 23	Janv. 25	Nov. 1	Fevr. 6
La plus petite élévation - - - -	26. 98	26. 85	27. 12	27. 16	27. 02
le	Janv. 10	Dec. 31	Mars 26	Fevr. 6	Nov. 22
La variation totale - - - - - -	1. 80	2. 03	1. 99	1. 72	1. 86
Le milieu - - - - - - - - - -	27. 88	27. 86	28. 11	28. 02	27. 95
La hauteur moyenne (**) - - -	28. 14	28. 10	28. 12	28. 06	28. 15
Le Barometre a été au deſſus de					
$27.\frac{9}{15}$	135 jours	124 jours	130 jours	133 jours	136 jours
28. -	115 ——	103 ——	113 ——	107 ——	122 ——
$28.\frac{1}{15}$	97 ——	87 ——	93 ——	87 ——	103 ——
Direction des Vents pendant ce même intervalle de tems de 182 jours					
N	34 jours	32 jours	40 jours	24 jours	31 jours
NO	27 ——	31 ——	27 ——	8 ——	11 ——
O	6 ——	6 ——	10 ——	24 ——	18 ——
SO	13 ——	7 ——	9 ——	20 ——	29 ——
S	14 ——	22 ——	6 ——	21 ——	21 ——
SW	25 ——	24 ——	19 ——	30 ——	24 ——
W	28 ——	24 ——	26 ——	36 ——	20 ——
NW	35 ——	36 ——	45 ——	20 ——	28 ——
	182 jours	182 jours	182 jours	183 jours	182 jours
Les vents forts depuis le 1er October jusqu'au 1er Avril ont ſoufflé du N	2 jours	3 jours	3 jours	2 jours	0 jours
NO	0 ——	0 ——	3 ——	0 ——	1 ——
O	2 ——	0 ——	1 ——	4 ——	1 ——
SO	1 ——	1 ——	2 ——	3 ——	4 ——
S	2 ——	3 ——	2 ——	0 ——	2 ——
SW	3 ——	2 ——	6 ——	10 ——	5 ——
W	5 ——	5 ——	9 ——	2 ——	1 ——
NW	3 ——	6 ——	7 ——	2 ——	3 ——
Somme des jours de grand vent -	18 jours	20 jours	33 jours	23 jours	17 jours

Pendant

Comparaison des cinq derniers hyvers

Année 1772 .. 73 —— 1776 .. 77.

	1772 — — 1773	1773 — — 1774	1774 — — 1775	1775 — — 1776	1776 — — 1777
Pendant le même intervalle de 182 jours, ou depuis le 1er Oct. jusqu'au 1er Avril: il y a eu					
jours entierement sereins - - -	41 jours	51 jours	23 jours	19 jours	34 jours
jours entierement couverts - - -	70 ——	83 ——	93 ——	91 ——	84 ——
Brouillards - - - - - - - -	30 ——	31 ——	24 ——	23 ——	21 ——
Jours de neige - - - - - - -	52 ——	60 ——	81 ——	66 ——	75 ——
Jours de pluye - - - - - - -	34 ——	21 ——	21 ——	39 ——	16 ——

(*) On trouve le dégré du froid moyen, en divisant la somme de toutes les hauteurs thermométriques par le nombre des observations.

(**) De même la hauteur moyenne du Barometre est la somme de toutes les hauteurs observées dans des intervalles de temps égaux, divisée par leur nombre.

OUVRA-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le Cours du premier Sémestre de l'Année 1777.

Dans l'Assemblée du Lundi 9 Janvier, le Secrétaire de Conférences a présenté les *Essais sur la typométrie par Mr. Preuschen* Diacre à Carlsruh, avec quelques épreuves d'une carte topographique du Canton de Bâle, qui a été composée de types & executée par Mr. *Hase* fondeur de lettres à Bâle.

Le Vendredi 13 Janvier, le Secrétaire a présenté le premier Cahier des Nouvelles Littéraires par Mr. *Jean Bernoulli*, Astronome Royal à Berlin:

—— un imprimé allemand sur la latitude & la longitude de la ville de *Breslau* par Mr. *Scheibel*

—— l'Ouvrage du D. *Glaser* à Suhla, sur les indices qui décelent les mines de sel fossile cachées sous terre aux environs de Suhla. Enfin

—— le Prospectus d'une traduction allemande des voyages de *Jean Otter* en Turquie & en Perse.

Le 16 Janvier. Mr. le Prof. *Güldenstädt* a communiqué des lettres que Mrs. *Sokolof* & *Hablitzl* Correspondans de l'Académie lui avoient écrites d'Astrachan.

Le 27 Janvier. Le Secrétaire a lu un fragment d'une lettre adressée à Mr. de *Grimm* par le Baron de *Dalberg*, Chanoine capitulaire de la Métropole de Mayence & Stadthalter du district d'Erfort. Il s'agit d'établir une correspondance entre l'Académie Impériale & celle des Sciences qui est à Erfort. Cette proposition a été accep-

tée

tée avec un empressement égal à l'utilité publique qui résulte de semblables liaisons.

Le 3 Fevrier. Le Secrétaire a communiqué la réponse très gracieuse que le Roi de Prusse a faite à Mr. *Léonard Euler* son pere sur la lettre que celui-ci avoit écrite à *Sa Majesté* sur Son aggrégation à l'Académie.

Le 6 Fevrier. Mr le Prof. *Pallas* a lu une lettre du Conseiller d'Etat *Müller* à Copenhague qui envoye & présente à l'Académe le Prospectus de la Zoologie Danoise.

Le Secrétaire a lu un rapport adressé à l'Académie par l'Interprete *Jahrig* qui est envoyé auprès des nations Mongales pour observer leurs coutumes & étudier leurs langues, leur histoire & leur religion.

Le 10 Fevrier. Mr. le Prof. *Pallas* a lu un rapport fait à l'Académie par Mrs. *Sokolof* & *Hablitzl'*, qui contient la description d'un esturgeon monstrueux de la grande espece, que Mr. le Général *de Jacobi*, Gouverneur d'Astrachan a envoyé à l'Académie (*).

Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. de *Baczko* établi à Schippenbeil en Prusse, qui prétend avoir inventé des machines pour decouvrir la longitude en mer & mesurer la vitesse des vents.

Le 17. Fevrier. Le Secréraire a communiqué une lettre adressée à Mr. *de Domaschnef* par le Prince *Dimitri de Golitzin* Envoyé extraordinaire auprès de Leurs Hautes Puissances à la Haye, qui envoye de la part du Professeur *Pierre Camper* une dissertation latine sur le crane d'un Rhinoceros d'Afrique à double corne (**).

Le 6 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à l'Academie par l'Institut d'education à Dessau, qui présente quelques exemplaires du troisieme Cahier de ses Archives. Le

(*) Pag. 80.
(**) Pag. 81.

Le 13 Mars. Mr. le Prof. *Güldenſtädt* a lu un rapport à l'Académie envoyé par Mr. *Hablitzl'* ſon Correſpondent à Aſtrachan.

Le 17 Mars. Mr. le Conſeiller d'Etat actuel *de Steblin* a communiqué une lettre de Mr. le Prof. *Kratzenſtein* à Copenhague rélative à la vente d'une Bibliotheque.

Le 20 Mars. Le Secrétaire a lu un rapport de l'Interprète *Jahrig*, qui envoye à l'Académie la traduction de deux écrits Mongales en Allemand.

Le 27 Mars. Le Sieur *Riechner*, Méchanicien, a fait préſenter & ſoumettre à l'Examen de l'Académie le modele d'une machine pour ſcier les poutres en planches (*).

Le Secrétaire a lu la réponſe de Mr. *Preuſchen*, Diacre à Carlsruh, contenant des éclairciſſemens ſur la Typométrie que l'Académie lui avoit demandes. Elle étoit accompagnée d'une petite brochure, par laquelle un nommé *Chriſtin*, horloger dans la même ville, annonce diverſes machines de nouvelle invention, curieuſes & ſurtout utiles pour la navigation.

—— —— une lettre de Mr. de *Magellan*, Gentil-homme Portugais à Londres, qui communique diverſes nouvelles littéraires très intéreſſantes.

Le 31 Mars. Mr. le Prof. *Güldenſtädt* a lu une lettre de M. l'Abbé *Toaldo* à Padoue, qui communique le réſultat & les concluſions intéreſſantes, qu'il a tirées des obſervations barométriques & thermométriques, faites à Padoue pendant une ſuite non interrompue de plus de 40 années.

Le 7 Avril. Mr. le Prof. *Krafft* a remis la deſcription du grand Planetaire qui ſe trouve à la Bibliotheque de l'Academie, avec une inſtruction pour s'en ſervir.

Le 24 Avril. Mr. le Prof. *Lepechin* a communiqué une lettre de Mr. le Prof. *Spielmann* à Strasbourg, qui

(*) Pag. 65.

qui envoye à l'Académie une collection de 500 diverses especes de femences.

Le 28 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. *Leibl*, Baillif près de Manheim, qui prétend avoir decouvert l'or potable & le remede universel.

Le 1 Mai. Mrs. les Académiciens chargés de composer un Prospectus détaillé du grand ouvrage de Géographie de Russie que l'Académie s'est engagée à donner au Public, ont remis les résultats de leurs déliberations, & la premiere ebauche du Prospectus même avec leurs remarques & observations (*).

Le Secrétaire a communiqué la lettre circulaire des Mrs. *Gianesini* & *Faccioli* à Venise, qui annocent leur entreprise de construire un Planétaire qui doit montrer avec la plus grande exactitude tous les mouvemens des Astres.

Le 5 Mai. Mr. le Prof. *Pallas* a lu la réponse de Mr. le Prof. *Camper* concernant le crane & les ossemens de Rhinoceros, & contenant encore diverses observations très intéressantes sur des objets de Zoologie & d'Anatomie comparée.

Le 8 Mai. Mr. le Prof. *Roumovsky* a communiqué une lettre du Conseiller d'Etat Mr. *Diakof*, qui annonce qu'on vient d'achever le conducteur de la foudre appliqué au Clocher de l'Eglise de St. Pierre & St. Paul dans la Forteresse, & que les Académiciens qui en avoient fourni l'idee & la construction sont invités à se rendre sur le lieu pour y examiner si les ouvriers ont exactement suivi & observé les instructions qui leur avoient été prescrites (**).

Le 15 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg, qui envoye à l'Académie ses ouvrages & diverses dissertations séparées; entre

n 2 autres

(*) Ce Prospectus sera inséré au Sémestre suivant.

(**) On en fera mention dans le Volume qui contiendra l'Histoire de l'année 1776.

autres ses Institutions de Matiere médicale en latin & ses mémoires sur l'air fixe.

Le 19 Mai. Le Secrétaire a lu quelques passages d'une lettre du Conseiller Aulique Mr. *Kaestner* à Göttingue, qui envoye un imprimé allemand sur la vie & les mérites de *Daniel Speckle*, célebre Architecte Ingénieur du XVI[e] Siecle.

Le 29 Mai. Mr le Prof. *Pallas* a communiqué une lettre de Mr. le Baron *de Meidninger* à Vienne, sur la découverte très importante de préparer les bois & en général toutes sortes de matieres combustibles: ensorte qu'elles ne puissent plus s'enflammer ni communiquer le feu aux corps qu'elles touchent.

Le 2 Juin. Le Secrétaire a présenté l'Histoire & les Mémoires de la Societé formée à Amsterdam en faveur des Noyés. Tom. II, 2[de] Partie.

Le 9 Juin. Mr. le Prof. *Pallas* a remis un Paquet de Semences exotiques, que Mr. le Prof. *Bourmann* a envoyées pour le Jardin Académique.

Le 26 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre du Curateur & des Préposés de l'Institut d'education à Dessau, concernant une nouvelle Edition de la Philosophie pratique du célebre Prof. *Basedow*.

Le Conseiller d'Etat actuel Mr. *de Stehlin* a remis le Programme publié par la Societé Hollandoise des Sciences de Harlem pour le Prix de 1777.

Le 30 Juin. Le Secrétaire a présenté un Prospectus imprimé d'un Ouvrage nouveau intitulé *Fragmens de Physionomie*, ou l'Auteur, Mr. *Lavater* à Zurich se propose d'exciter l'homme à connoitre & à aimer ses semblables. Traduction françoise du grand ouvrage allemand, mais rédigé & corrigé considérablement par l'Auteur même.

MATHE-

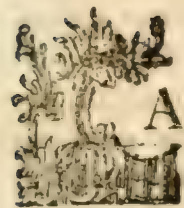
MATHEMATICA.



DIIVDICATIO
MAXIME PROBABILIS PLVRIVM OBSERVATIONVM DISCREPANTIVM ATQVE VERISIMILLIMA INDVCTIO INDE FORMANDA.

Auctore
DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.



Astronomis potiſſimum, genti ſagaciſſime ſcrupuloſae, diiudicandas proponam haeſitationes, quas mihi aliquoties feci, de regula, ad quam confugiunt omnes, quoties plures de eadem re factas prae ſe habent obſeruationes aliquantulum inter ſe diſcrepantes; ſcilicet obſeruationes tunc omnes in vnam colligunt ſummam, quam poſtmodum diuidunt per obſeruationum numerum; quod a diuiſione oritur, pro vera accipiunt quantitate quaeſita, donec aliunde meliora et certiora fuerint edocti. Hoc modo ſi ſingulae obſeruationes eiusdem veluti ponderis cenſeantur, incidunt in centrum grauitatis,

 quod

quod pro vera obiecti explorati positione accipiunt; haec quoque regula conuenit cum ea, qua vtuntur in arte coniectandi, si omnes aberrationes in obseruando commissae aeque facile contingere supponantur.

§. 2. An vero recte statuitur, singulas obseruationes eiusdem esse ponderis vel momenti, siue in quosuis errores aeque pronas esse? an errores aliquot graduum aeque facile committentur atque alii totidem minutorum? an eadem vbique probabilitas? absona plane foret haec affirmatio; haec procul dubio caussa est, quod malint astronomi prorsus reiicere obseruationes, quas iudicant nimium a veritate recedere, caeteras vero retineant, imo plane ad eundem censum referant: Id vero dum faciunt, satis et plus satis monstrant, multum abesse, vt idem statuant pretium singulis a se factis obseruationibus, dum alias reiiciunt totas, alias omnes non solum retineant sed insuper eodem modulo metiantur; nec video limites, quos vltra citraue sint vel penitus reiiciendae vel integrae retinendae; quin forte euenire potest, vt obseruatio, quae reiicitur, optimam praestitura fuisset reliquis correctionem. Attamen non improbo vbiquaque consilium reiiciendae vnius alteriusue obseruationis, imo probo, quoties inter obseruandum sinistri aliquid acciderit, quod per se ipsum protinus scrupulum iniiciat obseruatori, antequam consuluerit euentum eumque cum caeteris obseruationibus contulerit; si nihil tale habeat, quod conqueratur, existimo admittendas esse singulas obseruationes, qualescunque fuerint; modo obseruator sibi sit conscius omnis adhibitae industriae.

§. 3. Liceat obseruatorem comparare cum sagittario, tela sua in propositam metam coniiciente, adhibita omni, qua pollet, industria. Detur ipsi pro meta integra linea verticalis, ita vt singulae aberrationes sub vnica directione horizontali aestimandae veniant; putetur meta linearis depicta

picta in medio plano verticali, perpendiculariter ad axem visionis erecto, totumque planum ab vtroque latere in fascias verticales, angustas sed singulas eiusdem latitudinis, diuisum sit. Quod si nunc persaepe sagitta vibrata fuerit et pro quouis iactu locus illisionis examinatus eiusque distantia a meta verticali in charta notetur, etiamsi euentus minime possit exacte praedici, multa tamen sunt, quae cum ratione praesumi debent et quae imprimis ad rem nostram facere poterunt, si modo nulli alii committantur errores, quam qui in vtramque partem aeque faciles sunt et quorum euentus penitus incerti, sola veluti sorte haud vitabili deciduntur; sic in astronomia pro errore non habetur, quodcunque *a priori* correctionem admittit. Factis omnibus quas theoria docet correctionibus, quod tunc reliquum est pro conciliandis singulis obseruationibus aliquantulum inter se discrepantibus, hoc solius artis coniectandi opus est; quid proprie inter obseruandum acciderit, hoc, per ipsam hypothesin, profunde ignoramus, sed ipsa haec ignorantia asylum erit, ad quod confugere cogimur, dum consistimus in eo, non quod verissimum sed quod verisimillimum, nec certum sed probabilissimum, vt ars illa docet. An vero status iste semper et vbique competat medio arithmetico adhiberi solito, non sine ratione dubitari potest.

§. 4. Errores, in obseruando ineuitabiles, in singulas vtique cadere possunt obseruationes; attamen vnaquaeuis obseruatio suo gaudet iure nec liceret vllam vim ipsi inferre, si sola facta fuisset; igitur quaeuis obseruatio per se sarta atque tecta sit oportet; nulli aliud statuendum est pretium, quam quod ipsi compertum fuit; quia vero sibi contradicunt, pretium statuendum erit toti obseruationum complexui intactis partibus: Sic singulis obseruationibus certus quidam error attribuitur; existimo autem, quod inter in-

 fini-

finitos modos, quibus obſeruationum errores contingere potuerunt, is ſeligendus ſit, qui maximo probabilitatis gradu, pro integro obſeruationum complexu, donatus fuerit.

Regulam hanc quam propouo vltro admittent omnes, ſi modo pro quauis obſeruatione probabilitatis gradus ratione puncti, quod pro vero aſſumitur, definiri poſſit. Equidem libens fateor, hanc poſtremam conditionem haud eſſe determinatam, ſimul autem mihi perſuadeo, non eſſe omnia perinde incerta, atque meliora dari poſſe, quam quae a regula communiter recepta expectari poſſint; videamus, annon quaedam iure merito praeſumi debeant in hoc argumento, quae non nihil ad maiorem probabilitatem conferant. Examen incipiam a generalioribus.

§. 5. Si innumeros veluti iactus fecerit ſagittarius, de quo §. 3. verba feci, et quidem omnes tota ſua, qua pollet, induſtria; ſagittae ferient modo faſciam primam metae proximam, modo ſecundam, modo tertiam et ſic porro, idque perinde intelligendum eſt de vtroque latere an dextro an ſiniſtro; annon per ſe clarum eſt, tanto denſiores et frequentiores praeſumendos eſſe ictus in vnamquamuis faſciam, quanto propius haec fuerit poſita a meta? ſi omnes in plano erecto loci vtcunque a meta diſtantes eſſent aeque expoſiti, nihil valeret dexterrimus iaculator prae caeco. Id tamen ſtatuunt tacite, qui regula vtuntur communi in aeſtimandis variis obſeruationibus diſcrepantibus, quando nullo diſcrimine omnes habent. Hoc igitur modo vnius cuiusuis aberrationis gradus probabilitatis *a poſteriori* determinari aliquatenus poſſet, cum dubium non ſit pro magno iactuum numero, quin probabilitas ſit vt numerus iactuum impingentium in faſciam ad datam a meta diſtantiam poſitam.

Porro non eſt dubium, quin maxima aberratio ſuos habeat limites, quos nunquam transgrediatur et quidem

tanto

tanto angustiores, quanto exercitatior atque dexterior fuerit obseruator. Extra hosce limites omnis probabilitas nulla est; a limitibus versus mediam metam increscet probabilitas atque maxima erit in ipsa hac meta.

§. 6. Praefatae annotationes aliquam sistunt ideam de scala probabilitatum pro omnibus aberrationibus, quam quisque obseruator sibimet ipsi formare debeat, non quidem ad amussim veram, sed tamen naturae quaestionis haud male accommodatam: meta proposita est veluti centrum virium, in quod nituntur obseruatores; his vero conatibus innumerae opponuntur imperfectiones minimaque alia obstacula latitantia, quae paruulos iniicere possunt obseruationibus errores fortuitos, alios conspirantes ad eandem plagam, alios sibi inuicem contrarios, prouti fortuna fuerit plus minusue infesta. Intelligitur hinc, aliquam esse relationem inter errores commissos, et ipsam veram positionem centri virium ita vt pro alia metae positione aliter aestimandus sit fortunae euentus: hoc modo incidimus proprie in problema, quo determinanda est positio metae quam maxime probabilis ex cognitis aliquot ictuum locis. Ex allatis sequitur, quod ante omnia scala concipienda sit inter varias distantias a centro virium, quod in ipso scopo vel meta positum erit, et respondentes probabilitates: vtcunque vaga sit huius scalae determinatio, videtur tamen variis subiici axiomatibus, quibus si satisfaciamus, non possimus non in meliora incidere, quam si ponamus singulas aberrationes vtcunque magnas aequa facilitate committi atque adeo aequa probabilitate esse donatas. Concipiamus lineam rectam, in qua diuersa puncta sint positione data, quae nimirum diuersarum obseruationum euentus indicent; notetur in hac linea punctum aliquod intermedium, quod pro vera positione determinanda accipiatur; ex singulis punctis erigantur perpendiculares, quae probabilitates, cuiuis puncto conveni-

venientes exprimant; ſi curua ducatur per extremitates ſingularum perpendicularium, haec nobis ſcala erit probabilitatum, de qua ſermo eſt.

§. 7. Ad huius deſcriptionis ſenſum mihi veriſimile ſit, ſequentia ſcalae probabilitatum vix denegari poſſe lemmata.

(*a*) Ex eo, quod aberrationes a vero puncto intermedio ad vtramque partem ſint aeque-faciles, ſequitur, ſcalam duos habituram eſſe ramos perfecte ſimiles et aequales.

(*b*) Frequentiores vtique erunt atque adeo probabiliores prope a centro virium obſeruationes ſimulque tanto rariores, quanto magis ab iſto centro recedunt: ergo ſcala ab vtraque parte verget ad lineam rectam, in quam coniecta cenſemus loca obſeruata.

(*c*) Intenſitas probabilitatis maxima erit in medio, vbi centrum virium locatum ſupponimus, eritque tangens ſcalae pro hoc puncto parallela cum praefata linea recta.

(*d*) Si verum eſt, quod autumo, obſeruationes vel inauſpicatiſſimas ſuos habere limites, quos quisque obſeruator ſibimet ipſi optime ſtatuet, ſequitur ſcalam recte ordinatam in ipſis limitibus eſſe pertacturam ad obſeruationum lineam; etenim pro ambabus extremitatibus euaneſcit tota probabilitas errorque maior fit impoſſibilis.

(*e*) Denique ex eo, quod ambae aberrationes maximae tanquam limites cenſentur inter id, quod contingere poteſt et quod fieri nequit, oportet vt vltima ſcalae particula, ab vtroque latere, praecipitanter tendat ad lineam, in qua puncta obſeruata locantur, ſic vt tangentes in punctis extremis fiant ad eandem lineam propemodum perpendiculares et vt ipſa

ſcala

ſcala indicet, transgreſſum fieri vix poſſe vltra limites ſuppoſitos: nec tamen haec conditio omnem requiret rigorem, ſi modo haud nimis confidenter erroribus limites poſueris.

§. 8. Quod ſi iam ſuper linea, quae totum aberrationum poſſibilium campum repraeſentat, veluti ſuper axe conſtruatur ſemi ellipſis cuiuscunque parametri, haec profecto haud male praefatis conditionibus ſatisfaciet; parameter autem ellipſis ideo arbitraria eſt, quod hic tantum de proportione inter probabilitates, pro quauis aberratione militantes, ſermo ſit: vtcunque elongata vel compreſſa fuerit ellipſis ſuper eodem axe conſtructa, idem praeſtabit officium, quod indicat non eſſe, vt nimis ſimus ſoliciti de accurata ſcalae deſcriptione. Licebit adeoque ipſum adhibere circulum, non vt geometrice verum ſed vt vero multo propiorem, quam eſt linea recta indefinita axi parallela, quae ſingulas obſeruationes ſupponit aeque ponderoſas atque probabiles, vtcunque a vera poſitione diſtantes: eſt quoque haec ſcala circularis aptiſſima calculis numericis; hoc interim in anteceſſum monuiſſe e re erit, vtramque hypotheſin ad idem recidere, quoties ſingulae aberrationes pro infinite paruis habentur: ita quoque conſpirant ambae hypotheſes, ſi radius ſemicirculi auxiliaris ponatur infinite magnus aeque ac ſi aberrationibus nulli limites eſſent circumſcripti. Hoc modo ſi aberratio obſeruationis a vera poſitione conſideretur tanquam ſinus alicuius arcus circularis, repraeſentabitur probabilitas illius obſeruationis per coſinum eiusdem arcus. Liceat ſemicirculum ſubſidiarium, quem nunc deſcripſi, epitheto *moderatoris* inſignire: vbi autem centrum ponitur iſtius ſemicirculi, ibi vera poſitio, obſeruationibus quam maxime conueniens, ſtatuenda eſt. Equidem precaria aliquo vsque, at certiſſime communi praeferenda eſt hypotheſis noſtra nec vnquam in-

telli-

telligentibus periculosa erit, quoniam euentus, quem statuent, semper erit maiori probabilitate donatus, quam si methodo communi adhaerescant: cum ex natura rei decisio certa non detur, nil superest, quam vt probabilius praeferatur minus probabili.

§. 9. Methodum istam philosophandi triuiali quodam illustrabo exemplo: conciliandae proprie sunt obseruationes discrepantes; ergo de differentia obseruationum agitur; quod si autem aleator vna cum alea tres fecerit iactus, quorum secundus primum vno puncto, tertius secundum duobus punctis excesserit, iactus tribus modis oriri potuerunt, nempe 1. 2. 4 vel 2. 3. 5 vel 3. 4. 6; horum iactuum nullus duobus caeteris est praeferendus; singuli sunt per se aeque probabiles; si praeferas modum medio loco positum, nempe 2. 3. 5, id absque vlla ratione feceris; simile quid contingit, si obseruationes pro parte euentuales, siue astronomicas siue alius generis, pro aeque probabilibus haberi velis; iam vero finge aleatorem iactibus duarum alearum, ter iterum repetitis, eundem plane habuisse euentum; tunc octo diuersis modis hunc euentum obtinere potuit, nempe 2. 3. 5; 3. 4. 6; 4. 5. 7; 5. 6. 8; 6. 7. 9; 7. 8. 10; 8. 9. 11 et 9. 10. 12. at multum abest, vt eorum singuli sint aeque probabiles; notum enim est, probabilitates respectiuas progredi vt numeri 8; 30; 72; 100; 120; 90; 40 et 12; ex hac autem scala cognita iure concludo potiori, modum contigisse quintum ceu maxima probabilitate donatum, quam vllum alium, atque sic tres iactus binarum alearum fuisse 6, 7 et 9; nemo tamen inficias ibit, potuisse forte fortuna modum primo loco positum 2, 3 et 5 contingere, vtut tantum decima quinta probabilitatis parte, quae modo quinto competit, donatum; sic nihil aliud facio quam quod, seligere coactus, seligam quod maxime est probabile. Quamvis istud exemplum nondum plane quadret ad argumentum

no-

noſtrum, intelligitur tamen ex illo, quid diſquiſitio probabilitatum ad diiudicandos caſus conferre poſſit. Iam vero rem ipſam propius aggredior.

§. 10. Velim ante omnia, vt quisquis obſeruator probe ſecum perpendat atque aeſtimet maximum errorem, quem nunquam ſe transgreſſurum, quotiescunque obſeruationem repetat, moraliter certus ſit, ſi vel omnes Deos Deasque offendat iratas; ſit ipſemet dexteritatis ſuae iudex nec ſeuerus nec blandus. Nec tamen admodum multum refert ſiue congruum ſiue quodammodo temerarium ea de re tulerit iudicium: tum radium *circuli moderatoris* faciat maximo errori praememorato aequalem: ſit radius iſte $= r$ atque proin latitudo totius campi ambigui $= 2r$; ſi hac de re praecepta deſideres omnibus obſeruatoribus communia, ſuadeo, vt iudicium demum componas ad ipſas, quas feceris, obſeruationes: ſi enim differentiam inter duas obſeruationes extremas duplices, ſat tuto, mea ſententia, ea vteris pro diametro circuli moderatoris vel, quod eodem recidit, facies radium aequalem differentiae inter duas obſeruationes extremas: imo ſufficiet fortaſſe ſesquiplicare hanc differentiam ad formandam diametrum circuli, ſi plures inſtitutae fuerint obſeruationes; ego quidem duplicarem pro tribus vel quatuor obſeruationibus, ac ſesquiplicarem pro pluribus. Ne vero haec vagatio quemquam offendat, haud abs re erit monuiſſe, quod ſi infinitum faciamus ſemicirculum noſtrum moderatorem; tunc demum incidamus in regulam communiter adhibitam pro medio arithmetico; ſi vero circulum diminuamus quantum fieri absque contradictione poteſt, obtineamus mediam inter duas obſeruationes extremas, quam regulam pro pluribus obſeruationibus inſtitutis, minus pleiumque fallere vidi, quam credideram nondum explorata re.

§. 11. His omnibus praeparatis denique ſupereſt, vt poſitio circuli moderatoris determinetur, quandoquidem in

 huius

huius circuli centro ſingulae obſeruationes veluti concentratae cenſeri debeant. Deducitur autem praefata poſitio ex hoc principio, quod totus obſeruationum complexus pro illo ſitu facilius proindeque probabilius contingat, quam pro vlla alia circuli poſitione: habebimus ſic verum probabilitatis gradum pro toto obſeruationum complexu, ſi pro ſingulis obſeruationibus inſtitutis reſpondentem probabilitatem notemus atque omnes probabilitates inter ſe multiplicemus, plane vt feci §. 9. Deinde productum, quod a multiplicatione oritur, differentietur tandemque hoc differentiale ponatur $= 0$. Hoc modo aequationem obtinebimus, cuius radix dabit diſtantiam centri a dato aliquo loco.

Ponatur radius circuli moderatoris $= r$; minima obſeruatio $= A$; ſecunda $= A + a$; tertia $= A + b$; quarta $= A + c$; etc. diſtantia centri ſemicirculi moderatoris a minima obſeruatione $= x$, ita vt $A + x$ denotet quantitatem, quae probabiliſſime ex omnibus obſeruationibus praeſumenda ſit; erit, per hypotheſin noſtram, probabilitas, pro ſola prima obſeruatione, exprimenda per $\sqrt{rr - xx}$; pro ſecunda obſeruatione per $\sqrt{rr - (x-a)^2}$; deinde per $\sqrt{rr - (x-b)^2}$; poſtea per $\sqrt{rr - (x-c)^2}$ et ſic porro. Poſtmodum velim ſecundum praecepta artis coniectandi, vt ſingulae probabilitates inter ſe multiplicentur, quo facto habebitur

$$\sqrt{rr - xx} \times \sqrt{rr - (x-a)^2} \times \sqrt{rr - (x-b)^2} \times \sqrt{rr - (x-c)^2} \times \text{etc.}$$

Denique ſi huius producti differentiale ponatur $= 0$, dabit aequatio, vi noſtrarum hypotheſium, valorem quaeſitum x ceu maxima probabilitate donatum. Quoniam vero praefata quantitas ad ſtatum maximi valoris reducenda eſt, patet, fore ſimul eius quadratum ad hunc ſtatum reductum: licebit igitur, commodioris calculi ergo, formula vti ex meris terminis rationalibus compoſita, nempe

$$(rr - xx) \times (rr - (x-a)^2) \times (rr - (x-b)^2) \times (rr - (x-c)^2) \times \text{etc.}$$

cuius

cuius differentiale iterum ponendum eſt $=0$; caeterum tot ſumendi ſunt factores, quot obſeruationes factae fuerunt.

§. 12. Si vnica inſtituta fuerit obſeruatio, aliter non poſſumus, quin ipſam obſeruationem pro vera accipiamus; id vero etiam indicat hypotheſis noſtra; ſi enim primus factor $rr-xx$ ſolus accipiatur, habebitur $-2x\,dx=0$ vel $x=0$ proindeque $A+x=A$: ſic noſtra cum communi hypotheſi coincidit hoc caſu.

Si duae factae fuerint obſeruationes A et $A+a$, accipiendi ſunt duo factores, ſcilicet $(rr-xx)\times(rr-(x-a)^2)$ vel $r^4-2rrxx+x^4+2arrx-aarr-2ax^3+aaxx$, cuius quantitatis differentiale $=-4rrx\,dx+4x^3\,dx+2arr\,dx-6axx\,dx+2aax\,dx=0$ ſiue $2x^3-3axx-2rrx+aax+arr=0$, quae aequatio pro radice vtili dat $x=\frac{1}{2}a$ atque $A+x=A+\frac{1}{2}a$, quod idem rurſus hypotheſis communis docet. Haecque coincidentia ſubſiſtit, qualiscunque adhibeatur radius circuli moderatoris, quod ſatis indicat pro pluribus inſtitutis obſeruationibus, magnitudinem circuli noſtri moderatoris ad amuſſim exactam, nec in huiusmodi negotio requiri nec expectandam eſſe. Id vero, quod haud diſſimulabo, ſiniſtrum eſt, quod pro pluribus obſeruationibus calculus requiratur prolixiſſimus, ita vt vix aliter quam *in abſtracto* diſcuſſiones haſce proponere audeam. Liceat ſaltem theoriam trium obſeruationum, quae maximi eſt momenti, exponere.

§. 13. Quando praeſto ſunt tres obſeruationes, nempe A; $A+a$ et $A+b$, habebimus tres factores

$$(rr-xx)\times(rr-\overline{x-a}^2)\times(rr-\overline{x-b}^2),$$

pro quibus ſtatus valoris *maximi* eſt definiendus. Si vero hi factores actu inter ſe multiplicentur, obtinebitur

$$\begin{array}{lllllll}
r^6 & +2ar^4x & -3r^4xx & -4arrx^3 & +3rrx^4 & +2ax^5 & -x^6 \\
-aar^4 & -2abbrrx & +2bbrrxx & +2abbx^3 & -bbx^4 & +2bx^5 & \\
-bbr^4 & +2br^4x & -aabbxx & -4brrx^3 & -4abx^4 & & \\
+aabbrr & -2aabrrx & +4abrrxx & +2aabx^3 & -aax^4 & & \\
 & & +2aarrxx & & & &
\end{array}$$

Si haec

Si haec quantitas differentietur, tumque, postquam diuisa fuit per elementum dx, pro statu maximi valoris ponatur $=0$, sequens habebitur aequatio generalis pro institutis tribus obseruationibus qualibuscunque

$$\begin{aligned}
&2ar^4 - br^4x - 12arrxx + 12rrx^3 + 10ax^4 - 6x^5 = 0.\\
&-2abbrr + 4bbrrx + 6abbxx - 4bbx^3 + 10bx^4\\
&+2br^4 - 2aabbx - 12brrxx - 16abx^3\\
&-2aabrr + 8abrrx + 6aabxx - 4aax^3\\
&\quad + 4aarrx
\end{aligned}$$

Radix huius aequationis, quae quidem est quinque dimensionum et ex viginti terminis constat, dabit distantiam centri circuli moderatoris a prima obseruatione atque quantitas $A+x$ dabit valorem probabilissime ex factis tribus obseruationibus deducendum.

§. 14. Pauci fortasse erunt, nisi omni cum attentione principiorum nostrorum energiam perpenderint, qui vllam aliquam suspicentur relationem inter aequationem enormem leuissimamque quae videtur quaestiunculam; statuitur enim communiter $x = \frac{a+b}{3}$. Attamen non male respondet aequatio nostra omnibus notionibus aliunde obuiis, quarum nunc aliquas exponam.

(a) Si statuatur radius circuli moderatoris infinitus prae vagantibus quantitatibus a et b, reiiciendi sunt omnes termini praeter illos, in quibus littera r ad maximam dimensionem ascendit; sic integra aequatio ad hanc simplicissimam reducitur $2ar^4 + 2br^4 - 6r^4x = 0$ siue $x = \frac{a+b}{3}$: ergo regula communis continetur in aequatione nostra: Quod si vero definitio nostra, paragrapho decimo exposita, perpendatur, apparebit, quam incongrua sit hypothesis pro radio infinito et quam manifeste alia aptior ipsi substitui possit.

(b) Si ponatur $b = 2a$, perspicuum est fore $x = a$ qualiscunque valor detur radio r idque rursus commune erit

erit vtrique theoriae. Videamus igitur, quid pro hoc casu doceat aequatio nostra; haec facta substitutione pro quantitate b, abit in hanc alteram

$$\begin{array}{llllll} bar^4 - & 6r^4x & -36arrxx & +12rrx^3 & +30ax^4 & -6x^5 = 0. \\ -12a^3rr & +36aarrx & +36a^3xx & -52aax^3 & & \\ & -\ 8a^4x & & & & \end{array}$$

Huic autem aequationi, qualiscunque fuerit valor r, omnino satisfacit valor $x = a$, quod ipsa rei natura postulat pro hoc casu.

(c) Si fuerit $b = -a$, oportet vtique vt fiat $x = 0$, quiscunque sit valor r; id ipsum vero egregie itidem indicat aequatio nostra, quae nunc abit in hanc alteram

$$\begin{array}{lll} -6r^4x & +12rrx^3 & -6x^5 = 0 \\ -2a^4x & +\ 8aax^3 & \end{array}$$

haec autem primo intuitu monstrat radicem vtilem $x = 0$.

§. 15. Haec et alia similia corollaria satis confirmant verum nexum principiorum nostrorum cum argumento, quod commentamur, vtcunque enormis appareat, in quaestione tam simplici, inuenta aequatio. Progredior ad exempla, in quibus radius circuli moderatoris nec infinitus nec adiaphorus sit: huc autem pertinent fere omnia: In his exemplis semper differt noua ista theoria a communi et tanto magis differt, quanto magis obseruatio intermedia accedit ad alterutram extremam: In his discussionibus cardo negotii vertitur: Igitur recurrere debemus ad exempla pure numerica

Exemplum 1. Assumamus tres obseruationes A; A + 0, 2000 et A + 1, 0000, ita vt sit $a = 0, 2000$ et $b = 1, 0000$;

ponaturque pro valore ex his tribus obseruationibus quam probabilissime praesumendo A + x; dabit regula communis $x = 0, 4000$: Videamus nouam, meo iudicio, probabiliorem;

vtamur

vtamur autem poſitione $r = 1,000$ (conf. §. 10.). His poſitis emergit ſequens aequatio pure numerica

$$1,9200 - 0,3200\,x - 12,9600\,xx + 4,6400\,x^3 + 12,0000\,x^4 - 6x^5 = 0$$

pro qua inuenitur, quam proxime, $x = 0,4427$, qui valor alterum, communiter receptum, plusquam decima eius parte excedit. Notabilis iſte exceſſus exinde originem duxit, quod obſeruatio media multum admodum propior ſit primae, quam tertiae. Hinc facile praeſumitur exceſſum in defectum mutatum iri, ſi media obſeruatio propior ſit tertiae quam primae, iſtumque defectum tanto minorem fore, quanto minor aſſumpta fuerit differentia obſeruationis mediae inter vtramque diſtantiam a duabus obſeruationibus extremis. Vt coniecturam experirer, retentis caeteris valoribus, ſolam mutaui obſeruationem mediam, vt ſequitur.

Exemplum 2. Sit igitur nunc $a = 0,5600$, poſito rurſus $r = b = 1,0000$; habebimus pro regula communiter recepta, $x = 0,5200$. Videamus de noſtra: Dabit nunc aequatio paragraphi decimi tertii ſequentem aequationem numericam

$$1.3728 + 3,1072\,x - 13,4784\,xx - 2,2144\,x^3 + 15,6000\,x^4 - 6x^5 = 0;$$

cui proxime ſatisfacit $x = 0,5128$: Nunc igitur valor x minor fit ſecundum principia noſtra, quam eſt medius arithmeticus communiter receptus; differentia autem inter vtrumque valorem iam admodum exigua eſt, quippe $= 0,0072$, plane vt in anteceſſum rem fore praeſumſeram. Hinc etiam videtur maximum diſcrimen inter vtramque aeſtimationem fore, ſi forte fortuna contigerit vt duae obſeruationes perfecte coinciderent, ſola tertia euagante: id duobus diuerſis modis obtinetur, nempe ſi ponatur vel $a = 0$ vel $a = b$. Euentum pro vtroque caſu exponam.

Exem-

Exemplum 3. Sit $a = 0$ retentis reliquis denominationibus; habebimus (facta diuisione aequationis per $2b - 2x$) hanc aequationem numericam:

$$1.0000 - 6.0000\,xx - 2.0000\,x^3 + 3.0000\,x^4 = 0,$$

cui proxime satisfacit valor $x = 0.3977$, qui ab regula communi reperitur $x = 0.3333$. prior alterum superat quantitate 0,0644: Quod si vero ponatur $a = b$, oritur aequatio (postquam diuisa fuit per $2x$) quae sequitur:

$$4.0000 - 6.0000\,x - 6.0000\,xx + 10.0000\,x^3 - 3.0000\,x^4 = 0.$$

huic nunc aequationi satisfacit valor $x = 0.6022$ quam proxime, qui communiter statuitur $= 0,6666$; Ergo differentia inter vtrumque valorem est iterum, vt ante, $= 0,0644$; nunc autem nouus noster valor minor est communi, cum in priori casu esset maior, vnde apparet methodum nostram collimare ad punctum aliquod intermedium melius quam methodus communis: huiusmodi criteria haud parum commendant methodum quam propono; hanc animaduersionem paulo accuratius discutiam, vt saltem argumentum, quod dicitur ad hominem, habeatur in re, quae demonstrationem geometricam haud admittit.

§. 16. Si vtrumque casum in exemplo tertio expositum inter se combinemus, ita vt sex institutas fuisse obseruationes putemus, nempe $A.A.A+b$ et $A+b.A+b.A$, patet sic tres obseruationes facere pro valore A et totidem pro valore $A+b$; vidimus autem §. 12. in hoc casu vtramque methodum indicare medium valorem quaesitum $= A + \frac{1}{2}b$ siue, pro exemplo tertio, $= A + 0,5000$, aut, omissa quantitate permanente A, simpliciter $= 0,5000$: de hoc valore, ex vnitis sex obseruationibus deducto, nemo dubium mouebit: nunc vero hasce sex obseruationes resoluamus in duas alias triades, scilicet $A.A.A.+1,0000$. atque $A+1,0000.\ A+1,0000.A$: hoc modo dabit regula communiter recepta, pro prima triade, reiecta iterum quan-

titate A, dabit, inquam, pro prima triade valorem o, 3333 et pro ſecunda triade o, 6666; vterque a medio valore o, 5000 differt quantitate o, 1666, alter in defectu alter in exceſſu: noſtra autem methodus eosdem pro quauis triade, valores indicat o, 3977 et o, 6022, quorum vterque a medio valore o, 5000 differt o, 1022 et quidem pariter alter in exceſſu alter in defectu. Sic itaque theoria communis, pro quauis obſeruationum triade ſeorſim ſumta errorem committeret o, 1666, noſtra vero o, 1022 notabiliter minorem: huiusmodi criteria alia quam plurima afferri poſſent, quibus principia noſtra magis ſtabiliantur; at vereor ne nimius videar in adſtruenda re, quae certam omnique titulo perfectam determinationem haud admittit, nec enim ad altiora contendimus quam vt diiudicare poſſimus id quod magis ab eo quod minus probabile eſt.

§. 17. Si quae vlterior perfectio expectanda ſit, conſiſtet in accuratiori et ſtrictiori determinatione ſcalae moderatricis eiusque amplitudine: De hoc rei momento aliquas ſuperaddam notationes. Ex praemiſſis perpenſationibus liquet, non multum admodum recedere aeſtimationes noſtras ab regula communiter recepta: agitur ergo de correctione aliqua, quam admittere videtur haec regula; iſtam correctionem ſubminiſtrant ipſi diſceſſus obſeruationum a vero puncto quaeſito, qui ita ordinari poſſunt, pro quauis data ſcalae moderatricis amplitudine, vt probabiliſſime conueniant cum hoc puncto. At equidem nihil video, quo amplitudo praememoratae ſcalae ſtricte determinari poſſit, niſi quod ſubmonui §. 10. Si quis autem obſeruator, virium ſuarum vltra quam par erat diffiſus, nimium auxerit magnitudinem ſemicirculi moderatoris, hic quidem non omnem tulerit opem ſed certiorem; ſi, e contrario, nimium conſtrinxerit hanc ſcalam, incidet caeteris paribus in correctionem paulo maiorem et aliquantulum minus probabi-

babilem. Prudentia non minus quam perſpicacia hic opus eſſe videtur. Si ipſis inſtitutis obſeruationibus vti velis ad formandam *a poſteriori* aeſtimationem de adhibenda amplitudine ſcalae moderatricis, haud imprudenter actum erit, ſi tecum perpenderis, an feliciter vel infeliciter obſeruationes ceſſiſſe ſtatuendum ſit; quanto plus fortunae dederis, tanto minus dexteritati in obſeruando adhibitae tribues, tantoque proinde maiorem circulum moderatorem adhibebis. In paragrapho decimo quinto aſſumſi $r = b$, ſiue radium circuli moderatoris aequalem diſtantiae inter duas obſeruationes extremas: fateor tamen, re melius perpenſa, hancce radii magnitudinem mihi videri nimia aliquantulum confidentia poſitam; tutior vtique futura fuiſſet poſitio $r = \frac{3}{2} b$ vel etiam $r = 2b$; ſub hac poſitione correctio prodiret notabiliter minor at tanto certior maiorique fiducia adhibenda.

§. 18. Si quae efficacia inſit principiis noſtris, etiamſi metaphyſicis potius quam mathematicis, iure merito exinde concludemus, nunquam aut ſaltem rariſſime nec ſine omni adhibita circumſpectione reiiciendam eſſe aliquam obſeruationem, qua de re ſententiam meam in anteceſſum aperui §. 2. totus enim obſeruationum complexus nihil aliud eſt quam euentus fortuitus dexteritate obſeruatoris modificatus et intra certos fines coercitus. Inter tres obſeruationes contingere vtique poteſt, quamuis caſu rariſſimo, vt duae, mirum in modum, inter ſe conſpirent, tertia autem, infauſta ſorte, ab ambabus prioribus longiſſime recedat. Id vero ſi mihi contigerit, atque ſi certus fuero, me haud nimium coarctaſſe limites maximorum errorum poſſibilium aut nimium dexteritati mea fidiſſe, non haeſitarem totius rei examen ad principia noſtra reuocare ex iisque aeſtimationem formare: Modo obſeruator pro ſingulis obſeruatio-

 nibus

nibus parem adhibuerit induſtriam, quiscunque fuerit earum euentus; velim vt omnium aequa ratio habeatur.

§. 19. Vnicum ſupereſt monendum de ſcala, quam adhibui, moderatrice; vſurpauimus ſemicirculum, tanquam ſic ſatis reſpondentem conditionibus §. 7. expoſitis ſimulque calculis ſubducendis aptiſſimum; notabile interim eſt, infinitas dari alias curuas, quae plane ad eandem aequationem, quam in fine paragraphi decimi tertii expoſui, perducant: Pro ſcala circulari fecimus paragrapho vndecimo probabilitates reſpectiue proportionales applicatis $\sqrt{rr-xx}$; $\sqrt{rr-(x-a)^2}$; $\sqrt{rr-(x-b)^2}$. Quod ſi autem, ſemicirculi loco, ſupponamus arcum parabolicum ſuper linea $2r$ conſtructum, cuius axis per medium huius lineae perpendiculariter tranſeat, habebimus, retentis iisdem denominationibus, applicatas quasuis ſiue probabilitates inde expreſſas aequales

$$\frac{\varrho}{rr} \times \overline{rr-xx}; \ \frac{\varrho}{rr} \times (rr-\overline{a-x}^2); \ \frac{\varrho}{rr} \times (rr-\overline{b-x}^2) \text{ etc.}$$

vbi per nouam literam ϱ intelligo maximam applicatam pro abſciſſa $x=0$. Quia vero factor $\frac{\varrho}{rr}$ omnibus terminis communis eſt, poterit huic factori ſimpliciter vnitas ſubſtitui, quando productum ex omnibus et ſingulis probabilitatibus ad *maximum* reducendum eſt; vnde ſequitur parametrum parabolae arbitrariam manere; monui etiam in praefato paragrapho vndecimo, quod ſi idem productum ad ſtatum ſuum *maximum* fuit reductum, ſimul omnes eius dignitates praerogatiua maximi vel minimi gaudeant; hinc liquet vtramque ſcalam, parabolicam aeque ac circularem, ad eundem valorem quaeſitum x perducere. Sed et porro perſpicuum eſt, innumeras alias ſcalas idem praeſtare officium; erunt autem omnes eius indolis vt a ſummitate ſua in vtramque partem ad lineam $2r$, in quam ſingulae obſeruationes neceſſario incidere ponuntur, accedant eamque

inter-

interfecent. Ergo omnes huiusmodi fcalae ad fcopum noftrum collimant, nec eft vt hac in re nimis fimus meticulofi, ad meliora fi non ad optimum contendiffe contenti.

§. 20. Quod denique attinet ad incommodam fereque monftrofam aequationis noftrae fundamentalis §. 13. expofitae formam, poterit et huic incommodo aliquatenus occurri; dico enim fore propemodum radicem vtilem

$$x = \frac{a+b}{3} + \frac{2a^3 - 3aab - 3abb + 2b^3}{27rr}.$$

prius membrum nil aliud eft quam commune medium arithmeticum pro tribus obferuationibus, alterum indicat proxime correctionem, quam principia noftra porro exigunt: ifta quidem radix tanto accuratius cum aequatione §. 13. conueniet, quanto maior affumta fuerit amplitudo fcalae moderatricis indicata per $2r$; abfit tamen, vt fola calculi commoditate inducti valorem literae r praeter neceffitatem augeamus, quia omne augmentum inutile momento correctionis noftrae aliquid detrahit: Nec minus periculofum foret nimium viribus fuis in obferuando tribuere atque fic radium r vltra quam par eft contrahere: *Certi funt fines, quos vltra citraque nequit fubfiftere rectum.* conf. §. 10. Docent vel ipfa principia noftra fieri nunquam poffe vt fit $r < \frac{1}{2}b$, quia haec pofitio manifeftam implicaret contradictionem, dum id ipfum impoffibile poneretur, quod contigiffe fupponitur. Caeterum haud diffimulaui quae in argumentatione noftra paullo liberius affumpta fuerunt: crediderim tamen criteria noftra inftitutarum obferuationum non omnia propterea effe reiicienda: hoc faltem mihi perfuadeo, *regulam communem pro tribus obferuationibus peccare aliquantulum in defectu, quoties* $a < \frac{1}{2}b$ *atque in exceffu fi* $a > \frac{1}{2}b$, *nec vnquam certius adhiberi, quam cum obferuatio intermedia proxime aequidiftat a duabus extremis.* Deinde mihi probabile videtur aequationem noftram §. 13. tutius

et

et melius determinare poſitionem ſeligendam, modo radius circuli moderatoris haud temere diminuatur vltra limites, quos vires obſeruatoris permittunt: conf. §. 17. Quaeſtio autem, quam tractaui, proprie haec eſt, vt datis tribus pluribusne ſagittae iactibus, in linea recta notatis, determinetur poſitio probabiliſſima loci, quem ſagittarius pro ſcopo ſuo habebat. Sed vnusquisque obſeruator harum rerum intelligens pro natura argumenti, quod prae manibus habet, alia atque alia ſibi formabit criteria, ſcopo ſuo haud inutilia, ſi modo regulis, ex arte combinatoria depromtis, caute vtatur.

Recapitulatio. Problema noſtrum per ſe vtique eſt indeterminatum, quandoquidem pendet ab vſu, experientia, dexteritate obſeruatoris, a praeciſione inſtrumentorum, ab acie ſenſuum, ab innumeris denique circumſtantiis plus minus fauentibus: horum omnium ratio habebitur aſſumpta amplitudine aberrationum campi, qua de re, omni adhibita circumſpectione, ſententiam meam aperui. Deinde energia ſortis fortuitae exploranda eſt, quae pro quauis aberratione militet, quia vtile eſt vt cuiuis aberratione ſua, pro natura rei, conueniens aſſignetur probabilitas; haec equidem probabilitatum ſcala rurſus incerta atque indeterminata manet, ſi accurata deſideretur, attamen plures manifeſtat, ex ipſa rei natura, proprietates, quibus ſi ſatis fiat, poterit pro ſufficienter cognita haberi, quod plura tentamina me docuerunt. Inde modus innoteſcit exprimendi ſecundum praecepta in arte coniectandi demonſtrata, probabilitatem abſolutam cuiuis ſyſtemati obſeruationum dato conuenientem pro quouis ſitu aſſumpto eiusdem ſyſtematis. Sic aliud non ſupereſt, quam vt ille ſeligatur propoſiti ſyſtematis ſitus, qui maxima gaudet probabilitate. Mirabile prorſus mihi viſum eſt, quod aequatio algebraica, qua ſitus iſte definitur, tam longe petita, ad quintam dimenſio-

ſionem, pro tribus tantum obſeruationibus, aſſurgens, permagno terminorum numero expreſſa, ex principiis nunquam vſitatis deducta, denique nihil indicet, vndecunque examinetur, quod vllo modo diſplicere poſſit, multo minus ad abſurdum aliquod perducat: quod in quouis exemplo ab calculo emergit ſemper parum ab eo, quod methodus communis docet, differt ſi modo haud temere impingatur in praecepta, quae praeſcripſi: quoties tres obſeruationes datae ita ſunt comparatae vt media ab extremis fere aequaliter diſtet, absque ſcrupulo regulae communi adhaerebimus; at ſi ambo interualla ſint notabiliter inaequalia, conſultius exiſtimo ad theoriam noſtram confugere, ſi modo ad mentem praeceptorum, quae expoſui, omnique adhibita prudentia, aequi fines aberrationum campo ſtatuti fuerint. Caeterum haec omnia velim vt trutina potius methaphyſica quam mathematica perpendantur: Qui maxime principiis noſtris offenditur, ſi modo maximum ſimul ſtatuat aberrationum poſſibilium campum, nil porro quod redarguat habebit.

OBSER-

OBSERVATIONES IN PRAECEDENTEM DISSERTATIONEM *Illuſtr. Bernoulli.*

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quaeſtionem haud exigui momenti hic tractat Illuſtris *Bernoulli*, quemadmodum quantitatem incognitam ex pluribus obſeruationibus inter ſe parumper diſcrepantibus concludi oporteat. Cuius quaeſtionis indoles, quo clarius perſpiciatur, ponamus cuiuspiam loci eleuationem poli inueniri debere, plures autem obſeruationes hunc in finem inſtitutas praebere tales valores inter ſe diſcrepantes:

$\Pi + a$, $\Pi + b$, $\Pi + c$, $\Pi + d$, etc.

vbi litterae a, b, c, d, etc. v. gr. in minutis ſecundis expreſſae habeantur, ex quibus vera huius loci eleuatio poli, quae ſit $\Pi + x$, ſit concludenda. Vulgo quidem haec quantitas x per medium arithmeticum inter omnes quantitates a, b, c, d, etc. aſſignari ſolet; vnde ſi obſeruationem numerus fuerit $= n$, erit $x = \frac{a + b + c + d + etc.}{n}$.

§. 2. In hac autem regula manifeſto aſſumitur omnes obſeruationes pari gradu bonitatis eſſe praeditas. Si enim aliae aliis eſſent magis exactae, huius diſcriminis ratio vtique in computum duci deberet. Quanquam autem ex circumſtantiis nulla pateat ratio, cur vni harum obſeruationum maius pretium ſit tribuendum quam reliquis: tamen Celeberrimus Auctor obſeruat, his obſeruationibus eo maiorem gradum bonitatis adiudicari debere, quo propius ad veritatem acceſſerint, quemadmodum etiam vulgo eiusmodi obſeruationes quae nimis a veritate recedere cen-

ſen-

ſentur prorſus reiici ſolent. Totum igitur negotium huc redit, vt indicetur, quomodo gradus bonitatis ſingulis obſeruationibus conueniens ſit aeſtimandus.

§. 3. Secundum mentem autem Illuſtris Auctoris aberrationem cuiusque obſeruationis a veritate quaſi iam eſſet cognita perpendi conueniet, quae cum pro prima obſeruatione ſit $x-a$; pro ſecunda $x-b$; pro tertia $x-c$ etc. defectum cuiusque obſeruationis non tam ex his differentiis quam earum quadratis aeſtimari oportet; quandoquidem defectus ipſe idem eſt ſtatuendus, ſiue obſeruatio in exceſſu ſiue defectu aberrauerit. Hinc ergo ſi quaepiam obſeruatio cum veritate perfecte conueniat, eius defectus erit nullus: vnde ſi iſtius obſeruationis gradus bonitatis indicetur per rr, euidens eſt, gradum bonitatis primae obſeruationis indicari debere per $rr-(x-a)^2$, ſecundae per $rr-(x-b)^2$, tertiae per $rr-(x-c)^2$ et ita porro, vbi litterae r talis valor tribui debet, vt pro huiusmodi obſeruatione, quae tantum non reiicienda videatur, gradus bonitatis euaneſcat. Quare ſi ſumamus hoc contingere in obſeruatione, quae dediſſet $\Pi+u$, quoniam eius gradus bonitatis foret $rr-(x-u)^2$, ſtatui vbique debebit $rr=(x-u)^2$.

§. 4. His circa gradum bonitatis cuiusque obſeruationis ſtabilitis Illuſtris Auctor in ſubſidium vocat ſequens principium, cuius quidem nullam affert rationem: quod productum omnium illarum formularum, quibus gradus bonitatis ſingularum obſeruationum exprimitur, valorem *maximum* ſortiri debeat. Ex hoc ergo principio iubet iſtud productum differentiare, eiusque differentiale nihilo aequare, quandoquidem tum ex hac aequatione verus valor x ſit proditurus; id quod nonnullis exemplis, ad ternas obſeruationes accommodatis, illuſtrat, vnde eiusmodi valores pro x deriuat, qui veritati admodum conformes videantur.

§. 5. Iſtud autem principium pro tribus tantum obſeruationibus deduxit ad aequationem quinti ordinis, cuius radicem x aſſignare oportebat; et ſi quis idem principium ad quatuor obſeruationes accommodare vellet, perueniret ad aequationem ſeptimi gradus: quinque autem obſeruationes deducerent ad aequationem noni gradus et ita porro. Vnde manifeſto liquet, hanc methodum nullo modo ad caſus, vbi plures obſeruationes proponuntur, in vſum vocari poſſe, id quod etiam Illuſtris Auctor ingenue concedit, dum totam diſſertationem tanquam ſpeculationem mere metaphyſicam in medium attulerit.

§. 6. Verum quia Illuſtris Auctor hoc principium *maximi* nulla demonſtratione corroborauit, haud aegre feret, ſi dubia quaedam contra illud propoſuero. Namque aſſumamus inter obſeruationes propoſitas vnam reperiri, quae tantum non reiici debuiſſet, cuius ergo gradus bonitatis eſſet quam minimus, euidens eſt, productum omnium memoratarum formularum etiam ad nihilum redigi, ita vt nullo modo amplius pro maximo haberi poſſit, quantumvis magnum etiam fuiſſet omiſſa iſta obſeruatione. Principia autem artis coniectandi manifeſto declarant, eundem valorem quantitatis incognitae x prodire debere, ſiue talis obſeruatio omni bonitate deſtituta in calculum introducatur, ſiue penitus reiiciatur.

§. 7. Arbitror autem in hac quaeſtione opus non eſſe ad principium maximorum confugere, cum praecepta certiſſima artis coniectandi prorſus ſufficiant ad omnes huiusmodi quaeſtiones reſoluendas. Si enim primae obſeruationi, quae dederat $\Pi + a$ tribuamus pretium ſeu gradum bonitatis $= \alpha$, ſecundae $= \beta$, tertiae $= \gamma$, ex regulis huius artis quantitas incognita x ita determinatur, vt ſit

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + etc.}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + etc.}.$$

Hinc

Hinc igitur erit

$$\alpha(x-a)+\beta(x-b)+\gamma(x-c)+\delta(x-d)+\text{etc.}=0.$$

Manifeſtum autem eſt, ſi omnes gradus bonitatis inter ſe eſſent aequales, numerusque obſeruationum foret $=n$, tum reperiri $x=\frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{n}$ quemadmodum regula vulgaris exhibet. Ex quo intelligitur, quatenus gradus bonitatis inter ſe diſcrepat, eatenus diuerſos valores pro quantitate incognita x prodire poſſe.

§. 8. Cum igitur, vt Illuſtris Auctor ipſe affirmat, gradus bonitatis litteris α, β, γ, δ, indicati ſint

$$\alpha=rr-(x-a)^2,\ \beta=rr-(x-b)^2,$$
$$\gamma=rr-(x-c)^2,\ \delta=rr-(x-d)^2,\ \text{etc.}$$

poſterior forma aequationis inuentae erit:

$$\begin{matrix} rr(x-a)+rr(x-b)+rr(x-c) \\ -(x-a)^3-(x-b)^3-(x-c)^3 \end{matrix}\ \text{etc.}=0.$$

Vnde ſi numerus obſeruationum $=n$ et breuitatis gratia ponatur

$$a+b+c+d+\text{etc.}=A$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.}=B$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc.}=C$$

iſta aequatio redigetur ad ſequentem formam ſatis ſimplicem:

$$nrrx-Arr-nx^3+3Axx-3Bx+C=0$$

ſicque peruenimus ad aequationem cubicam, ex qua incognitam x facile definire licebit, quantuscunque fuerit obſeruationum numerus n.

§. 9. Quod ſi quantitatem r quaſi infinitam ſpectemus, qui eſt caſus, quo omnibus obſeruationibus idem bonitatis gradus tribui ſolet, neglectis reliquis terminis ex hac aequatione ſtatim deducitur

$$x=\frac{A}{n}=\frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{n},$$

D 2 pror-

prorſus vt regula, vulgo adhiberi ſolita, poſtulat. Quod ſi iam iſtum valorem deſignemus littera p, et in ipſis obſervationibus loco Π ſcribamus $\Pi + p$, ſingulos numeros a, b, c, d, etc. eadem quantitate p diminui oportebit, ſicque ſumma omnium, quam poſuimus A, nunc erit $A = 0$. Ne autem hic nouas litteras in calculum introducamus, ſtatim quantitatem Π ita conſtituere poterimus, vt ſi valores ſingularum obſeruationum ſtatuantur

$$\Pi + a;\ \Pi + b,\ \Pi + c,\ \Pi + d, \text{ etc.}$$

ſumma litterarum $a + b, + c + d +$ etc. futura ſit $= 0$; tum igitur pro quantitate x inuenienda habebitur iſta aequatio multo ſimplicior:

$$n x^3 - n r r x + 3 B x - C = 0$$

vnde ſi r eſſet infinitum, ſequeretur $x = 0$; hincque euidens eſt, ſi iſta aequatio plures habeat radices reales, tum minimam pro x ſumi debere, ita vt verus valor quaeſtus futurus ſit $= \Pi + x$.

§. 10. At vero eandem hanc quaeſtionem adeo ad aequationem quadraticam reuocare licebit introducendo eiusmodi obſeruationem, quae, perpenſis omnibus circumſtantiis, reiicienda videretur, propterea quod nullum gradum bonitatis eſſet habitura. Sit igitur talis obſeruatio $\Pi + u$, et quia per hypotheſin eius gradus bonitatis, qui eſt $r r - (x - u)^2$ debet eſſe nullus, fiet $r r = (x - u)^2$. Hic autem valor in aequationem poſtremo loco inuentam introductus producet hanc formam:

$$2 n u x x - n u u x + 3 B x - C = 0.$$

In qua aequatione terminum $- n u u x$ vt maximum ſpectari conueniet, ita vt aequatio hac forma referri queat:

$$x (n u u - 3 B - 2 n u x) = - C,$$

vnde ſequitur

$$x = \frac{-C}{n u u - 3 B - 2 n u x},$$

vbi

vbi si loco x valor modo inuentus substituatur, pro x reperiemus hanc fractionem continuam:

$$x = \cfrac{-C}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{nuu - 3B + \cfrac{2nuC}{\text{etc.}}}}}}$$

quae forma mox verum ipsius x valorem declarabit.

§. 11. Quoniam Illustris Auctor suam solutionem eiusmodi principio superstruxit, quod proprietate cuiuspiam maximi esset praeditum, nunc haud difficile erit eiusmodi formulam analyticam exhibere, quae maximo aequalis posita verum valorem ipsius x esset ostensura. Vtamur hunc infinem forma primum inuenta

$$\begin{matrix} rr(x-a) + rr(x-b) + rr(x-c) + \text{etc.} \\ -(x-a)^3 - (x-b)^3 - (x-c)^3 - \text{etc.} \end{matrix} = 0$$

quae spectetur tanquam differentiale cuiuspiam formulae, quae ad maximum reduci debeat; ipsa igitur haec formula prodibit, si haec expressio in dx ducta integretur. Multiplicemus autem per $4\,dx$ et integratio dabit

$$\begin{matrix} 2rr(x-a)^2 + 2rr(x-b)^2 + 2rr(x-c)^2 + \text{etc.} \\ -(x-a)^4 - (x-b)^4 - (x-c)^4 - \text{etc.} \end{matrix} + C.$$

Haec autem forma, si pro constante sumamus $-nr^4$, existente n numero obseruationum, mutatis signis manifesto hinc nascitur ista formula:

$$(rr-(x-a)^2)^2 + (rr-(x-b)^2)^2 + (rr-(x-c)^2)^2 + \text{etc.}$$

§. 12. Loco ergo formulae, quam Ill. *Bernoulli* maximo aequari debere censuit nunc assecuti sumus aliam formulam ad quaestionis naturam maxime accommodatam, quae ad maximum reducta, verum praebet valorem ipsius x, quandoquidem ista formula obtinetur, si quadrata omnium graduum bonitatis in vnam summam colligantur.

§. 13. Vt noſtrae methodi exemplum proferamus, conſideremus obſeruationes, quibus Tomo I. priorum Academiae Commentariorum longitudo obſeruatorii Petropolitani eſt concluſa ex differentia meridianorum inter obſeruatorium Pariſinum et Petropolitanum, quae ita referuntur

I. 1°. 51′. 50″.	IV. 1°. 51′. 50″.
II. 1. 51. 52.	V. 1. 51. 50.
III. 1. 51. 39.	VI. 1. 51. 50.

Ex quibus medium arithmeticum more ſolito ſumtum dat 1°. 51′. 48½″.

§. 14. Nunc vt formulas noſtras ad hunc caſum applicemus, ſumamus $\Pi = 1°. 51'. 48\frac{1}{2}''$. eruntque valores ſex noſtrarum litterarum a, b, c, d, e, f ſequentes

$$a = 1\tfrac{1}{2},\; b = 3\tfrac{1}{2},\; c = -9\tfrac{1}{2},\; d = 1\tfrac{1}{2},\; e = 1\tfrac{1}{2},\; f = 1\tfrac{1}{2}$$

vnde vtique earum ſumma fit $A = 0$; tum vero inuenitur ſumma quadratorum $B = \frac{223}{2}$; ſumma cuborum vero $C = -801$. Vnde aequatio noſtra ob $n = 6$ erit

$$12uxx - 6uux + 801 = 0$$
$$+ 334\tfrac{1}{2}.$$

§. 15. Nunc numerum u ex eiusmodi caſu difiniamus; quem Auctor obſeruationum reiicendum cenſuit; talis erat $1°. 52'. 20''$, vnde fit $u = 31\frac{1}{2}$. Ponamus autem eſſe $u = 30$, et aequatio noſtra quadratica erit

$$360xx - 5065\tfrac{1}{2}x + 801 = 0$$

cuius loco in numeris rotundioribus ſcribere licet

$36xx = 500x - 80$ vnde fit $x = \frac{250 \pm \sqrt{59620}}{36}$

hincque colligitur vel

$$x = \frac{250 + 244}{36} = 14 \text{ vel } x = \frac{250 - 244}{36} = \frac{1}{6},$$

qui poſterior valor ſolus locum habere poteſt, quem etiam

am ſtatim colligere potuiſſemus neglecto in aequatione primo termino, vnde fuiſſet valor $x = \frac{8}{50} = \frac{1}{6}$ proxime; ſicque hinc erit differentia meridianorum quaeſita $= 1^\circ. 51'. 48\frac{2}{3}''$.

§. 16. Deinde etiam reiecta fuerat obſeruatio, quae dederat $1^\circ. 51'. 0''$, vnde fit $u = -48\frac{1}{2}$. Suma ur autem $u = -48''$ et aequatio noſtra erit

$$-576xx - 13489\tfrac{1}{2}x + 801 = 0,$$

vnde neglecto primo termino fit $x = \frac{8}{135} = \frac{1}{17}$. Quoniam autem haec obſeruatio reiici meruiſſet, ſi fuiſſet circiter $u = -300$, hinc ſubducto vt ante calculo, produiſſet $x = \frac{1}{6}$ circiter; vnde patet hoc caſu regula communi nos contentos eſſe potuiſſe, cum nequidem vnum minutum ſecundum ſpectari poſſit.

§. 17. Quoniam autem inter has obſeruationes tertia tantopere a reliquis diſcrepat, fortaſſe conueniet non procul ab ea limitem conſtituere. Quod ſi faciamus pro caſu $1^\circ. 51'. 33\frac{1}{2}''$, $u = -15''$ hinc aequatio noſtra foret

$$-180xx - 1000x + 800 = 0$$

cuius aequationis minor radix erit $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, ita vt hinc differentia meridianorum proditura ſit $1^\circ. 51'. 49\frac{1}{6}''$. Ex hoc caſu denuo patet, nullum notabilem errorem eſſe metuendum, niſi valde enormiter in aſſumtione numeri u aberraverimus, in quo negotio ſufficiet notaſſe, ſemper nuu multo maius eſſe debere quam 3 B.

§. 18. Imprimis haec methodus applicari meretur ad illas obſeruationes, ex quibus non ita pridem Cel. *Lexell* parallaxin Solis determinauit, vnde exempli loco tantum depromamus ſequentes quatuor concluſiones ex obſeruationibus formatas, quae erant; 8, 52 (I.), 8, 43 (II.), 8, 86 (III.), 8, 28 (IV.), inter quas medium arithmeticum ſumendo prodit 8, 52. Quod ſi ergo ſtatuamus $\Pi = 8, 52$ valores quatuor litterarum a, b, c, d ſequenti modo conſtitui poſſunt

$a = 1.$

$a = 1, b = 9, c = -34, d = +24,$

vt eorum ſumma prodeat $A = 0$, ſcilicet hi numeri denotant partes centeſimas vnius minuti ſecundi. Hinc ergo erit ſumma quadratorum $B = 1814$, ſumma vero cuborum $C = -24750$; vnde ob $n = 4$ aquatio noſtra erit:

$$8uxx - 4uux + 5442x + 24750 = 0.$$

§. 19. Quod ſi iam ſumamus pro termino vbi gradus bonitatis euaneſcit $u = 40$, aequatio noſtra euadet

$$320xx - 948x + 24750 = 0.$$

Vnde autem valor ipſius x prodiret imaginarius; hanc ob rem ſumamus $u = 50$ ac aequatio fiet

$$400xx - 10000x + 24750 = 0$$
$$+ 5442x$$

vnde adhuc in imaginaria incidmus. Sumto autem $u = 60$, erit minor valor ipſius $x = 3\frac{5}{12}$, qui autem valor nimis magnus videri poſſet. Eo autem admiſſo foret parallaxis Solis $= 8,555$. Ceterum notetur ex maioribus valoribus ipſius u minores valores pro x deduci. Et quoniam applicatio huius methodi tam eſt vaga, merito dubitare licet, num hac ratione propius ad veritatem accedere queamus. Ac fortaſſe ſufficiet hinc ſaltem didiciſſe, vtrum valor ipſius x proditurus ſit poſitiuus an negatiuus?

§. 20. Hoc quidem caſu vidimus, valorem ipſius x certe eſſe poſitiuum, praeterea quod pro C numerum negatiuum inuenimus; vnde in genere obſeruaſſe iuuabit, quoties numerus C prodierit poſitiuus, tum x fieri negatiuum, contra autem ſi C fuerit negatiuum, valorem ipſius x fore poſitiuum. Vtroque autem caſu tam exiguus ſtatui debebit, vt determinatio a regula vulgari vix diſcrepet. Saltem hoc adiici poterit, quo maior fuerit numerus C etiam valorem ipſius x augeri debere. Si enim etiam ſumma cuborum C euaneſceret, tum ſemper

per foret $x = 0$, quicunque valor pro u acciperetur, prorſus vt regula vulgaris poſtulat.

§. 21. Hinc autem, non obſtante incertitudine a numero u oriunda, aliquid ſi non certum tamen ſatis probabile ſtatui poſſe videtur, ſi ad haec momenta attendamus. Primo certum eſt, quoties fuerit ſumma cuborum $C = 0$, tum etiam ſemper fore $x = 0$. Secundo, quo maior fuerit quantitas C, eo maiorem quoque futurum eſſe valorem ipſius x ſub ſigno contrario affectum. Tertio ſatis clarum eſt quantitatem nuu plurimum ſuperare debere quantitatem $3B$; quibus perpenſis ſatis probabili ratione ſtatui poſſe videtur $x = -\frac{C}{\lambda n B}$, vbi quidem numerus λ arbitrio noſtro relinquitur. Veruntamen pro omnibus caſibus vix a veritate aberrabitur, ſi ponatur $\lambda = 2$ vel ad ſummum $\lambda = 3$; diſcrimen enim hinc oriundum plerumque tam parui erit momenti, vt vix attendi mereatur. Caſus enim quo maximus error eſſet metuendus ſine dubio foret, ſi plures obſeruationes, quarum numerus ſit $= i$, prorſus inter ſe conuenirent, ſingulis exiſtentibus $= a$ quibuscum vnica obſeruatio coniungeretur praebens $-ia$, vt fiat ſumma omnium $A = 0$; tum autem erit ſumma quadratorum $B = iaa + iiaa = i(i+1)aa$; ſumma vero cuborum $ia^3 - i^3a^3 = -i(ii-1)a^3$. Nunc ergo ſi $n = i+1$, noſtra formula dabit $x = +\frac{i(ii-1)a}{\lambda i(i+1)^2} = \frac{(i-1)a}{\lambda(i+1)}$, ergo ſi fuerit i numerus praegrandis et capiatur $\lambda = 2$, prodit $x = \frac{1}{2}a$. Sumto igitur $\lambda = 2$, in exemplo priore, vbi erat $n = 6$, $B = 111\frac{1}{2}$ et $C = -801$, fiet $x = +\frac{801}{12.111\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$ propemodum. Pro altero vero exemplo, quo $n = 4$, $B = 1814$ et $C = -24750$, fit $x = +\frac{24750}{8.1814} = \frac{8}{5}$ circiter, qui valores nihil abſurdi inuoluere videntur.

Si quis autem putet maiori iure ſumi debere $\lambda = 3$, operae vix pretium erit ſuper differentia diſputare, cum ipſa obſeruationum natura maiorem gradum praeciſionis non recipiat.

SUR QUELQUES SE'RIES INFINIES DONT LA SOMME PEUT ETRE EXPRIME'E PAR DES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE FORME PARTICULIERE.

PAR
Mr. le Marquis de CONDORCET.

I. SE'RIE.

Soit une férie $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \ldots + (m)x^m \ldots$ & qu'elle foit formée de la manière fuivante.

1°. $b = a^n$, n eft un nombre quelconque.

2°. $c = \frac{1}{2} a^{n-1} \times \int a + a^2 + a^3 \ldots + a^n$. (Série géometrique, dont on a la valeur, n étant quelconque).

3°. d. fera compofé de deux termes, le 1er étant $\frac{1}{3} a^{n-1} \times$. (La fomme des c pris depuis $n = 1$ jusqu'à $n = n$. Le 2°. étant $\frac{1}{3} a^{n-2} \times$. (La fomme du produit deux à deux de tous les termes de la férie des b pris depuis $n = 1$ jusqu'à $n = n$).

4°. e fera compofé de 3 termes, le 1re étant $\frac{1}{4} a^{n-1} \times$. (La fomme des d pris depuis $n = 1$ jusqu'à $n = n$. Le fecond $\frac{1}{2 \cdot 3} a^{n-2} \times$. (La fomme des produits deux à deux de tous les termes de la férie des c par ceux de la férie des b pris depuis $n = 1$ jusqu'à $n = n$.

Tous ces produits fe prennent de manière, que ni deux termes d'une même férie ne font multipliés l'un par l'autre, ni le terme répondant à une valeur de n dans une férie par le terme répondant à la même valeur de n dans l'autre férie.

En général le terme répondant à x^m fe formera ainfi : On prendra un produit de $m - 1$ variables $y, y', y'' \ldots$ & on cher-chera

chera dans la valeur de $d^{m-1}(y, y', y'', y''' \ldots)$ les coëfficiens numériques des termes multipliés par

$d^{m-1}y$, $dy' d^{m-2}y$; $ddy' d^{m-3}y \ldots dy'' dy' d^{m-3}y$, $dy'' ddy' d^{m-4}y$, & ainsi de suite, en ne prenant dans cette valeur de $d^{m-1}(y, y', y'' \ldots)$ que le termes, qui, en alternant les y d'une manière quelconque, ne peuvent devenir un des termes dejà pris dans la série. Par exemple si on a le terme $dy' d^{m-2}y$, il ne faut plus prendre $dy\, d^{m-2}y'$, $dy'' d^{m-2}y'$ &c. parceque ces termes se peuvent changer en $dy d^{m-2}y$, en mettant dans le 1er y pour y', & y, & dans le second y' pour y'' & y'' pour y'. Nous appelerons dans la suite ces termes les termes 1ers de la valeur de $d^{m-1}(y, y', y'' \ldots)$.

Chacun de ces termes en produira un dans la valeur de (m). Pour former celui qui répondra à $d^{m-q}y\, d^{q-p-1}y'\, d^{p-r}y''\, d^{r}y'''$, soit t le coëfficient de ce terme dans $d^{m-1}(y, y', y'' \ldots)$ on prendra $\frac{t,\ 1.2.3\ldots m-q,\ 1.2\ldots q-p-1,\ 1.2\ldots p-r,\ 1.2\ldots r}{1.2.3\ldots m}\, a^{n-4} \times$. (La somme des produits 4 à 4 des coëfficiens x^{m-q}, x^{q-p-1}, x^{p-r}, x^{r}. La suite de ces coëfficiens étant prise depuis $n = 1$, jusqu'à $n = n$).

On prendra de même tous les autres termes, & on formera la valeur de (m) égale à leur somme.

Cela posé je dis que la somme d'une série infinie ainsi for-

$$E^{a + E^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{E}}}}}$$

mée sera E

Le nombre de fois que ces élevations successives sont repétées étant n; E étant tel, que si l'on suppose son logaritme égal à l'unité, il soit $E^a = a$.

II. SE'RIE.

Soit une férie femblable $a+b+cx^2+\ldots+(m)n^m\ldots$ formée de maniere que $a=$ cof. A, $b=(-1)^n$ fin. A^m, & que pour avoir $a(m)$ on prenne 1°. come ci-deffus tous les termes premiers de la valeur de $d^{n-1}(y,y',y''\ldots)$ dont chacun donnera un terme dans la valeur de (m), 2°. que foit $d^{m-q}y\, d^{l-p-1}y'\, d^{p-r}y''\, d^{r}y'''$ un de ces termes, le terme correfpondant dans la valeur de (m) foit égal au coëfficient numérique $\frac{t}{1.2.3\ldots m}$ multiplié par une fonction de n & des coëfficiens des termes précédens. Maitenant pour former cette fonction on prendra à caufe de $d^{m-q}y$, les termes de l'ordre $m-q$ dans la férie $V+\frac{V^2}{2}+\frac{V^3}{2.3}\ldots\ldots V=du+d^2u+d^3u\ldots+d^{m-q}u$, on multipliera les termes pairs par cof. A, & les impairs par $-$fin. A, on mettra enfuite dans tous ces termes au lieu de du, (1); 2(2) au lieu de ddu; 2.3.(3) au lieu de d^3u; 2.3.4.(4) au lieu de d^4u & ainfi de fuite, (1),(2),(4)... étans les coëfficiens de $x,x^2,x^3,x^4\ldots$ dans la férie propofée. On fera fucceffivement dans cette expreffion $n=1, 2\ldots n$, & on formera une fuite de termes $B, B', \ldots\ldots B''''^{n-1}$. On formera de la même manière pour $d^{l-p-1}y'$ une férie de termes $C, C', C''\ldots C'''^{n-1}$; pour $d^{p-r}y''$ une férie de termes $D, D'\ldots D'''^{n-1}$; pour d^ry''' une férie de termes $E, E', E''\ldots E^{n-1}$. On prendra la fomme des produits quatre à quatre des termes de ces quatre féries & foit F cette fomme: la partie de la valeur de (m) répondante au terme $d^{m-q}y\, d^{l-p-1}y'\, d^{p-r}y''\, d^ry'''$ fera $\frac{t}{1.2\ldots m}F$.

On formera de même les autres termes.

Cela pofé la fomme de cette férie infinie fera

$$\overline{\overline{\overline{cof.\ cof.\ \ldots\ldots cof.\ (A+x)}}}^{\,n},$$

le nombre des fignes *cos* étant répété *n* fois & A étant tel que cof. A $=$ A.

III.

III. SE'RIE.

Soit encore une ſérie $a+bx+cx^2+\ldots(m)x^m\ldots$ formée de manière que $a=B$, $b=\frac{1}{m^n}B^n\ldots$ & (m) de la manière ſuivante. 1°. On prendra toujours les termes prémiers de la valeur de $d^{m-1}(y, y', y''\ldots)$. 2°. Soit un de ces termes $d^{n-q}y\, d^{q-p-1}y'\, d^{p-r}y''\, d^r y'''$ & t ſon coëfficient ; pour trouver le terme correſpondan dans la valeur de (m), on prendra $d^{m-q}\frac{1}{u}$, on mettra dans cette fraction au lieu de u, a; b au lieu de du; $2.c$ au lieu de d^2u; $2.3(3)$ au lieu de d^3u; $2.3.4(4)$ au lieu de d^4u & faiſant dans cette valeur ſucceſſivement $n=1.2,\ldots n$, on formera une ſérie de termes $B, B'\ldots B'''^{n-1}$; on formera une ſérie ſemblable de termes $C, C'\ldots C'''^{n-1}$ répondans à $d^{q-p-1}y'$, une de termes $D, D', D'', \ldots D'''^{n-1}$ pour $d^{p-r}y''$, enfin une de termes $E, E', E''\ldots E'''^{n-1}$ pour le terme $d^r y$. On prendra la ſomme des produits 4 à 4 de tous les termes de ces quatres ſéries & ſoit F cette ſome: la partie du terme général répondante a $d^{n-q}y\, d^{q-p-1}y'\, d^{p-r}y''\, d^r y'''$ ſera $\frac{tF}{1.2.3\ldots m}$.

Enfin on déterminera de même les autres termes de la valeur de (m). Cela poſé la ſomme de cette Série ſera

$$\sqrt[m]{A+\sqrt[m]{A\ldots\ldots+\sqrt[m]{A+\sqrt[m]{B+x}}}}, \text{ A étant } B-\sqrt[m]{B},$$

Chaque terme des Séries précédentes ſera égal à une fonction finie de u, n étant quelconque. En effet toute ſuite formée par une combinaiſon quelconque des termes d'une ſérie récurrente, pourvû quelle ne renferme que des puiſſances entières de ces termes, & qu'ils y entrent tous d'une manière ſemblable, eſt également une ſérie récurrente. Cette obſervation générale ſe déduit fort ſimplement de cette réflexion: que la ſomme d'un nombre n de termes de toute ſuite récurrente eſt compoſée ainſi que ſon terme général d'un nombre fini de termes de la forme $An^p e^{fn}$, p étant un nombre fini.

DE FORMVLIS EXPONENTIALIBVS REPLICATIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Communicauit nuper cum Academia Illustr. *Marchio de Condorçet* profundissimas speculationes circa formulas Analyticas fere penitus insolitas, inter quas primum locum tenent formulae, quas hic appellare liceat exponentiales replicatas; quandoquidem quaelibet potestas abit in exponentem sequentis potestatis: cuiusmodi expressio hoc modo vulgo repraesentari solet $r^{r^{r^{r^{\alpha}}}}$. Quoniam autem indoles talium expressionum etiamnunc parum est perspecta, etiam vis illarum inuestigationum incredibili sagacitate erutarum neutiquam clare percipi et cognosci potest; hanc ob rem haud inutile erit, hoc loco praecipuas proprietates talium expressionum explicare.

§. 2. Hunc in finem, cum supremus exponens positus sit α, ipsa autem quantitas continuo eleuanda denotetur littera r, statuamus primam potestatem $r^{\alpha} = \beta$, atque iam β erit exponens secundae potestatis $r^{r^{\alpha}} = r^{\beta}$, quam porro designemus littera γ, quae cum sit exponens tertiae potestatis, statuamus simili modo $r^{\gamma} = \delta$; tum vero porro $r^{\delta} = \varepsilon$; $r^{\varepsilon} = \zeta$ etc. ita vt hoc modo totum negotium reducatur ad considerationem progres-

sionis

ſionis litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ etc. quarum quaelibet reperitur, ſi quantitas fixa r ad praecedentem eleuetur, quae ergo lex progreſſionis hoc modo clariſſime ob oculos ponetur $\beta = r^{\alpha}$; $\gamma = r^{\beta}$; $\delta = r^{\gamma}$; $\varepsilon = r^{\delta}$; $\zeta = r^{\varepsilon}$; vnde ſtatim patet, ſi incipiamus ab $\alpha = 0$ fore $\beta = 1$ et $\gamma = r$; ſequentes vero $\delta = r^{r}$; $\varepsilon = r^{r^{r}}$ etc.

§. 3. Hic primo euidens eſt, ſi pro r capiatur numerus modice magnus, terminos noſtrae ſeriei mox in immenſum excreſcere; ſi enim tantum ſumamus $r = 2$, poſito $\alpha = 0$, vt ſit $\beta = 1$ et $\gamma = 2$, ſequentes termini erunt $\delta = 4$; $\varepsilon = 16$; $\zeta = 65536$; vbi tantum ſequentem terminum η nemo facile euoluet, ſiquidem conſtaret ex 19729 figuris. Hinc iam manifeſtum eſt, ſi pro r numerum adhuc maiorem ſumeremus, tum noſtram ſeriem α, β, γ etc. multo rapidius in immenſum eſſe excreturam. Contra autem ſponte intelligitur, ſi loco r numeri binario minores accipiantur, tum huiusmodi augmentationem multo lentius eſſe proceſſuram, quandoquidem pro caſu $r = 1$ omnes noſtrae ſeriei termini in infinitum perpetuo manebunt vnitati aequales.

§. 4. Hic igitur ſtatim quaeſtio maximi momenti ſe offert: vbi iſta enormis augmentatio incipiat? neque enim, ſtatim ac numerus r vnitatem ſuperet, iſta augmentatio contingit, id quod vnico caſu oſtendiſſe ſufficiet, quo ſumatur $r = \sqrt{2}$, vbi adeo primo exponenti α iam maiorem valorem tribuamus quam $\sqrt{2}$. Sit ſcilicet $\alpha = 2$ ac prodibit $\beta = 2$, hincque porro $\gamma = 2$, ſicque deinceps omnes termini noſtrae progreſſionis nullam augmentationem accipiunt, dum omnes binario aequales manent. Quin etiam idem phoenomenon locum habebit, ſi primo exponenti α adhuc maiorem valorem tribuamus, ſcilicet $\alpha = 4$; tum enim prodibit $\beta = 4$ et $\gamma = 4$, neque vlla vlterior augmentatio occurret; ſtatim autem ac α vltra 4 augebitur,

bitur, veluti si sumatur $\alpha = 6$, tum reperietur $\beta = 8$; hincque porro $\gamma = 16$; $\delta = 256$, sequentes vero ob summam magnitudinem vix et ne vix quidem exprimere licebit.

§. 5. Cum igitur casu $r = \sqrt{2}$, incipiendo ab $\alpha = 0$, augmentatio terminorum non vltra modicam quantitatem excrescat, cum sumpto $r = 2$ ea quasi subito in infinitum dilatetur, maxime sine dubio operae erit pretium limitem assignare, vbi ista augmentatio incipiat; quem ante quam ex principiis Analyticis definiamus, haud abs re erit, casus quosdam intra limites $\sqrt{2}$ et 2 examini subiicere, id quod facili negotio per logarithmos expedire licebit. Cum enim sit $\beta = r^{\alpha}$, erit $l\beta = \alpha lr$ et $ll\beta = l\alpha + llr$; similique modo erit $ll\gamma = l\beta + llr$; tum vero $ll\delta = l\gamma + llr$ et ita porro. Hoc igitur modo examinemus casum, quo $r = \frac{3}{2}$ vnde fit

$$lr = 0,1760913 \quad \text{et} \quad llr = 9,2457379$$

et quia, nostram seriem a cyphra incipiendo, statim peruenimus ad terminum $\frac{3}{2}$, incipiamus a positione $\alpha = \frac{3}{2}$ et calculus sequenti modo concinne absoluetur.

$$
\begin{array}{rl}
l\alpha = 0,1760913 & \text{hincque } \alpha = 1,5000 \\
llr = 9,2457379 & \\
\hline
ll\beta = 9,4218292 & \\
\hline
l\beta = 0,2641370 & \text{hincque } \beta = 1,8371 \\
llr = 9,2457379 & \\
\hline
ll\gamma = 9,5098749 & \\
\hline
l\gamma = 0,3235004 & \text{hincque } \gamma = 2,1062 \\
llr = 9,2457379 & \\
\hline
ll\delta = 9,5692383 & \\
\hline
l\delta = 0,3708841 & \text{hincque } \delta = 2,3490 \\
llr = 9,2457379 &
\end{array}
$$

$ll\varepsilon =$

$ll\varepsilon = 9,6166220$

$l\varepsilon = 0,4136396$ hincque $\varepsilon = 2,5920$
$llr = 9,2457379$

$ll\zeta = 9,6593775$

$l\zeta = 0,4564335$ hincque $\zeta = 2,8604$
$llr = 9,2457379$

$ll\eta = 9,7021714$

$l\eta = 0,5036993$ hincque $\eta = 3,1893$
$llr = 9,2457379$

$ll\theta = 9,7494372$

$l\theta = 0,5616140$ hincque $\theta = 3,6443$

§. 6. Hic ergo termini noſtrae progreſſionis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. tam lente increſcunt, vt dubitare queamus, an non ad certum quendam limitem conuergant; verum quia poſtremae differentiae manifeſto increſcunt, neceſſe eſt, vt ipſi termini tandem continuo vltra creſcant, vnde concludere licet, limitem, quem quaerimus, infra $\frac{3}{2}$ ſubſiſtere. Examinemus ergo ſimili modo caſum $r = \frac{4}{3}$, atque incipiendo ab $\alpha = \frac{4}{3}$ calculus ſequenti modo procedet.

$l\alpha = 0,1249387$ hincque $\alpha = 1,3333$
$llr = 9,0966972$

$ll\beta = 9,2216359$

$l\beta = 0,1665850$ hincque $\beta = 1,4675$
$llr = 9,0966972$

$ll\gamma = 9,2632822$

$l\gamma = 0,1833505$ hincque $\gamma = 1,5252$
$llr = 9,0966972$

$ll\delta = 9,2800477$

$l\delta = 0,1905670$ hincque $\delta = 1,5508$
$llr = 9,0966972$
$ll\varepsilon = 9,2872642$

$l\varepsilon = 0,1937600$ hincque $\varepsilon = 1,5622$
$llr = 9,0966972$

$ll\zeta = 9,2904572$

$l\zeta = 0,1951898$ hincque $\zeta = 1,5674$.

Hic iam differentiae manifesto continuo decrescunt; vnde satis tuto concludere licet, terminos nostrae progressionis non vltra certam quantitatem auctum iri. Quoniam autem suspicari possemus etiam hoc casu differentias iterum augeri, solutio sequentis problematis omnem tollet dubitationem.

Problema.

Inuestigare limitem, quem simulac radix r *superare inceperit, termini nostrae progressionis* α, β, γ, δ *etc. in infinitum excrescant.*

Solutio.

§. 7. Quaeri ergo oportet maximum valorem radicis r, pro quo termini nostrae seriei non in infinitum augeantur, sed versus certum quendam limitem finitum conuergant. Denotet igitur a terminum infinitesimum nostrae progressionis, qui cum iam limitem quaesitum attigerit, necesse est, vt terminus ipsum sequens, qui est r^ω, illi sit aequalis, ita vt habeamus hanc aequationem: $r^\omega = \omega$; vnde maximum valorem, quem littera r attingere potest, definiri oportet.

§. 8. Cum igitur sumptis logarithmis fiat $\omega lr = l\omega$, hinc erit $lr = \frac{l\omega}{\omega}$, siue etiam $r = \omega^{\frac{1}{\omega}}$. Maximus igitur valor inuestigari

ri debet, quem isto fractio $\frac{l\omega}{\omega}$ acquirere potest: Quod autem hic maximum detur, inde intelligitur, quod sumpto tam $\omega = 1$ quam $\omega = \infty$, haec fractio vtroque casu euanescat. Hinc ergo ad casum maximi inueniendum, differentiale huius fractionis nihilo aequetur; quem in finem denotet $l\omega$ logarithmum hyperbolicum ipsius ω, vt eius differentiale statui possit $\frac{d\omega}{\omega}$, sicque peruenietur ad hanc aequationem $l\omega = 1$; vnde si e designet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, quem nouimus esse 2,718281828, erit $lr = \frac{1}{e}$, ideoque $r = e^{\frac{1}{e}}$.

§. 9. Hoc modo iam didicimus, quoties radix r maior accipiatur hoc valore inuento $e^{\frac{1}{e}}$, toties progressionem nostram $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. in infinitum augeri debere; contra autem si radix r intra istum valorem subsistat, tum nostram seriem perpetuo ad certum quendam limitem conuergere, qui adeo limes pro ipso casu inuento $r = e^{\frac{1}{e}}$ erit $\omega = e$; cuius veritas vicissim hinc patet, quod hoc modo fiat terminus sequens $e^{\frac{1}{e}} = e$. Hic haud inutile erit obseruare, denotante x numerum quemcunque diuersum ab e siue maiorem siue minorem, semper fore $x^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{e}}$. Quod quo clarius perspiciatur, calculum pro casibus simplicioribus instituamus; quem infinem ponamus $x^{\frac{1}{x}} = z$, eritque logarithmis communibus sumendis $lz = \frac{lx}{x}$ hincque porro $llz = llx - lx$, vnde valor ipsius z quouis casu facillime colligitur. Primo quidem perspicuum est sumto $x = 1$ fore $z = 1$, pro sequentibus autem valoribus calculus ita instituetur secundum formulam $\frac{lz}{z}$:

	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
lx	0,3010300	0,4771213	0,6020600	0,6989700	0,7781513
$\frac{lx}{x}$	0,1505150	0,1590404	0,1505150	0,1397940	0,1296919
z	1,41421	1,44225	1,41421	1,37972	1,34800

Patet hic valores ipsius z, dum x vltra limitem $= e$ augetur, continuo decrescere et tandem ad vnitatem conuergere; tum vero hinc etiam liquet, maximum valorem ipsius z inter positiones $x = 2$ et $x = 3$ incidere, ita vt is certe maior sit quam 1,44225.

§. 10. Quaeramus igitur hunc ipsum maximum valorem ipsius z ex casu $x = e = 2,718281828$ et quoniam est $llz = lle = le$, calculus ita se habebit

ob $le = 0,4342944$
erit $lle = 9,6377842$
hinc subtr. $le = 0,4342944$

fit $llz = 9,2034898$
et $lz = 0,1597679$ tandem $z = 1,44467$

qui ergo valor proxime est $z = 1\frac{4}{9}$.

§. 11. Si quis istum valorem maximum ipsius r accuratius desiderauerit, quam vt tabulae logarithmicae vulgares ei sufficiant, is eundem ope seriei maxime conuergentis commodissime obtinere poterit; cum enim sit

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

erit valor quaesitus

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2ee} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \text{etc.}$$

pro qua serie singulae potestates reciprocae ipsius e passim ad plures figuras decimales euoluti reperiuntur.

§. 12. Quodsi ergo pro r accipiatur numerus quicunque minor quam valor modo inuentus 1,4447, tum series inde resultans α, β, γ, δ, ε etc. certe ad quendam limitem finitum conuerget, qui, si dicatur $= \Phi$, ita definietur vt sit $e^{\Phi} = \Phi$, ideoque $r = \Phi^{\frac{1}{\Phi}}$. Ex praecedentibus autem patet, semper binos dari valores ipsius Φ, vnde eadem radix r oriri queat, quemadmodum in casibus supra euolutis valores $x = 2$ et $x = 4$ eundem

dem valorem pro z produxerunt; atque hi duo valores ipsius Φ eo magis a se inuicem discrepabunt, quo magis radix assumpta r a limite inuento 1,4447 differat, siquidem in ipso limite ambo valores in vnum coalescunt. His igitur valoribus inueniendis sequens problema destinamus.

Problema.

Si pro radice r *accipiatur numerus quicunque minor quam limes inuentus* $e^{\frac{1}{e}} = 1,4445$, *inuestigare binos illos valores, ad quos progressio nostra* α, β, γ, δ *etc. conuergere potest, siue quaerere duplicem valorem ipsius* Φ, *vt euadat* $r^\Phi = \Phi$; *vbi tamen obseruari necesse est, valorem radicis* r *vnitate maiorem accipi debere, quandoquidem valores vnitate minores peculiarem explicationem postulant.*

Solutio.

§. 13. Hic primo haud parum alienum videbitur, quod talis aequatio $r^\Phi = \Phi$ duas inuoluat radices reales, quotiescunque r intra limites 1 et $e^{\frac{1}{e}}$ continetur, neque Analysis vllam methodum certam praescribit hos duos valores inueniendi; quoniam autem iam certo nouimus duos dari huiusmodi valores, designemus alterum littera ψ, ita vt etiam sit $r^\psi = \psi$; hinc igitur, eliminando litteram r, impetrabimus hanc aequationem inter Φ et ψ: $\frac{l\Phi}{\Phi} = \frac{l\psi}{\psi}$.

§. 14. Iam ad hanc aequationem resoluendam ponamus $\psi = p\Phi$, vt sit $l\psi = lp + l\Phi$, vnde facta substitutione reperitur $l\Phi = \frac{lp}{p-1}$; tum vero $\Phi = p^{\frac{1}{p-1}}$; at alter valor iam erit $\psi = p^{\frac{p}{p-1}}$, qui ergo in genere exprimunt binos valores quaesitos.

§. 15. Sumpto ergo pro lubitu numero p, inde colliguntur bini exponentes quaesiti Φ et ψ; ipsa vero radix proposita r ita

 per

per p exprimetur, vt fit $lr = \frac{p^{\frac{-1}{p-1}} lp}{p-1}$. Hinc autem viciſſim ex data radice r numerus p aliter colligi nequit, niſi approximando; quem in finem notaſſe iuuabit, ſi fuerit $p = 1$, hoc caſu bini exponentes ϕ et ψ euadere aequales inter ſe atque adeo ipſi numero e, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$; quod quo clarius appareat, ponamus $p = 1 + \omega$, exiſtente ω infinite paruo, eritque $\phi = (1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}}$ ideoque $l\phi = \frac{1}{\omega} l(1+\omega)$. Quia igitur eſt $l(1+\omega) = \omega$, erit $l\phi = 1$ ideoque $\phi = e$; tum vero erit $lr = \frac{1}{e}$ ideoque $r = e^{\frac{1}{e}}$, qui eſt ipſe limes pro radice r ſupra inuentus; hoc ergo caſu bini valores ϕ et ψ inter ſe conueniunt.

§. 16. Pro reliquis autem caſibus, quibus r minorem ſortitur valorem, bini iſti valores continuo magis a ſe inuicem diſcrepabunt. Ita ſi capiamus $p = 2$, vt fiat $\psi = 2\phi$, prodibit $\phi = 2$ et $\psi = 4$, tum vero porro $r = \sqrt{2}$, qui eſt ipſe caſus, quem ſupra fuſius euoluimus, quandoquidem hinc manifeſto fit $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{2})^4 = 4$. Sin autem ſumamus $p = 3$, fiet $\phi = \sqrt{3}$ et $\psi = 3\sqrt{3}$, qui ergo bini valores locum habent pro $lr = \frac{l3}{2\sqrt{3}}$; ipſa ergo radix erit $r = 3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$. Tales autem expreſſiones, vbi exponentes ſunt irrationales, inter quantitates interſcendentes referri ſolent.

§. 17. Vt igitur hoc incommodum euitemus, ponamus $p = 1 + \frac{1}{n}$, denotante n numerum quantumuis magnum, eritque $\phi = \frac{(n+1)^n}{n^n}$ et $\psi = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$; tum vero erit $lr = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} l \frac{n+1}{n}$, vnde ipſe valor ipſius r haud commode referri poteſt. Pro caſibus autem ſpecialibus hi valores ita ſe habebunt

I. Si

I. Si $n = 1$, erit $\Phi = 2$ et $\psi = 4$; tum vero $r = \sqrt{2}$, vt ſupra notauimus.

II. Si $n = 2$, erit $\Phi = \frac{9}{4}$ et $\psi = \frac{27}{8}$; tum vero $lr = \frac{8}{9} l \frac{3}{2}$, ideoque $r = (\frac{3}{2})^{\frac{8}{9}}$; hinc enim manifeſto fit $r^{\Phi} = \frac{9}{4} = \Phi$, at $r = \frac{27}{8} = \psi$.

III. Si $n = 3$, erit $\Phi = \frac{64}{27}$ et $\psi = \frac{256}{81}$; tum vero erit $lr = \frac{81}{64} l \frac{4}{3}$ ideoque $r = (\frac{4}{3})^{\frac{81}{64}}$; hinc enim fit $r^{\Phi} = \frac{64}{27} = \Phi$ et $r^{\psi} = \frac{256}{81} = \psi$.

IV. Si $n = 4$, erit $\Phi = \frac{625}{256}$ et $\psi = \frac{3125}{1324}$; hinc vero erit $lr = \frac{1024}{625} l \frac{5}{4}$ ideoque $r = (\frac{5}{4})^{\frac{1024}{625}}$; hinc autem fiet $r^{\Phi} = \frac{625}{256} = \Phi$ et $r^{\psi} = \frac{3125}{1324} = \psi$.

Solutio geometrica eiusdem problematis.

§. 18. Super axe A O eiusmodi curua deſcribatur, pro qua, ſi ponatur abſciſſa $AX = x$ et applicata $XY = y$, ſit $y = r^x$, quae ergo curua erit logarithmica, et pro initio $x = 0$ fiet prima applicata $AB = 1$; tum vero, ſumpta abſciſſa $AC = 1$, erit applicata $CD = r$ quae ergo exhibeat noſtram radicem r; ſicque abſciſſae x nobis dabunt exponentes poteſtatum r^x, applicatae vero y exhibebunt ipſas poteſtates. Iam ex initio A producatur recta A Q U, cum axe faciens angulum ſemirectum, quam curua in duobus punctis Q et U ſecabit, ſiquidem fuerit $e < e^{\frac{1}{e}}$. Hoc modo pro puncto Q erit abſciſſa $AP = \Phi$ ſimulque $PQ = r^{\Phi} = \Phi$. Simili modo pro altera interſectione U abſciſſa erit $AT = \psi$ ſimulque $TU = r^{\psi} = \psi$. Tab. I. Fig. 1.

§. 19. Ab initio igitur iſta curua ſupra rectam A Q verſabitur a puncto B vsque ad Q; at vero a puncto Q vsque ad U curua infra iſtam rectam cadit, a termino autem U vlterius continuata in regionem ſuperiorem in infinitum vsque aſcendet. Hinc intelligitur, quamdiu abſciſſa x minor fuerit quam Φ, tum applicatam $y = r^x$ fore maiorem quam x ideoque ad limitem P Q propius accedere, donec ſumpto $x = AP = \Phi$ etiam fiet $y = r^{\Phi} = \Phi$. Quando autem x ſuperat Φ, ita

ta-

tamen vt minor ſit quam ψ, tum applicata y erit minor quam x ideoque propius ad terminum Φ accedet; hocque eueniet, quamdiu abſciſſa x minor fuerit quam ψ: ſumpto autem $x = \psi$ etiam fiet $y = \psi$. Denique vero ſi capiatur $x > \psi$, tum manifeſto applicata y maior erit quam x, ideoque magis a termino ψ recedet atque adeo tandem in infinitum elongabitur.

§. 20. Hic igitur ſingulare Phoenomenon ſe offert, in hoc conſiſtens, quod, quam diu abſciſſa x minor accipitur termino maiore ψ, tum applicata y ſemper propius ad terminum minorem Φ accedat quam x, hocque eueniet quamdiu fuerit $x < \psi$, et non niſi in ipſo hoc altero termino $x = \psi$, applicata quoque fiet $y = \psi$. Statim enim atque abſciſſa x vel minimum diſcrepat a ψ, applicata y adhuc magis a ψ diſcrepabit.

§. 21. Bini igitur valores ſupra aſſignati Φ et ψ in hoc eſſentialiter a ſe inuicem differunt, quod ſi x ſiue maior ſiue minor capiatur quam Φ, tum y propius ad Φ accedat; contrarium autem euenit in altero termino ψ, quippe a quo, ſtatim atque x diſceſſerit, etiam y adhuc magis diſcedit.

§. 22. Quo hoc ſummum diſcrimen clarius appareat, conſideremus caſum, quo $r = \sqrt{2}$; $\Phi = 2$ et $\psi = 4$; atque iam ſatis liquet, ſi progreſſionis noſtrae numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. primus terminus α accipiatur minor quam 2, tum ſequentes β, γ, δ etc. continuo propius ad 2 eſſe acceſſuros; quandoquidem ſumpto $\alpha = 2$ omnes ſequentes eundem valorem recipient. Sumamus igitur $\alpha > 2$, attamen minus quam 4 et quaeramus ſequentes terminos β, γ, δ, etc. ex formula $ll\beta = l\alpha + llr$ pro qua

$$lr = 0,1505150 \text{ et } llr = 9,1775798.$$

quem in finem tribuamus primo termino α valorem 3, vtpote medium inter binos limites 2 et 4 et calculus ſequenti modo ſehabebit

ad

ad. $l\alpha = 0,4771213$ hincque $\alpha = 3,0000$
add. $ll r = 9,1775798$

$ll\beta = 9,6547011$

$l\beta = 0,4515451$ hincque $\beta = 2,8284$
$ll r = 9,1775798$

$ll\gamma = 9,6291249$

$l\gamma = 0,4257209$ hincque $\gamma = 2,6651$
$ll r = 9,1775798$

$ll\delta = 9,6033007$

$l\delta = 0,4011442$ hincque $\delta = 2,5185$
$ll r = 9,1775798$

$ll\varepsilon = 9,5787240$

$l\varepsilon = 0,3790740$ hincque $\varepsilon = 2,3937$

Hinc iam patet iſtos terminos continuo magis ad limitem 2 conuergere.

§. 23. Ne quis autem putet hoc aliter eſſe euenturum, ſi ipſi α valor parum tantum a 4 diſcrepans tribuatur, euoluamus caſum $\alpha = 3,99$ et calculus ſequenti modo ſe habebit.

$l\alpha = 0,6009729$ hincque $\alpha = 3,9900$
$ll r = 9,1775798$

$ll\beta = 9,7785527$

$l\beta = 0,6005548$ hincque $\beta = 3,9861$
$ll r = 9,1775798$

$ll\gamma = 9,7781346$

$l\gamma = 0,5999770$ hincque $\gamma = 3,9808$
$ll r = 9,1775798$

$ll\delta = 9,7775568$

$l\delta = 0,5991792$ hincque $\delta = 3,9735$

$llr = 9,1775798$

$ll\varepsilon = 9,7767590$

$l\varepsilon = 0,5980795$ hincque $\varepsilon = 3,9635$

Hic ergo quoque euidens eſt, terminos β, γ, δ, ε etc. continuo magis a limite $\psi = 4$ recedere et continuo magis ad alterum limitem $\Phi = 2$ appropinquare.

§. 24. Interim tamen manifeſtum eſt, ſi ſtatuatur exacte $\alpha = 4$, tum omnes ſequentes terminos prorſus eundem valorem eſſe retenturos; ſtatim vero ac littera α vel tantillum ſuperauerit limitem 4, ſequentes terminos continuo magis eum eſſe ſuperaturos, quemadmodum ſequens calculus, ſumendo $\alpha = 4,01$ oſtendet.

$l\alpha = 0,6031444$ ideoque $\alpha = 4,0100$

$llr = 9,1775798$

$ll\beta = 9,7807242$

$l\beta = 0,6035652$ hincque $\beta = 4,0138$

$llr = 9,1775798$

$ll\gamma = 9,7811450$

$l\gamma = 0,6041502$ hincque $\gamma = 4,0293$

$llr = 9,1775798$

$ll\delta = 9,7817300$

$l\delta = 0,6049645$ hincque $\delta = 4,0268$

$llr = 9,1775798$

$ll\varepsilon = 9,7825443$

$l\varepsilon = 0,6061000$ hincque $\varepsilon = 4,0373$

hinc

Hinc patet indolem limitis $\psi = 4$ ſimilem eſſe limiti aequilibrii labilis, quo acus cuſpidi quidem inſiſtere poteſt, ſimulac vero quam minime deturbetur, penitus procumbit.

§. 25. Hic autem probe meminiſſe neceſſe eſt, huiusmodi binos limites ϕ et ψ locum habere non poſſe, niſi radix r infra valorem $e^{\frac{1}{e}}$ ſubſtiterit; ſtatim vero ac r hunc valorem ſuperauerit, hi limites fiunt imaginarii; atque adeo haec ipſa imaginaria aſſignare licebit, cuiusmodi inueſtigationes cum adhuc parum ſint tritae, haud inutile erit ſequens problema adiicere.

Problema.

Si radix r *maior fuerit, quam limes ſupra aſſignatus* $e^{\frac{1}{e}}$, *exponentem imaginarium* ω *inueſtigare, vt fiat* $r^{\omega} = \omega$.

Solutio.

§. 26. Cum quicquid in Analyſi imaginarii occurrere poteſt ſemper in hac forma contineatur $x + y\sqrt{-1}$, ita vt tam x quam y ſint quantitates reales, ſtatuamus $\omega = x + y\sqrt{-1}$, ita vt eſſe debeat

$$r^{x + y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} \text{ ſiue } r^{x} . r^{y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

ex qua aequatione binas litteras x et y erui oportet.

§. 27. Quoniam conſtat eſſe

$$e^{z\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, z + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, z$$

ſtatuatur $r^{y\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}}$, vt fiat $y\sqrt{-1}.\, lr = z\sqrt{-1}$, ob $le = 1$, eritque ergo $z = ylr$, ſicque habebimus

$$r^{y\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, ylr + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, ylr$$

quo valore ſubſtituto aequatio noſtra erit

$$r^{x}(\text{coſ.}\, ylr + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, ylr) = x + y\sqrt{-1}$$

vnde cum partes reales et imaginariae inter ſe ſeorſim aequari debeant, oriuntur hac duae aequationes:

I. $r^x \cos. y\, l\, r = x$

II. $r^x \sin. y\, l\, r = y$

quarum posterior per priorem diuisa praebet tang. $y\, l\, r = \frac{y}{x}$, ex qua colligimus $x = \frac{y}{tang.\, y l r}$, ita vt ex valore ipsius y cognito valor ipsius x assignari queat.

§. 28. Pro y autem inueniendo posterioris aequationis capiantur logarithmi, qui dabunt

$$x\, l\, r + l \sin. y\, l\, r = l y, \text{ ideoque } \frac{y\, l\, r}{tang.\, y l r} + l \sin. y\, l\, r = l y$$

siue $\frac{y\, l\, r}{tang.\, y l r} = l \frac{y}{\sin.\, y\, l\, r}$; sicque totum negotium huc est perductum, vt quantitas y ex data radice r eliciatur. Quo autem ista relatio commodius exprimi possit, statuamus $y\, l\, r = \theta$, vt obtineamus hanc aequationem $\frac{\theta}{tang\,\theta} = l \frac{y}{\sin.\,\theta}$, vnde colligimus

$$l y = l \sin.\theta + \frac{\theta}{tang\,\theta} \text{ ideoque } y = e^{\theta \cot.\theta} \sin.\theta$$

hincque porro $l\, r = \frac{\theta\, e^{-\theta \cot.\theta}}{\sin.\theta}$; atque hinc tandem erit $x = e^{\theta \cot.\theta} \cos.\theta$.

§. 29. Optandum quidem foret, vt ex data radice r angulus θ definiri posset; verum contenti esse debemus, quod hinc ex quolibet valore ipsius θ haud difficulter radix erui queat, vbi quidem facile intelligitur, pro extremo valore $r = e^{\frac{1}{e}}$, vbi imaginaria incipiunt, esse debere $y = 0$, id quod euenit ponendo $\theta = 0$, quo casu ob $\theta \cot.\theta = \frac{\theta \cos.\theta}{\sin.\theta} = 1$, erit $x = e$, quemadmodum natura rei postulat, dum vtique fiet $e^e = e$; reuera autem hinc prodibit $l\, r = \frac{1}{e}$, consequenter $r = e^{\frac{1}{e}}$. Quia autem hic assumimus, valorem ipsius r maiorem esse quam $e^{\frac{1}{e}}$, hi casus prodibunt, si angulo θ maiores valores tribuantur. Quod quo clarius appareat, fingamus angulum θ minimum, vt sit

$$\sin.\theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 \text{ et } \cos.\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \text{ vnde fit}$$

θ cot.

$$\theta \cot. \theta = \frac{\theta \operatorname{cof.} \theta}{\operatorname{fin.} \theta} = \frac{1 - \frac{1}{2}\theta\theta}{1 - \frac{1}{6}\theta\theta} = 1 - \frac{1}{3}\theta\theta$$

hincque erit

$$e^{\theta \cot. \theta} = e . e^{-\frac{1}{3}\theta\theta} = e(1 - \tfrac{1}{3}\theta^2)$$

ex quo valore colligimus

$$x = e(1 - \tfrac{5}{6}\theta^2) \text{ et } y = e\theta(1 - \tfrac{1}{3}\theta^2)$$

hincque quoniam

$$l\, r = \frac{\theta}{y} \text{ erit } l\, r = \frac{1}{e(1 - \frac{1}{3}\theta^2)} = \frac{1 + \frac{1}{3}\theta^2}{e}$$

vnde patet fore $l\, r > \frac{1}{e}$, ideoque $r > e^{\frac{1}{e}}$, fimulque intelligitur quantumuis magnum valorem ipfi r tribuere velimus, femper pro θ angulum conuenientem affignari poffe, quandoquidem eius valor iam in infinitum augebitur, fi capiatur $\theta = 180° = \pi$. Cafus hic prae caeteris memoratu dignus occurrit, quando capitur $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$; tum enim ob $\cot. \theta = 0$ fiet $x = 0$ at $y = 1$ hincque porro $l\, r = \frac{\pi}{2}$ ideoque $r = e^{\frac{\pi}{2}}$; tum igitur erit

$$r^{x + y\sqrt{-1}} = e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

id quod egregie conuenit cum formulis iam pridem cognitis, quibus, fumendis logarithmis, erat $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} = l\sqrt{-1}$ fiue $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ vel etiam $\pi = \frac{l - 1}{\sqrt{-1}}$.

Confideratio cafuum, quibus radix r vnitate minor accipitur.

§. 30. Hic ante omnia obferuandum eft omnes terminos noftrae feriei α, β, γ, δ, ε etc. tanquam vnitate minores fpectari poffe; quantumuis enim magnus primus α accipiatur veluti $\alpha = 10$, fecundus $\beta = r^{10}$ eo minor erit fractio, quo maior fuerit α. Quam ob rem, ne calculus logarithmicus inftituendus turbetur, tam loco radicis r, quam fingulorum terminorum noftrae

nostrae progressionis fractiones in calculum introducamus, sitque $r = \frac{1}{s}$; $\alpha = \frac{1}{a}$; $\beta = \frac{1}{b}$; $\gamma = \frac{1}{c}$; $\delta = \frac{1}{d}$ etc. et cum sit

$$\beta = r^{\alpha} \text{ erit } \frac{1}{b} = \frac{1}{s^{\frac{1}{a}}} \text{ ideoque } s^{\frac{1}{a}} = b$$

Per logarithmos ergo erit $\frac{1}{a} l s = l b$ siue $l s = a l b$; porro $l l s = l a + l l b$ ideoque $l l b = l l s - l a$, cuius formulae ope ex datis s et a reperitur b; similique modo erit $llc = lls - lb$ et $l l d = l l s - l c$ et ita porro.

§. 31. Illustremus nunc casum exemplo, sitque $r = \frac{1}{2}$ sumaturque $\alpha = \frac{1}{2}$; erit $s = 2$ et $a = 2$, vnde calculus ita se habebit

$lls = 9,4786098$
subtr. $la = 0,3010300$ propterea quod $\alpha = 0,5000$

$llb = 9,1775798$
$lb = 0,1505150$ hinc $l\beta = 9,8494850$ hinc $\beta = 0,70710$
$lls = 9,4786098$
$lb = 0,1505150$

$llc = 9,3280948$

$lc = 0,2128604$ hinc $l\gamma = 9,7871396$ vnde $\gamma = 0,61254$
$lls = 9,4786098$

$lld = 9,2657494$

$ld = 0,1843951$ hinc $l\delta = 9,8156049$ ergo $\delta = 0,65404$
$lls = 9,4786098$

$lle = 9,2942147$

$le =$

$le = 0,1968859$ hinc $l\varepsilon = 9,8031141$ ergo
$\varepsilon = 0,63549$

$lls = 9,4786098$

$llf = 9,2817239$

$lf = 0,1913039$ hinc $l\zeta = 9,8086961$ ergo
$\zeta = 0,64371$

$lls = 9,4786098$

$llg = 9,2873059$

$lg = 0,1937789$ hinc $l\theta = 9,8062211$ ergo
$\theta = 0,64006$.

§. 32. Hinc igitur elucet terminos noſtrae progreſſionis continuo magis ad certum quendam valorem fixum conuergere, quem alternatim ſuperant ab eoque deficiunt, qui valor circiter erit 0,64, ad quem ſimul ac fuerit peruentum, ſequentes omnes ipſi manebunt aequales. Ad hunc valorem fixum inueniendum obſeruemus logarithmos numerorum *a*, *b*, *c*, *d* etc. conuergere ad valorem propemodum 0,192; vnde ſi verum medium ſit lm neceſſe eſt vt fiat $lm + llm = lls$; hanc autem inueſtigationem aliter niſi tentando elicere non licet, quod per aliquot hypotheſes exequemur:

$lm =$	0,192	0,1925	0,1928	0,1929
add. $llm =$	9,2833012	9,2844307	9,2851070	9,2853322
debeb. eſſe	9,4753012	9,4769307	9,4779070	9,4782322
eſt ver. $lls =$	9,4786098	9,4786098	9,4786098	9,4786098
error (−)	0,0033086	0,0016791	0,0007028	0,0003776

$lm =$

$lm =$	0,1930	0,1931
add. $llm =$	9,2855573	9,2857823
debebat esse	9,4785573	9,4788823
est vero $lls =$	9,4786098	9,4786098
error	−0,0000525	+0,0002725

Patet igitur verum valorem subsistere inter binas postremas hypotheses 0,1930 et 0,1931, quarum differentia est 0,0001, ex qua oritur differentia errorum 0,0003250; debebat autem esse 0,0002200; quare vt summa errorum ad differentiam hypothesium, ita error penultimus ad excessum veritatis super penultimam; quocirca verus valor erit $lm = 0,1930161$, cuius complementum est, 9,8069839, cui respondet terminus progressionis quaesitus 0,64118, ad quem termini alternatim continuo propius accedunt.

§. 33. Ex his intelligitur, semper eiusmodi exponentem ω definiri posse, vt sit $r^{\omega} = \omega$, siue posito $\omega = \frac{1}{z}$, vt sit $s^{\frac{1}{z}} = z$ siue $s = z^{z}$. Quoniam enim s est numerus vnitate maior, semper assignari poterit eiusmodi numerus z vt fiat $z^{z} = s$.

§. 34. In exemplo quidem ante euoluto, quo erat $r = \frac{1}{3}$, termini nostrae progressionis continuo propius conuergebant ad valorem quendam fixum; verum hic ingens discrimen occurrit, quando pro r sumitur fractio valde exigua, veluti si sumamus $r = \frac{1}{20}$ siue $s = 20$ et calculum vt supra instituamus, incipiendo ab $a = 2$ ob $ls = 1,3010300$ calculus ita se habebit

a $lls = 1,1142873$
subtr. $la = 0,3010300$ hinc $\alpha = 0,50000$

$llb = 9,8132573$

$lb = 0,6505149$ hinc $l\beta = 9,3494841$ ergo $\beta = 0,22360$

$lls = 0,1142873$

$llc =$

$llc = 9,4637724$

$lc = 0,2909192$ hinc $l\gamma = 9,7090808$ ergo $\gamma = 0,51177$

$lls = 0,1142873$

$lld = 9,8233681$

$ld = 0,6658373$ hinc $l\delta = 9,3341627$ ergo $\delta = 0,21585$

$lls = 0,1142873$

$lle = 9,4484500$

$le = 0,2808342$ hinc $\varepsilon = 9,7191658$ ergo $\varepsilon = 0,52380$

$lls = 0,1142873$

$llf = 9,8334531$

$lf = 0,6814800$ hinc $\zeta = 9,3185200$ ergo $\zeta = 0,20821$

$lls = 0,1142873$

$llg = 9,4328043$

$lg = 0,2708988$ hinc $\eta = 9,7291012$ ergo $\eta = 0,53592$

etc. etc.

§. 35. Hinc ergo clare perſpicitur, terminos huius progreſſionis continuo longius a ſe inuicem recedere atque alternatim ad duos valores fixos appropinquare, quorum maior erit $> 0,53592$, minor vero erit $< 0,20821$. Hoc ergo ſingulare phoenomenon ſine vllo calculo in hoc ſimplici exemplo, quo $r = \frac{1}{16}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, conſideremus; tum enim erit $\beta = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$, $\gamma = r^{\beta} = \frac{1}{2}$, $\delta = r^{\gamma} = \frac{1}{4}$ etc. omnes igitur termini alternatim erunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Vt igitur hos duos limites fixos inueſtigemus, quoties quidem tales occurrunt, deſignemus eos litteris Φ et ψ, ita vt ſit $r^{\Phi} = \psi$ et $r^{\psi} = \Phi$, ſiue ſi ponamus $r = \frac{1}{s}$, $\Phi = \frac{1}{x}$ et $\psi = \frac{1}{y}$, pro dato valore s requiruntur bini numeri x et y, vt fiat $s = x^y$ et $s = y^x$.

§. 36. Sumptis ergo logarithmis erit primo $ls = ylx$ et $ls = xly$, ita vt esse debeat $ylx = xly$. Ponatur hic $y = px$ fietque $plx = lp + lx$, vnde colligitur $lx = \frac{lp}{p-1}$ ideoque $x = p^{\frac{1}{p-1}}$ atque $y = p^{\frac{p}{p-1}}$; porro vero habebitur $ls = \frac{p^{\frac{p}{p-1}} lp}{p-1}$.

§. 37. Hinc iam primo discimus casum duorum limitum fixorum locum habere non posse, nisi valor ipsius s in hac aequatione $ls = \frac{p^{\frac{p}{p-1}} lp}{p-1}$ contineatur; tum vero ambo illi limites erunt $x = p^{\frac{1}{p-1}}$ et $y = p^{\frac{p}{p-1}}$, quae ergo eo magis a se inuicem discrepabunt, quo maior numerus pro p accipiatur; aliquos igitur casus iuuabit attulisse. Sit primo $p = 2$ eritque $x = 2$ et $y = 4$ ideoque $s = 16$, ita vt sit $r = \frac{1}{16}$; $\Phi = \frac{1}{2}$ et $\psi = \frac{1}{4}$, quem casum iam supra sumus contemplati; sit nunc $p = \frac{3}{2}$ eritque $x = \frac{9}{4}$ et $y = \frac{27}{8}$, tum vero $s = (\frac{27}{8})^{\frac{9}{4}}$.; consequenter erit $r = (\frac{8}{27})^{\frac{9}{4}}$, $\Phi = \frac{4}{9}$ et $\psi = \frac{8}{27}$.

§. 38. Hinc autem quoque ipsum limitem assignare poterimus, quem simul ac numerus s superauerit, bini valores fixi x et y se exerant. Euidens autem est hunc limitem constitui debere in eo loco, vbi bini numeri x et y fiunt aequales, siue vbi $p = 1$; supra autem vidimus hoc casu fieri $x = e$ simulque $y = e$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, tum vero erit $s = e^e$; quam ob rem habebimus $r = \frac{1}{e^e}$ et $\Phi = \psi = \frac{1}{e}$, vnde patet huiusmodi binos valores semper locum habere, quando radix r minor fuerit quam $\frac{1}{e^e}$.

§. 39. Operae igitur pretium erit hunc ipsum limitem accuratius definire; cum igitur sit $e = 2,7182818$, $le =$

$le = 0{,}4342944$ et $ls = ele$, erit $lls = le + lle = 0{,}0721786$ ideoque $ls = 1{,}1808000$, hinc $lr = 8{,}8192000$, consequenter $r = 0{,}065948$, siue etiam $r = \frac{1}{15{,}164}$; vnde intelligitur quamdiu radix r maior fuerit hac fractione $\frac{1}{15{,}164}$, tum omnes terminos nostrae progressionis semper ad certum limitem fixum conuergere; contra autem quando fuerit $r < \frac{1}{15{,}164}$ tum accessionem ad duos limites diuersos alternatim conuergere.

De theoremate, quod Illustr. *Marchio de Condorçet* nobiscum communicauit.

§. 40. His mirabilibus phoenomenis perpensis multo facilius erit vim memorati theorematis circa hoc ipsum argumentum intelligere; descripsit autem vir illustris seriem quandam infinitam, cuius termini lege tantopere perplexa formari debent, vt eius indolem non nisi summa patientia adhibita perspicere licet, istius autem seriei summam affirmat esse talem formulam exponentialem replicatam, quam hactenus fusius sumus perscrutati; demonstrationem quidem non addidit: manifestum autem est, eam per inuersionem ex solutione sequentis problematis erui debere.

Problema.

Sumpta pro lubitu radice r, *si formata fuerit ista progressio* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ *etc. ita vt sit* $\beta = r^{\alpha}$; $\gamma = r^{\beta}$; $\delta = r^{\gamma}$ *etc. tum eam inuestigare progressionem, quae resultabit, si primus exponens* α *quapiam quantitate siue augeatur siue minatur.*

Solutio.

§. 41. Ponamus igitur primum exponentem esse $= \alpha(1 + z)$ similique modo pro sequentibus terminis statuamus

$$r^{\alpha(1+z)} = \beta(1 + z'); \quad r^{\beta(1+z')} = \gamma(1 + z''); \quad r^{\gamma(1+z'')} = \delta(1 + z''') \text{ etc.}$$

 quo

quo pacto progredi licebit, quovsque lubuerit; horum vero terminum vltimum illustris auctor indefinitum assumpsit.

§. 42. Cum igitur sit $r^{\alpha(1+z)}=\beta(1+z')$ ideoque ob $r^{\alpha}=\beta$ habebitur $r^{\alpha z}=(1+z')$, vnde quantitatem z' erui oportet; cum igitur $r^{\alpha z}$ per seriem infinitam sit

$$1+\alpha z lr+\tfrac{1}{2}\alpha^{2}z^{2}(lr)^{2}+\tfrac{1}{6}(\alpha z lr)^{3}+\tfrac{1}{24}(\alpha z lr)^{4}+\tfrac{1}{120}(\alpha z lr)^{5} \text{ etc.}$$

assequimur hanc determinationem aequalem isti z seriei, primo termino sublato. Ponamus autem breuitatis gratia $\alpha z lr=v$ vt fiat

$$z'=v+\tfrac{1}{2}vv+\tfrac{1}{6}v^{3}+\tfrac{1}{24}v^{4}+\tfrac{1}{120}v^{5}+\text{ etc.}$$

Cum autem sit $\alpha lr=l\beta$ erit $v=zl\beta$ sicque facili negotio valor z' definietur.

§. 43. Simili modo cum sit $r^{\beta(1+z')}=\gamma(1+z'')$ vnde ob $r^{\beta}=\gamma$, si breuitatis gratia ponamus $\beta z' lr=v'$, ita vt sit $v'=z'l\gamma$, colligitur fore

$$z''=v'+\tfrac{1}{2}v'^{2}+\tfrac{1}{6}v'^{3}+\tfrac{1}{24}v'^{4}+\tfrac{1}{120}v'^{5}+\text{ etc.}$$

simili modo si porro ponamus $\gamma z'' lr=z'' l\delta=v''$ erit

$$z'''=v''+\tfrac{1}{2}v''^{2}+\tfrac{1}{6}v''^{3}+\tfrac{1}{24}v''^{4}+\tfrac{1}{120}v''^{5}+\text{ etc.}$$

Porro vero si fiat $v'''=z'''l\varepsilon$ erit

$$z''''=v'''+\tfrac{1}{2}v'''^{2}+\tfrac{1}{6}v'''^{3}+\tfrac{1}{24}v'''^{4}+\tfrac{1}{120}v'''^{5}+\text{ etc.}$$

quae progressio iam facillime percipitur; ac si continuo ipsam quantitatem z substituere velimus, nullum est dubium, quin ipsa series ab illustri *Condorcet* proposita oriatur.

DE

DE METHODIS QVAE ADHIBERI POSSVNT, AD INTEGRANDAS AEQVATIONES DIFFERENTIALES LINEARES, QVAS DIFFERENTIALIA PLVRIVM VARIABILIVM INGREDIVNTVR.

Auctore
L E X E L L.

§. 1.

Per aequationes differentiales lineares, eae intelligi solent in quibus nec quadrata, nec altiores potestates differentialium reperiuntur, excepto tamen differentiali, quod pro his aequationibus ponitur constans, quodque differentiale quasi mensuram constituit, ad quam reliquorum valores exquiri debent. Huius modi igitur aequationes differentiales sub forma sequenti repraesentari possunt:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta x + \varepsilon y + \zeta z = 0$$
$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' z = 0$$
$$ddz + \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz + \delta'' x + \varepsilon'' y + \zeta'' z = 0,$$

vbi quidem breuitatis gratia differentiale constans, eiusque potestates eo potius omisimus, quod illas in ipsis coefficientibus constantibus α, β, γ etc. iam contineri, supponere liceat. Fient vero hac aequationes aliquanto generaliores, si expressiones nostrae modo allatae,

$$ddx + \alpha dx + \beta \delta y + \gamma dz + \delta x + \varepsilon y + \zeta z \text{ etc.}$$

non aequentur nihilo, sed functionibus quibusdam eius quantitatis, cuius differentiale ponitur constans, et Methodi quidem,

 quae

quae pro integratione formularum propositarum valent, etiam ad illas generaliores applicari possunt.

§. 2. Pro integrandis quidem aequationibus differentialibus huius formae:

$$ddx + \alpha x + \beta y + \gamma z = T$$
$$ddy + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = T'$$
$$ddz + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = T''.$$

Illust. *d'Alembert* in egregio opere suae Dynamices, elegantem valde proposuit Methodum, de qua tamen mihi non liquet, quomodo adplicari possit, ad aequationes differentiales, in quibus praeter ddx, ddy, ddz etiam differentialia simplicia dx, dy, dz reperiuntur; multo minus eius vsus adhiberi posse videtur, si aequationes differentiales superiorum ordinum proponantur, quas, differentialia quarta, tertia etc. singularum variabilium x, y, z ingrediuntur. Quum igitur resolutiones plurium Problematum Mechanicorum ex integratione huiusmodi aequationum differentialium pendeant; operae pretium duxi, Methodos, quae pro his integrationibus mihi se obtulerunt, heic proponere.

§. 3. Vt igitur a simplicioribus ordiar, propositae sint binae hae aequationes differentiales:

$$\text{I.}\quad ddx + \alpha\, dx + \beta\, \delta y + \gamma x + \delta y = 0$$
$$\text{II.}\quad ddy + \alpha' \delta x + \beta' \delta y + \gamma' x + \delta' y = 0.$$

Quum itaque in his aequationibus differentialia ipsorum x et y sint permixta, in mentem venit, vt modum inuestigarem quo reperiri posset aequatio differentialis, quae ex differentialibus vel solius x, vel solius y, sit composita; quod institutum sequenti ratione adgressus sum. Differentientur binae aequationes propositae bis, ita vt habeantur hae aequationes differentiales:

$$\text{III.}\quad d^3 x + \alpha\, ddx + \beta\, ddy + \gamma\, dx + \delta\, dy = 0$$
$$\text{IV.}\quad d^3 y + \alpha' ddx + \beta' ddy + \gamma' dx + \delta' dy = 0$$

V.

$$\text{V. } d^4x + \alpha d^3x + \beta d^3y + \gamma ddx + \delta ddy = 0$$
$$\text{VI. } d^4y + \alpha' d^3x + \beta' d^3y + \gamma' ddx + \delta' ddy = 0.$$

Iam vero totium negotium eo redit, vt ex aequatione V, subſidio aequationum praecedentium I. II. III. IV. eliminari queant, omnia differentialia ipſius y, ſcilicet d^3y, ddy, dy et y, quod omnino ſuccedere debere ex rei natura intelligitur; hac autem eliminatione facta, prodibit aequatio differentialis quarti gradus, quam ſola differentialia ipſius x ingrediuntur. Operoſum autem foret, ſi hanc ſubſtitutionem re ipſa perficere vellemus, quare rem ita tentabimus, vt ſupponamus, aequationem noſtram quaeſitam prodire, per ſequentem combinationem: $\text{V} + \lambda\,\text{IV.} + \mu\,\text{III} + \nu\,\text{II.} + \varrho\,\text{I} = 0$. Hinc autem conſequemur:

$$\begin{aligned}
&d^4x + \alpha d^3x + \beta d^3y + \gamma ddx + \delta ddy \\
&\qquad + \lambda d^3y + \lambda\alpha' ddx + \lambda\beta' ddy + \lambda\gamma' dx + \lambda\delta' dy \\
&+ \mu d^3x \qquad + \mu\alpha ddx + \mu\beta ddy + \mu\gamma dx + \mu\delta dy \\
&\qquad + \varrho ddx + \nu ddy + \nu\alpha' dx + \nu\beta' dy + \nu\gamma' x + \nu\delta' y \\
&\qquad\qquad + \varrho\alpha dx + \varrho\beta dy + \varrho\gamma x + \varrho\delta y = 0.
\end{aligned}$$

In qua aequatione quum per hypotheſin ſola differentialia ipſius x reperiri debeant, coefficientes ipſorum d^3y, ddy, dy et y nihilo aequari debent, ex quo ſequentes prodibunt aequationes:

$$\beta + \lambda = 0,\ \delta + \lambda\beta' + \mu\beta + \nu = 0;\ \lambda\delta' + \mu\delta + \nu\beta' + \varrho\beta = 0;\ \nu\delta' + \varrho\delta = 0.$$

Hinc autem deducuntur ſequentes valores:

$$\lambda = -\beta;\ \mu = \beta';\ \nu = -\delta,\ \varrho = \delta',$$

quare aequatio noſtra erit:

$$d^4x + (\alpha + \mu) d^3x + (\gamma + \lambda\alpha' + \mu\alpha + \varrho +) ddx + (\lambda\gamma' + \mu\gamma + \nu\alpha' + \varrho\alpha) dx$$
$$+ (\nu'\gamma + \varrho\gamma) x = 0, \text{ ſiue}$$
$$d^4x + (\alpha + \beta') d^3x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta') ddx + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta'\gamma) dx$$
$$+ (\delta'\gamma - \delta\gamma') x = 0,$$

ſicque iam adepti ſumus aequationem differentialem, quam ſola

ſola differentialia ipſius x ingrediuntur. Vlteriorem autem integrationem huius aequationis differentialis heic ſuſcipere, eo minus e re eſt, quod totum hoc negotium iam alibi ſit tractatum, imprimisque in Tomo II. Calculi Integralis Illuſtr. *Euleri.*

§. 4. Si eadem ratione atque iam factum eſt, quaerere vellemus aequationem, quae ex ſolis differentialibus ipſius y componitur, perueniremus ad hanc aequationem differentialem:

$$d^4y+(\alpha+\beta')d^3y+(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\gamma+\delta')ddy+(\alpha\delta'-\alpha'\delta-\beta\gamma'+\beta'\gamma)dy$$
$$+(\delta'\gamma-\delta\gamma')y=0$$

quae priori prorſus ſimilis eſt, vnde intelligitur x et y ſimili modo determinari; ſuperfluum autem foret vtramque hanc quantitatem ſeorſim inueſtigare, inuento enim valore ipſius x, valor quantitatis y, per ſolas differentiationes, facile eruitur. Hunc enim in finem ope aequationis I. et II, ex aequatione III. eliminentur ddy et dy, ita vt ſola remaneat y, cuius igitur valor per d^3x, ddx, dx et x exprimetur. Vt autem hoc facilius procedat, ponamus eſſe: III. $+\eta$ II. $+\theta$. I $=0$, ſiue

$$d^3x+\alpha ddx+\beta ddy+\gamma dx+\delta dy$$
$$+\theta ddx+\eta ddy+\eta\alpha'dx+\eta\beta'dy+\eta\gamma'x+\eta'\delta y$$
$$+\theta\alpha dx+\theta\beta dy+\theta\gamma x+\theta\delta y=0,$$

vnde erit $\beta+\eta=0$, ſiue $\eta=-\beta$, tumque eſſe debet

$$\delta+\eta\beta'+\theta\beta=0, \text{ ſiue } \theta=\frac{\beta\beta'-\delta}{\beta}=\beta'-\frac{\delta}{\beta},$$

quare habebimus:

$$d^3x+(\alpha+\beta'-\tfrac{\delta}{\beta})ddx+(\gamma-\alpha'\beta+\alpha\beta'-\tfrac{\alpha\delta}{\beta})dx+(\beta'\gamma-\beta\gamma'-\tfrac{\delta\gamma}{\beta})x$$
$$+(\beta'\delta-\beta\delta'-\tfrac{\delta^2}{\beta})y=0.$$

Caeterum obſeruari meretur, quod ſi ad huius aequationis differentiale, addatur ipſa per $\frac{\delta}{\beta}$ multiplicata, tumque inde ſubtra-

trahatur aequatio I. in $(\frac{\beta'\delta}{\beta}-\delta'-\frac{\delta^2}{\beta^2})$ ducta, prodire aequationem istam:

$$d^4x+(\alpha+\beta')d^3x+(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\gamma+\delta')ddx+(\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma')dx$$
$$+(\delta'\gamma-\delta\gamma')x=0.$$

Ex quo consensus harum binarum aequationum tanto magis confirmatur.

§. 5. Si in aequationibus nostris ponatur, $\alpha=0$; $\alpha'=0$; $\beta=0$; $\beta'=0$, pertingemus ad has aequationes quarti gradus

$$d^4x+(\gamma+\delta')ddx+(\gamma\delta'-\gamma'\delta)x=0 \text{ et}$$
$$d^4y+(\gamma+\delta')ddy+(\gamma\delta'-\gamma'\delta)y=0.$$

Tumque aequatio differentialis per quam y exprimitur, ita erit expressa: $ddx+\gamma x+\delta y=0$, siue y iam per primam aequationum propositarum dabitur, modo cognitus fuerit valor ipsius x. Porro si ponatur $\gamma'=0$, $\delta'=0$, siue si aequatio nostra II. fuerit, $dy+\alpha' x+\beta' y=0$, fiet aequatio nostra finalis:

$$d^4x+(\alpha+\beta')d^3x+(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\gamma)ddx-\alpha'\delta\, dx=0, \text{ siue}$$
$$d^3x+(\alpha+\beta')ddx+(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\gamma)dx-\alpha'\delta\, x=0.$$

Neque hac integratione vllam constantem arbitrariam introducere necesse est. Tum vero ex aequationibus nostris differentialibus quarti gradus, quae sola differentialia ipsorum x et y inuoluunt, facile perspicitur, loco x et y, introduci posse vel summam $x+y$ vel differentiam $x-y$, seu etiam quoduis huiusmodi productum $\pi x+\sigma y$, quod si enim id statuatur $=z$, erit quoque

$$d^4z+(\alpha+\beta')d^3z+(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\gamma+\delta')ddz+(\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma')dz$$
$$+(\delta'\gamma-\delta\gamma')z=0.$$

§. 6. Primo quidem intuitu incongruum videri posset, quod ex binis nostris aequationibus differentialibus, quae secundi gradus tantum sunt, per differentiationem ad aequationes differentiales quarti gradus transiuimus; quum scilicet re-

ſolutio aequationis differentialis quarti gradus ſine dubio maiorem pariat difficultatem, quam reſolutio aequationis ſecundi gradus. Verum heic perpendendum eſt, binas proponi aequationes differentiales ſecundi gradus, per quarum integrationem quatuor conſtantes arbitrariae introducuntur, totidem nimirum ac per integrationem vnius aequationis differentialis quarti gradus. At integrata vna earum, vti ea quam ſola differentialia ipſius x ingrediuntur, alteram pro y allatam, ſeorſim integrare, minime neceſſarium eſt; quippe quum y, vti modo oſtendimus, per valores differentialium d^3x, ddx, dx et ipſam x, ſponte exprimatur; vnde inuentis conſtantibus arbitrariis, quae pro x locum habent, nullae nouae conſtantes pro y introducuntur.

§. 7. Conſideremus nunc has binas aequationes differentiales:

I. $d^3 x + \alpha ddx + \beta ddy + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon x + \zeta y = 0$

II. $d^3 y + \alpha' ddx + \beta' ddy + \gamma' dx + \delta' dy + \varepsilon' x + \zeta' y = 0$

ex quibus vt elici queat aequatio, ſola differentialia ipſiur x inuoluens, differentietur vnaquaeque harum aeqnationum ter, vt habeatur:

III. $d^4 x + \alpha d^3 x + \beta d^3 y + \gamma ddx + \delta ddy + \varepsilon dx + \zeta dy = 0$

IV. $d^4 y + \alpha' d^3 x + \beta' d^3 y + \gamma' ddx + \delta' ddy + \varepsilon' dx + \zeta' dy = 0$

V. $d^5 x + \alpha d^4 x + \beta d^4 y + \gamma d^3 x + \delta d^3 y + \varepsilon ddx + \zeta ddy = 0$

VI. $d^5 y + \alpha' d^4 x + \beta' d^4 y + \gamma' d^3 x + \delta' d^3 y + \varepsilon' ddx + \zeta' ddy = 0$

VII. $d^6 x + \alpha d^5 x + \beta d^5 y + \gamma d^4 x + \delta d^4 y + \varepsilon d^3 x + \zeta d^3 y = 0$

VIII. $d^6 y + \alpha' d^5 x + \beta' d^5 y + \gamma' d^4 x + \delta' d^4 y + \varepsilon' d^3 x + \zeta' d^3 y = 0.$

Iam vero ponatur eſſe aequatio, ſola differentialia ipſius x inuoluens, iſta ſequens:

VII + λ' VI + λ V + μ' IV + μ III + ν' II + ν I = 0

quare

quare habebimus :

= d^6x	d^5x	d^5y	d^4x	d^4y	d^3x	d^3y	ddx	ddy	dx	dy	x	y
$+1$	$+\alpha$	$+\beta$	$+\gamma$	$+\delta$	$+\varepsilon$	$+\zeta$	$+\lambda\varepsilon$	$+\lambda\zeta$				
	$+\lambda$	$+\lambda'$	$+\lambda\alpha$	$+\lambda\beta$	$+\lambda\gamma$	$+\lambda\delta$	$+\mu\gamma$	$+\mu\delta$	$+\mu\varepsilon$	$+\mu\zeta$		
			$+\mu$	$+\mu'$	$+\mu\alpha$	$+\mu\beta$	$+\nu\alpha$	$+\nu\beta$	$+\nu\gamma$	$+\nu\delta$	$+\nu\varepsilon$	$+\nu\zeta$
			$+\lambda'\alpha'$	$+\lambda'\beta'$	$+\nu$	$+\lambda'\delta'$	$+\lambda'\varepsilon'$	$+\lambda'\zeta'$				
					$+\lambda'\gamma'$	$+\mu'\beta'$	$+\mu'\gamma'$	$+\mu'\delta'$	$+\mu'\varepsilon'$	$+\mu'\zeta'$		
					$+\mu'\alpha'$	$+\nu'$	$+\nu'\alpha'$	$+\nu'\beta'$	$+\nu'\gamma'$	$+\nu'\delta'$	$+\nu'\varepsilon'$	$+\nu'\zeta'$

Heic vero coefficientes differentialium d^5y, d^4y, d^3y, ddy, dy et ipsius y disparere debent, quare sequentes habebuntur aequalitates :

$$\beta + \lambda' = 0 ; \; \delta + \lambda\beta + \mu' + \lambda'\beta' = 0$$
$$\zeta + \lambda\delta + \mu\beta + \lambda'\delta' + \mu'\beta' + \nu' = 0$$
$$\lambda\zeta + \mu\delta + \nu\beta + \lambda'\zeta' + \mu'\delta' + \nu'\beta' = 0$$
$$\mu\zeta + \nu\delta + \mu'\zeta' + \nu'\delta' = 0 ; \; \nu\zeta + \nu'\zeta' = 0.$$

Ex his autem aequationibus sequentes deducentur valores :

$\lambda' = -\beta$; $\lambda = \beta'$; $\mu' = -\delta$; $\mu = \delta'$; $\nu' = -\zeta$; $\nu = \zeta$, quibus valoribus suffectis, aequatio nostra sexti gradus sequenti modo erit expressa :

$$d^6x + (\alpha + \beta')d^5x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')d^4x$$
$$+ (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma' + \varepsilon + \zeta')d^3x$$
$$+ (\alpha\zeta' - \alpha'\zeta + \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta)ddx$$
$$+ (\gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \delta'\varepsilon - \delta\varepsilon')dx + (\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta)x = 0.$$

§. 8. Simili plane ratiocinio pertingere licebit ad aequationem differentialem, quam sola differentialia ipsius y ingrediuntur, priori perfecte similem. At vero postquam variabilis x inuenta fuerit, inde y facile determinabitur ope huius combinationis :

$$\text{V} + m.\,\text{IV} + m'\,\text{III} + n.\,\text{II} + n'.\,\text{I},$$

 quae

quae euoluta dat:

$$\begin{array}{llllllll}
0 = d^5 x & + \alpha . d^4 x & + \beta . d^4 y & + \gamma . d^3 x & + \delta . d^3 y & + \varepsilon . ddx & + \zeta . ddy & \\
\quad + m' & + m & + m\alpha' & + m\beta' & + m\gamma' & + m\delta' & + m\varepsilon' dx & + m\zeta' dy \\
 & & + m'\alpha & + m'\beta & + m'\gamma & + m'\delta & + m'\varepsilon & + m'\zeta \\
 & & + n' & + n & + n\alpha' & + n\beta' & + n\gamma' & + n\delta' \\
+ n\varepsilon' x + n\zeta' y & & & & + n'\alpha & + n'\beta & + n'\gamma & + n'\delta \\
+ n'\varepsilon \; + n'\zeta . & & & & & & &
\end{array}$$

Quum termini quae differentialia ipſius y inuoluunt prorſus eliminari debeant, habebimus has aequationes:

$$\beta + m = 0 ; \; \delta + m\beta' + m'\beta + n = 0 ; \; \zeta + m'\delta + m'\delta + n\beta' + n'\beta = 0 ;$$
$$m\zeta' + m'\zeta + n\delta' + n'\delta = 0 ,$$

vnde conficietur:

$$m = -\beta ; \; m' = \beta' + \lambda ; \; n = -\delta - \beta\lambda ; \; n' = \delta' - \frac{\zeta}{\beta} + \lambda\left(\beta' - \frac{\delta}{\beta}\right),$$

vbi quidem

$$\lambda = \frac{\beta^2 \zeta' - \beta\beta'\zeta - \zeta\delta}{\beta(\beta'\delta - \beta\delta') - \delta^2 + \beta\zeta} = \frac{\beta(\beta\zeta' - \beta'\zeta) - \zeta\delta}{\beta(\beta'\delta - \beta\delta') - \delta^2 + \beta\zeta}.$$

Caeterum ipſam quidem aequationem, qua y ſic exprimitur heic exponere, nunc nihil attinet.

§. 9. Si fuerit $\varepsilon = 0 ; \zeta = 0 ; \varepsilon' = 0 ; \zeta' = 0$, ſeu ſi aequationes noſtrae fuerint vt ſupra:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0 ; \; ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0 ,$$

aequatio finalis pro x, erit:

$$d^6 x + (\alpha + \beta') d^5 x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta') d^4 x + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma') d^3 x$$
$$+ (\gamma\delta' - \gamma'\delta) ddx = 0 ,$$

quae ſponte ſua ad illam aequationem quarti gradus §. 4. allatam, deprimitur. Porro vero ſi tantum ſit $\varepsilon' = 0, \zeta' = 0$, fiet aequatio noſtra:

$$d^5 x + (\alpha + \beta') d^4 x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta') d^3 x + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma' + \varepsilon) ddx$$
$$+ (-\alpha'\zeta + \beta'\varepsilon + \gamma\delta' - \gamma'\delta) dx + (\delta'\varepsilon - \gamma'\zeta) x = 0.$$

Deinde ſi vlterius ſit quoque $\gamma' = 0 ; \delta' = 0$, fiet aequatio:

$$d^4 x + (\alpha + \beta') d^3 x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma) ddx + (\beta'\gamma - \alpha'\delta + \varepsilon) dx$$
$$+ (\beta'\varepsilon - \alpha'\zeta) x = 0.$$

Quibus

Quibus perpensis iam facile patet, istam aequationem differentialem, quae ex solis differentialibus ipsius x componitur, eiusdem semper esse difficultatis, ac binas illas propositas, differentialia ipsorum x et y inuoluentes, ex quibus illa deducta fuit. Vnaquaeque autem aequatio differentialis aestimatur ex ordine differentialis summi in ista aequatione, sic haec aequatio:

$$d^3 x + \alpha\, ddx + \beta\, ddy + \gamma\, dx + \delta\, dy + \varepsilon x + \zeta y = 0,$$

est aequatio differentialis tertii ordinis, cum qua igitur si combinetur illa secundi ordinis:

$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0.$$

perueniemus ad aequationem differentialem quinti gradus, sola differentialia ipsius x inuoluentem.

§. 10. Ex iis quae nunc docuimus, facile constat, quomodo tractari debeant aequationes adhuc altiorum ordinum, in quibus differentialia binarum variabilium x et y occurrunt. Vti si propositae fuerint hae aequationes:

$$d^4 x + \alpha\, d^3 x + \beta\, d^3 y + \gamma\, ddx + \delta\, ddy + \varepsilon\, dx + \zeta\, dy + \eta\, x + \theta\, y = 0$$

$$d^4 y + \alpha' d^3 x + \beta' d^3 y + \gamma' ddx + \delta' ddy + \varepsilon' dx + \zeta' dy + \eta' x + \theta' y = 0.$$

Nimirum si breuitatis gratia, prior harum aequationum indicetur per P, posterior per P′, capienda sunt differentialia dP, ddP, $d^3 P$, $d^4 P$, itemque $dP' \ldots a^4 P'$, tumque facta combinatione:

$$d^4 P + \lambda a^3 P + \lambda' d^3 P' + \mu\, ddP + \mu' ddP' + \nu\, dP + \nu' dP' + \varrho P + \varrho' P = 0,$$

emerget aequatio, quam sola differentialia ipsius x ingredientur, si valores ipsorum $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ etc. ita determinentur, vt sit:

$$\lambda = +\beta';\ \lambda' = -\beta;\ \mu = +\delta';\ \mu' = -\delta;\ \nu = +\zeta';\ \nu = -\zeta;$$
$$\varrho = +\theta';\ \varrho' = -\theta.$$

His enim valoribus adhibitis, coefficientes differentialium ipsius y euanescent, pro nostra expressione:

 $d^4 P +$

$$d^4 P + \lambda d^3 P + \lambda' d^3 P + \mu \, ddP + \mu' ddP' + \nu dP + \nu' dP' + \varrho P + \varrho' P' = 0.$$

Iidem vero valores in coefficientibus differentialium ipſius x introducti, ſequentem exhibebunt aequationem:

$$d^8 x + (\alpha + \beta') d^7 x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta') d^6 x$$
$$+ (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta'\gamma + \varepsilon + \zeta') d^5 x$$
$$+ (\alpha\zeta' - \alpha'\zeta + \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta + \eta + \theta') d^4 x$$
$$+ (\alpha\theta' - \alpha'\theta + \beta'\eta - \beta\eta' + \gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \delta'\varepsilon - \delta\varepsilon') ddx$$
$$+ (\gamma\theta' - \gamma'\theta + \delta'\eta - \delta\eta' + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta) ddx + (\varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta + \zeta'\eta - \zeta\eta') dx$$
$$+ (\eta\theta' - \eta'\theta) x = 0.$$

§. 11. Operae pretium iam eſt, vt diſpiciamus quomodo valores coefficientium pro differentialibus, $d^7 x$, $d^6 x$. etc. expedite formari queant, quippe quum hinc euidens fiet quomodo idem negotium, pro aequationibus altioribus perficere liceat. Quum igitur aequationes noſtrae propoſitae fuerint:

$$d^4 x + \alpha d^3 x + \beta d^3 y + \gamma \, ddx + \delta \, ddy + \varepsilon dx + \zeta dy + \eta x + \theta y = 0$$
$$d^4 y + \alpha' d^3 x + \beta' d^3 y + \gamma' ddx + \delta' ddy + \varepsilon' dx + \zeta' dy + \eta' x + \theta' y = 0.$$

Notentur coefficientes differentialium ipſius x, qui ſunt:

α, α', γ, γ', ε, ε', η, η'

itemque coefficientes differentialium ipſius y ſequentes:

β, β', δ, δ', ζ, ζ', θ, θ'.

Tum vero obſeruetur in coefficientibus differentialium pro x, aequationis noſtrae finalis, primum occurrere has ſummas ſimplicium coefficientium:

$\alpha + \beta'$; $\gamma + \delta'$; $\varepsilon + \zeta'$; $\eta + \theta'$;

quarum prima coefficientem differentialis $d^7 x$ conſtituit, ſecunda vero coefficientem differentialis $d^6 x$, tertia coefficientem differentialis $d^5 x$ et quarta coefficientem differentialis $d^4 x$ ingreditur. Porro ſequentia formentur producta, binorum coefficientium:

$\alpha\beta' - \alpha\beta'$; $\alpha\delta' - \alpha'\delta$; $\alpha\zeta' - \alpha'\zeta$; $\alpha\theta' - \alpha'\theta$;
$\beta'\gamma - \beta\gamma'$; $\beta'\varepsilon - \beta\varepsilon'$; $\beta'\eta - \beta\eta'$;
$\gamma\delta' - \gamma'\delta$; $\gamma\zeta' - \gamma'\zeta$; $\gamma\theta' - \gamma'\theta$; $\delta'\varepsilon - \delta\varepsilon'$; $\delta'\eta - \delta\eta'$;
$\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta$; $\varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta$; $\zeta'\eta - \zeta\eta'$; $\eta\theta' - \eta\theta'$;

quae

quae maioris perſpicuitatis gratia ſcribantur, vti ſequens ſchema indicat:

$d^6 x$	$d^5 x$	$d^4 x$	$d^3 x$	ddx	dx	x
$\alpha\beta'-\alpha'\beta$	$\alpha\delta'-\alpha'\delta$	$\alpha\zeta'-\alpha'\zeta$	$\alpha\theta'-\alpha'\theta$			
	$\beta'\gamma-\beta\gamma'$	$\beta'\varepsilon-\beta\varepsilon'$	$\beta'\eta-\beta\eta'$			
		$\gamma\delta'-\gamma'\delta$	$\gamma\zeta'-\gamma'\zeta$	$\gamma\theta'-\gamma'\theta$		
			$\delta'\varepsilon-\delta\varepsilon'$	$\delta'\eta-\delta\eta'$	$\varepsilon\theta'-\varepsilon'\theta$	
				$\varepsilon\zeta'-\varepsilon'\zeta$	$\zeta'\eta-\zeta\eta'$	$\eta\theta'-\eta\theta'$

Tituli autem differentialium ſingulis columnis verticalibus ſuperſcripti indicant, ad quemnam coefficientem producta in iſtis columnis contenta, pertineant.

§. 12. Simili modo ſi propoſitae fuerint binae hae aequationes differentiales quinti gradus:

$$d^5 x+\alpha d^4 x+\beta d^4 y+\gamma d^3 x+\delta d^3 y+\varepsilon ddx+\zeta ddy+\eta dx$$
$$+\theta dy+\iota x+\varkappa y=0$$
$$d^5 y+\alpha' d^4 x+\beta' d^4 y+\gamma' d^3 x+\delta' d^3 y+\varepsilon' ddx+\zeta' ddy$$
$$+\eta' dx+\theta' dy+\iota' x+\varkappa' y=0,$$

quae perducent ad hanc aequationem decimi gradus:

$$d^{10} x+\mathrm{A} d^9 x+\mathrm{B} d^8 x+\mathrm{C} d^7 x+\mathrm{D} d^6 x+\mathrm{E} d^5 x+\mathrm{F} d^4 x$$
$$+\mathrm{G} d^3 x+\mathrm{H} ddx+\mathrm{I} dx+\mathrm{K} x=0,$$

coefficientes A, B, C etc. ſequenti modo formari poterunt: Primum notentur ſummae:

$$\alpha+\beta';\ \gamma+\delta';\ \varepsilon+\zeta';\ \eta+\theta';\ \iota+\varkappa';$$

quarum $\alpha+\beta'=\mathrm{A}$, reliquae vero $\gamma+\delta'$; $\varepsilon+\zeta'$; $\eta+\theta'$; $\iota+\varkappa'$ reſpective pertinent ad B, C, D. E. Deinde formentur producta ex binis coefficientibus, vti ſupra docuimus:

$d^9 x$

$d^8 x$	$d^7 x$	$d^6 x$	$d^5 x$	$d^4 x$	$d^3 x$	ddx	dx	x
$\alpha\beta'-\alpha'\beta$	$\alpha\delta'-\alpha'\delta$	$\alpha\zeta'-\alpha'\zeta$	$\alpha\theta'-\alpha'\theta$	$\alpha\varkappa'-\alpha'\varkappa$				
	$\beta'\gamma-\beta\gamma'$	$\beta'\varepsilon-\beta\varepsilon'$	$\beta'\eta-\beta\eta'$	$\beta'\iota-\beta\iota'$				
		$\gamma\delta'-\gamma'\delta$	$\gamma\zeta'-\gamma'\zeta$	$\gamma\theta'-\gamma'\theta$	$\gamma\varkappa'-\gamma\varkappa'$			
			$\delta'\varepsilon-\delta\varepsilon'$	$\delta'\eta-\delta\eta'$	$\delta'\iota-\delta\iota'$			
				$\varepsilon\zeta'-\varepsilon'\zeta$	$\varepsilon\theta'-\varepsilon'\theta$	$\varepsilon\varkappa'-\varepsilon'\varkappa$		
					$\zeta'\eta-\zeta\eta'$	$\zeta'\iota-\zeta\iota'$		
						$\eta\theta'-\eta'\theta$	$\eta\varkappa'-\eta'\varkappa$	
							$\theta'\iota-\theta\iota'$	
								$\iota\varkappa'-\iota\varkappa'$

Hinc igitur pro aequatione noſtra finali, erunt valores coefficientium:

$A=\alpha+\beta'$
$B=\gamma+\delta'+\alpha\beta'-\alpha'\beta$
$C=\varepsilon+\zeta'+\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma'$
$D=\eta+\theta'+\alpha\zeta'-\alpha'\zeta+\beta'\varepsilon-\beta\varepsilon'+\gamma\delta'-\gamma'\delta$
$E=\iota+\varkappa'+\alpha\theta'-\alpha'\theta+\beta'\eta-\beta\eta'+\gamma\zeta'-\gamma'\zeta+\delta'\varepsilon-\delta\varepsilon'$
$F=\quad+\alpha\varkappa'-\alpha'\varkappa+\beta'\iota-\beta\iota'+\gamma\theta'-\gamma'\theta+\delta'\eta-\delta\eta'+\varepsilon\zeta'-\varepsilon'\zeta$
$G=\quad+\gamma\varkappa'-\gamma'\varkappa+\delta'\iota-\delta\iota'+\varepsilon\theta'-\varepsilon'\theta+\zeta'\eta-\zeta\eta'$
$H=\quad+\varepsilon\varkappa'-\varepsilon'\varkappa+\zeta'\iota-\zeta\iota'+\eta\theta'-\eta'\theta$
$I=\quad+\eta\varkappa'-\eta'\varkappa+\theta'\iota-\theta\iota'$
$K=\quad+\iota\varkappa'-\iota'\varkappa.$

Nec haec disquiſitio maiorem inueniet difficultatem, ſi aequationes differentiales huius generis, adhuc altiorum ordinum proponantur; quare iam ad eas aequationes differentiales transeamus, in quibus differentialia trium variabilium x, y, z, occurrunt.

§. 13. Heic vero iterum a ſimpliciori quodam caſu, initium faciamus. Propoſitae igitur ſint hae tres aequationes ſecundi ordinis:

$$ddx+\alpha dx+\beta dy+\gamma dz+\delta x+\varepsilon y+\zeta z=0$$
$$ddy+\alpha' dx+\beta' dy+\gamma' dz+\delta' x+\varepsilon' y+\zeta' z=0$$
$$ddz+\alpha'' dx+\beta'' dy+\gamma'' dz+\delta'' x+\varepsilon'' y+\zeta'' z=0,$$

ex

ex quibus aequationem elicere oportet, quae sola differentialia ipsius x contineat. Quodsi nunc breuitatis gratia, hae tres aequationes respectiue indicentur per P, P', P'', tumque capiantur differentialia harum formularum, vsque ad quartum, scilicet:

$$dP \ldots\ldots d^4 P;\; dP' \ldots\ldots d^4 P';\; dP'' \ldots\ldots d^4 P'';$$

deinde vero illa fiat combinatio

$$\begin{aligned} &d^4 P + \lambda d^3 P + \mu ddP + \nu dP + \varrho P \\ &\quad + \lambda' d^3 P' + \mu' ddP' + \nu' dP' + \varrho' P' = 0 \\ &\quad + \lambda'' d^3 P'' + \mu'' ddP'' + \nu'' dP'' + \varrho'' P''. \end{aligned}$$

Si in hac aequatione neque differentialia ipsius y, nec ipsius z reperiantur, illud perfecimus, quod nobis erat propositum, vt aequationem eliceremus ex solis differentialibus ipsius x compositam. Ex ista vero conditione, valores coefficientium λ, μ etc. λ', μ' etc. facile determinantur. Facta scilicet euolutione nostrae aequationis:

$$\begin{aligned} &d^4 P + \lambda d^3 P \;\ldots\ldots + \varrho P \\ &\quad + \lambda' d^3 P' \;\ldots\ldots + \varrho' P' = 0 \\ &\quad + \lambda'' d^3 P'' \;\ldots\ldots + \varrho'' P'' \end{aligned}$$

obtinebimus:

$d\,x$	$d^5 x$	$d\,y$	$d\,z$	$d^4 x$	$d^4 y$	$d^4 z$	$d^3 x$	$d^3 y$	$d^3 z$
$0 = +1$	$+\alpha$	$+\beta$	$+\gamma$	$+\delta$	$+\varepsilon$	$+\zeta$	$+\lambda\delta$	$+\lambda\varepsilon$	$+\lambda\zeta$
	$+\lambda$	$+\lambda'$	$+\lambda''$	$+\lambda\alpha$	$+\lambda\beta$	$+\lambda\gamma$	$+\lambda'\delta'$	$+\lambda'\varepsilon'$	$+\lambda'\zeta'$
				$+\lambda'\alpha'$	$+\lambda'\beta'$	$+\lambda'\gamma'$	$+\lambda''\delta''$	$+\lambda''\varepsilon''$	$+\lambda''\zeta''$
				$+\lambda''\alpha''$	$+\lambda''\beta''$	$+\lambda''\gamma''$	$+\mu\alpha$	$+\mu\beta$	$+\mu\gamma$
				$+\mu$	$+\mu'$	$+\mu''$	$+\mu'\alpha'$	$+\mu'\beta'$	$+\mu'\gamma'$
							$+\mu''\alpha''$	$+\mu''\beta''$	$+\mu''\gamma''$
							$+\nu$	$+\nu'$	$+\nu''$

ddx	ddy	ddz	dx	dy	dz	x	y	z
$+\mu\delta$	$+\mu\varepsilon$	$+\mu\zeta$	$+\nu\delta$	$+\nu\varepsilon$	$+\nu\zeta$	$+\varrho\delta$	$+\varrho\varepsilon$	$+\varrho\zeta$
$+\mu'\delta'$	$+\mu'\varepsilon'$	$+\mu'\zeta'$	$+\nu'\delta'$	$+\nu'\varepsilon'$	$+\nu'\zeta'$	$+\varrho'\delta'$	$+\varrho'\varepsilon'$	$+\varrho'\zeta'$
$+\mu''\delta''$	$+\mu''\varepsilon''$	$+\mu''\zeta''$	$+\nu''\delta''$	$+\nu''\varepsilon''$	$+\nu''\zeta''$	$+\varrho''\delta''$	$+\varrho''\varepsilon''$	$+\varrho''\zeta''$
$+\nu\alpha$	$+\nu\beta$	$+\nu\gamma$	$+\varrho\alpha$	$+\varrho\beta$	$+\varrho\gamma$			
$+\nu'\alpha'$	$+\nu'\beta'$	$+\nu'\gamma'$	$+\varrho'\alpha'$	$+\varrho'\beta'$	$+\varrho'\gamma'$			
$+\nu''\alpha''$	$+\nu''\beta''$	$+\nu''\gamma''$	$+\varrho''\alpha''$	$+\varrho''\beta''$	$+\varrho''\gamma''$			
$+\varrho$	$+\varrho'$	$+\varrho''$						

Vbi ſi coefficientes differentialium ipſius y et z nihilo aequales ſtatuantur, ſequentes prodibunt aequationes:

$$\beta + \lambda' = 0\ ; \quad \varepsilon + \lambda\beta + \lambda'\beta' + \lambda''\beta'' + \mu' = 0$$
$$\gamma + \lambda'' = 0\ ; \quad \zeta + \lambda\gamma + \lambda'\gamma' + \lambda''\gamma'' + \mu'' = 0$$
$$\lambda\varepsilon + \lambda'\varepsilon' + \lambda''\varepsilon'' + \mu\beta + \mu'\beta' + \mu''\beta'' + \nu' = 0$$
$$\lambda\zeta + \lambda'\zeta' + \lambda''\zeta'' + \mu\gamma + \mu'\gamma' + \mu''\gamma'' + \nu'' = 0$$
$$\mu\varepsilon + \mu'\varepsilon' + \mu''\varepsilon'' + \nu\beta + \nu'\beta' + \nu''\beta'' + \varrho' = 0$$
$$\mu\zeta + \mu'\zeta' + \mu''\zeta'' + \nu\gamma + \nu'\gamma' + \nu''\gamma'' + \varrho'' = 0$$
$$\nu\varepsilon + \nu'\varepsilon' + \nu''\varepsilon'' + \varrho\beta + \varrho'\beta' + \varrho''\beta'' = 0$$
$$\nu\zeta + \nu'\zeta' + \nu''\zeta'' + \varrho\gamma + \varrho'\gamma' + \varrho''\gamma'' = 0$$
$$\varrho\varepsilon + \varrho'\varepsilon' + \varrho''\varepsilon'' = 0$$
$$\varrho\zeta + \varrho'\zeta' + \varrho''\zeta'' = 0.$$

Quae ſi recte tractentur, hos dabunt valores:

$\lambda = \beta' + \gamma''$; $\lambda' = -\beta$; $\lambda'' = -\gamma$

$\mu = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \varepsilon' + \zeta''$; $\mu' = \beta''\gamma - \beta\gamma'' - \varepsilon$; $\mu'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma - \zeta$;

$\nu = \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'' + \beta'\zeta'' - \beta''\zeta'$;

$\nu' = \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon + \beta''\zeta - \beta\zeta''$;

$\nu'' = \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon' + \beta\zeta' - \beta'\zeta$;

$\varrho = \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta'$; $\varrho' = \varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta''$; $\varrho'' = \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta$.

§. 14. Iam igitur ſi aequatio noſtra ſola differentialia ipſius x continens, ſupponatur eſſe:

d^3x

$$d^6 x + A d^5 x + B d^4 x + C d^3 x + D\, ddx + E\, dx + F x = 0,$$

pro coefficientibus A, B, C etc. hae prodibunt expressiones:

$$A = \alpha + \lambda = \alpha + \beta' + \gamma'';$$

$$B = \delta + \mu + \lambda\alpha + \lambda'\alpha' + \lambda''\alpha'' = \delta + \varepsilon' + \zeta'' + \alpha\beta' - \alpha'\beta + \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma';$$

$$C = \lambda\delta + \lambda'\delta' + \lambda''\delta'' + \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' + \nu, \text{ siue}$$

$$C = \alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon + \alpha\zeta'' - \alpha''\zeta + \beta'\delta - \beta\delta' + \beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\delta - \gamma\delta'' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon''$$
$$+ \alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \alpha\beta''\gamma' - \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta'\gamma$$

$$D = \mu\delta + \mu'\delta' + \mu''\delta'' + \nu\alpha + \nu'\alpha' + \nu''\alpha'' + \varrho =$$
$$\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon + \delta\zeta'' - \delta''\zeta + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta'$$
$$+ \alpha(\beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'') + \beta(\gamma'\delta'' - \gamma''\delta')$$
$$+ \alpha'(\beta''\zeta - \beta\zeta'' + \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon) + \beta'(\gamma''\delta - \gamma\delta'')$$
$$+ \alpha''(\beta\zeta' - \beta'\zeta + \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon') + \beta''(\gamma\delta' - \gamma'\delta)$$

$$E = \nu\delta + \nu'\delta' + \nu''\delta'' + \varrho\alpha + \varrho'\alpha' + \varrho''\alpha'' =$$
$$+ \alpha(\varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta') + \beta(\delta''\zeta' - \delta'\zeta'') + \gamma(\delta'\varepsilon'' - \delta''\varepsilon')$$
$$+ \alpha'(\varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'') + \beta'(\delta\zeta'' - \delta''\zeta) + \gamma'(\delta''\varepsilon - \delta\varepsilon'')$$
$$+ \alpha''(\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta) + \beta''(\delta'\zeta - \delta\zeta') + \gamma''(\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon)$$

$$F = \varrho\delta + \varrho'\delta' + \varrho''\delta'' =$$
$$+ \delta(\varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta') + \delta'(\varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'') + \delta''(\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta'').$$

§. 15. Vti pro superioribus aequationibus, quas differentialia binarum variabilium x et y ingrediebantur, aequatio finalis quae differentialia vel solius x, vel solius y continet, tanti erat ordinis, quanta est summa ordinum ex binis aequationibus, quarum ope formatur; ita quoque pro aequationibus differentialibus quas trium variabilium x, y, z differentialia ingrediuntur, ordo aequationis finalis, quae ex solis differentialibus vnius harum variabilium componitur, aequalis erit summae ordinum pro aequationibus differentialibus propositis. Pro nostro igitur casu, quia tres aequationes differentiales secundi gradus proponebantur, aequatio finalis quoque sexti erit ordinis. Et si ponatur in vltima aequatione $\delta'', \varepsilon'', \zeta'' = 0$, seu si sit $dz + \alpha'' x + \beta'' x + \gamma'' y = 0$; facile patebit in aequatione

 finali

finali vltimum coefficientem F prorſus euaneſcere, quo ipſo haec aequatio ad quintum ordinem ſponte deprimetur. Deinde ſi fuerit quoque $\delta', \varepsilon', \zeta' = 0$, etiam coefficiens penultimus E euaneſcit, quare hoc caſu, aequatio finalis ad quartum deprimetur ordinem.

§. 16. Quemadmodum euolutio aequationum differentialium in §. 13. propoſitarum, iam ſatis operoſum requirit laborem; ita ſi aequationes altiorum ordinum proponantur, adhuc operoſiori labore illae reductiones peragentur, quibus ad aequationem peruenitur, quae ſola differentialia ipſius x contineat. Quod ſi itaque propoſitae intelligantur hae aequationes:

$$d^3x+\alpha\, ddx+\beta\, ddy+\gamma\, ddz+\delta\, dx+\varepsilon\, dy+\zeta\, dz+\eta\, x+\theta\, y+\iota\, z=0$$
$$d^3y+\alpha'\, ddx+\beta'\, ddy+\gamma'\, ddz+\delta'\, dx+\varepsilon'\, dy+\zeta'\, dz+\eta'\, x+\theta'\, y+\iota' z=0$$
$$d^3z+\alpha'' ddx+\beta'' ddy+\gamma'' ddz+\delta'' dx+\varepsilon'' dy+\zeta'' dz+\eta'' x+\theta'' y+\iota'' z=0,$$

in genere quidem conſtat, ex his aequationibus quas breuitatis gratia litteris P, P′, P″ indigitemus, aequationem inueniri ſola differentialia ipſius x continentem, ſi capiantur differentialia

$$dP \ldots d^5 P;\ dP' \ldots d^5 P' \text{ et } dP'' \ldots d^6 P'',$$

tumque fiat huiusmodi combinatio:

$$d^6 P+\lambda\, d^5 P+\mu\, d^4 P+\nu\, d^3 P+\varrho\, ddP+\sigma\, dP+\tau\, P$$
$$+\lambda' d^5 P'+\mu' d^4 P'+\nu' d^3 P'+\varrho' ddP'+\sigma' dP'+\tau' P'$$
$$+\lambda'' d^5 P''+\mu'' d^4 P''+\nu'' d^3 P''+\varrho'' ddP''+\sigma'' dP''+\tau'' P''=0$$

vbi quidem $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu'\ \mu''$ etc. ita capi debent, vt coefficientes differentialium ex y et z ortorum, plane euaneſcant. Hac autem conditione praeſcripta, iſti coefficientes λ, μ, ν etc. per ſequentes aequationes determinabuntur:

$\lambda'+\beta=0$; $\varepsilon+\lambda\beta+\lambda'\beta'+\lambda''\beta''+\mu'=0$;
$\lambda''+\gamma=0$; $\zeta+\lambda\gamma+\lambda'\gamma'+\lambda''\gamma''+\mu''=0$;
$\theta+\lambda\varepsilon\ldots+\mu\beta\ldots+\nu'=0$; $\lambda\theta\ldots+\mu\varepsilon\ldots+\nu\beta\ldots+\varrho'=0$;

λ+

$\iota + \lambda\zeta \ldots + \mu\gamma \ldots + \nu'' = 0$; $\lambda\iota \ldots + \mu\zeta \ldots + \nu\gamma \ldots + \varrho'' = 0$;
$\mu\theta \ldots + \nu\varepsilon \ldots + \varrho\beta \ldots + \sigma' = 0$; $\nu\theta \ldots + \varrho\varepsilon \ldots + \sigma\beta \ldots + \tau' = 0$;
$\mu\iota \ldots + \nu\zeta \ldots + \varrho\gamma \ldots + \sigma' = 0$; $\nu\iota \ldots + \varrho\zeta \ldots + \sigma\gamma \ldots + \tau'' = 0$;
$\varrho\theta \ldots + \sigma\varepsilon \ldots + \tau\beta \ldots = 0$; $\sigma\theta \ldots + \tau\varepsilon \ldots = 0$; $\tau\theta + \tau'\theta' + \tau''\theta'' = 0$;
$\varrho\iota \ldots + \sigma\zeta \ldots + \tau\gamma \ldots = 0$; $\sigma\iota \ldots + \tau\zeta \ldots = 0$; $\tau\iota + \tau'\iota' + \tau''\iota'' = 0$;

ſcilicet puncta illa, quae productum quodpiam vti $\lambda\theta$ ſubſequuntur, indigitant occurrere praeter $\lambda\theta$, quoque $\lambda'\theta'$ et $\lambda''\theta''$, ſeu ſimilia producta ex quantitatibus commate notatis conflata. Ex his vero octodecim aequationibus, nunc pro noſtris incognitis ſequentes elicientur valores:

$$\lambda = \beta' + \gamma''; \quad \mu = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \varepsilon' + \zeta''$$
$$\lambda' = -\beta; \quad \mu' = \beta''\gamma - \beta\gamma'' - \varepsilon$$
$$\lambda'' = -\gamma; \quad \mu'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma - \zeta$$
$$\nu = \beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'' + \theta' + \iota''$$
$$\nu' = \beta''\zeta - \beta\zeta'' + \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon - \theta$$
$$\nu'' = \beta\zeta' - \beta'\zeta + \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon' - \iota$$
$$\varrho = \beta'\iota'' - \beta''\iota' + \gamma''\theta' - \gamma'\theta'' + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta'$$
$$\varrho' = \beta''\iota - \beta\iota'' + \gamma\theta'' - \gamma''\theta + \varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta''$$
$$\varrho'' = \beta\iota' - \beta'\iota + \gamma'\theta - \gamma\theta' + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta$$
$$\sigma = \varepsilon'\iota'' - \varepsilon''\iota' + \zeta''\theta' - \zeta'\theta''; \quad \tau = \theta'\iota'' - \theta''\iota'$$
$$\sigma' = \varepsilon''\iota - \varepsilon\iota'' + \zeta\theta'' - \zeta''\theta; \quad \tau' = \theta''\iota - \theta\iota''$$
$$\sigma'' = \varepsilon\iota' - \varepsilon'\iota + \zeta'\theta - \zeta\theta'; \quad \tau'' = \theta\iota' - \theta'\iota.$$

§. 17. Si denique aequatio noſtra finalis ſola differentialia ipſius x continens, ſupponatur eſſe:

$$d^9x + A\,d^8x + B\,d^7x + C\,d^6x + D\,d^5x + E\,d^4x + F\,d^3x + G\,ddx + H\,dx + I\,x = 0$$

coefficientes, A, B, C etc. ſequenti ratione exprimentur:

$A = \alpha + \beta' + \gamma''$; $B = \delta + \varepsilon' + \zeta'' + \alpha\beta' - \alpha'\beta + \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$;

 C =

$$C = \eta + \theta' + \iota'' + \alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon + \alpha\zeta'' - \alpha''\zeta + \beta'\delta - \beta\delta' + \beta'\zeta'' - \beta''\zeta'$$
$$+ \gamma''\delta - \gamma\delta'' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'' + \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')$$
$$+ \alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'')$$
$$+ \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)$$

$$D = \alpha\theta' - \alpha'\theta + \alpha\iota'' - \alpha''\iota + \beta'\eta - \beta\eta' + \beta'\iota'' - \beta''\iota'$$
$$+ \gamma''\eta - \gamma\eta'' + \gamma''\theta' - \gamma'\theta'' + \delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon + \delta\zeta'' - \delta''\zeta + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta'$$
$$+ \alpha(\beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'') + \beta(\gamma'\delta'' - \gamma''\delta')$$
$$+ \alpha'(\beta''\zeta - \beta\zeta'' + \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon) + \beta'(\gamma''\delta - \gamma\delta'')$$
$$+ \alpha''(\beta\zeta' - \beta'\zeta + \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon') + \beta''(\gamma\delta' - \gamma'\delta)$$

$$E = \delta\theta' - \delta'\theta + \delta\iota'' - \delta''\iota + \varepsilon'\eta - \varepsilon\eta' + \varepsilon'\iota'' - \varepsilon''\iota'$$
$$+ \zeta''\eta - \zeta\eta'' + \zeta''\theta' - \zeta'\theta''$$
$$+ \alpha(\beta'\iota'' - \beta''\iota' + \gamma''\theta' - \gamma'\theta'' + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta')$$
$$+ \alpha'(\beta''\iota - \beta\iota'' + \gamma\theta'' - \gamma''\theta + \varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'')$$
$$+ \alpha''(\beta\iota' - \beta'\iota + \gamma'\theta - \gamma\theta' + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta)$$
$$+ \beta(\gamma'\eta'' - \gamma''\eta' + \delta''\zeta' - \delta'\zeta'') + \gamma(\delta'\varepsilon'' - \delta''\varepsilon')$$
$$+ \beta'(\gamma''\eta - \gamma\eta'' + \delta\zeta'' - \delta''\zeta) + \gamma'(\delta''\varepsilon - \delta\varepsilon'')$$
$$+ \beta''(\gamma\eta' - \gamma'\eta + \delta'\zeta - \delta\zeta') + \gamma''(\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon)$$

$$F = \eta\theta' - \eta'\theta + \eta\iota' - \eta''\iota + \theta'\iota'' - \theta''\iota'$$
$$+ \alpha(\varepsilon'\iota'' - \varepsilon''\iota' + \zeta''\theta' - \zeta'\theta'') + \beta(\zeta'\eta'' - \zeta''\eta' + \delta''\iota' - \delta'\iota'')$$
$$+ \alpha'(\varepsilon''\iota - \varepsilon\iota'' + \zeta\theta'' - \zeta''\theta) + \beta'(\zeta''\eta - \zeta\eta'' + \delta\iota'' - \delta''\iota)$$
$$+ \alpha''(\varepsilon\iota' - \varepsilon'\iota + \zeta'\theta - \zeta\theta') + \beta''(\zeta\eta' - \zeta'\eta + \delta'\iota - \delta\iota')$$
$$+ \gamma(\varepsilon''\eta' - \varepsilon'\eta'' + \theta''\delta' - \theta'\delta'') + \delta(\varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta')$$
$$+ \gamma'(\varepsilon\eta'' - \varepsilon''\eta + \theta\delta'' - \theta''\delta) + \delta'(\varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'')$$
$$+ \gamma''(\varepsilon'\eta - \varepsilon\eta' + \theta'\delta - \theta\delta') + \delta''(\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta)$$

$$G = \alpha(\theta'\iota'' - \theta''\iota') + \beta(\eta''\iota' - \eta'\iota'') + \gamma(\eta'\theta'' - \eta''\theta')$$
$$+ \alpha'(\theta''\iota - \theta\iota'') + \beta'(\eta\iota'' - \eta''\iota) + \gamma'(\eta''\theta - \eta\theta'')$$
$$+ \alpha''(\theta\iota' - \theta'\iota) + \beta''(\eta'\iota - \eta\iota') + \gamma''(\eta\theta' - \eta'\theta)$$
$$+ \delta(\varepsilon'\iota'' - \varepsilon''\iota' + \zeta''\theta' - \zeta'\iota'') + \varepsilon(\zeta'\eta'' - \zeta''\eta')$$

+δ

$$+\delta'(\varepsilon''\iota-\varepsilon\iota''+\zeta\theta''-\zeta''\theta)+\varepsilon'(\zeta''\eta-\zeta\eta'')$$
$$+\delta''(\varepsilon\iota'-\varepsilon'\iota+\zeta'\theta-\zeta\theta')+\varepsilon''(\zeta\eta'-\zeta'\eta)$$
$$H=\delta(\theta'\iota''-\theta''\iota')+\varepsilon(\eta''\iota'-\eta'\iota'')+\zeta(\eta'\theta''-\eta''\theta')$$
$$+\delta'(\theta''\iota-\theta\iota'')+\varepsilon'(\eta\iota''-\eta''\iota)+\zeta'(\eta''\theta-\eta\theta'')$$
$$+\delta''(\theta\iota'-\theta'\iota)+\varepsilon''(\eta'\iota-\eta\iota')+\zeta''(\eta\theta'-\eta'\theta)$$
$$I=\eta(\theta'\iota''-\theta''\iota')+\eta'(\theta''\iota-\theta\iota'')+\eta''(\theta\iota'-\theta'\iota).$$

§. 18. Quum valores coefficientium pro A, B, C etc. iam inuenti tam ſint complicati; facile perſpicitur eosdem multo perplexiores euadere, ſi ad aequationes altiora differentialia inuoluentes, progredi, vel ſi aequationes contemplari vellemus, quae differentialia quatuor vel plurium variabilium inuoluunt, quare ea quae iam allata ſunt, abunde ſufficere poterunt, ad Methodum heic propoſitam illuſtrandam; praeprimis quum ex ſuperioribus quoque colligi poſſit, quomodo coefficientes differentialium in aequatione finali, ex coefficientibus differentialium in aequationibus propoſitis formentur. Quaecunque autem difficultas in hisce coefficientibus formandis occurrit, illa in omni alia Methodo aeque locum habet, vti ex infra dicendis colligi poterit.

§. 19. Methodus quam nunc propoſituri ſumus, pro integrandis aequationibus differentialibus linearibus, in eo potiſſimum conſiſtit, vt inueniantur multiplicatores, in quos hae aequationes ductae, ſi producta inuicem addantur, prodeat aequatio integrabilis. Si igitur propoſita fuerit aequatio quaecunque differentialis, quae praeter differentiale quodpiam conſtans du, contineat differentialia quaecunque aliarum variabilium x, y, z etc., praeter functiones quascunque ex his quantitatibus, u, x, y, z etc. conflatas, tumque ponatur:

$$dx=p\,du;\quad dp=q\,du;\quad dq=r\,du \text{ etc.}$$
$$dy=p'du;\quad dp'=q'du;\quad dq'=r'du$$
$$dz=p''du;\quad dp''=q''du;\quad dq''=r''du$$
etc. etc.

quo

quo facto aequatio illa propofita, femper fub hac forma repraefentari poterit $V\,du = 0$, vbi V defignat functionem quandam quantitatum u, x, y, z, p, p' etc. q, q' etc. r, r' etc. etc. porro autem capto differentiali ipfius V, fit

$$dV = M\,du + N\,dx + N'\,dy + N''\,dz \text{ etc.}$$
$$+ P\,dp + P'\,dp' + P''\,dp'' \text{ etc.}$$
$$+ Q\,dq + Q'\,dq' + Q''\,dq'' \text{ etc. etc.}$$

formula haec differentialis femper erit integrabilis, fi fuerit

$$N - \frac{dP}{du} + \frac{ddQ}{du^2} - \frac{d^3R}{du^3} \text{ etc.} = 0$$
$$N' - \frac{dP'}{du} + \frac{ddQ'}{du^2} - \frac{d^3R'}{du^3} \text{ etc.} = 0$$
$$N'' - \frac{dP''}{du} + \frac{ddQ''}{du^2} - \frac{d^3R''}{du^3} \text{ etc.} = 0$$

etc. etc.

cuius proprietatis demonftrationem legere licet, in Differtatione mea de criteriis integrabilitatis Tomo XV. Novor. Comm. inferta. Propofitae nunc fint hac aequationes differentiales:

$$ddx + \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma x + \delta y = 0$$
$$ddy + \alpha'\,dx + \beta'\,dy + \gamma' x + \delta' y = 0$$

in quibus maioris facilitatis cauffa, differentiale conftans du non expreffimus, pofito autem vt fupra $dx = p\,du$; $dy = p'\,du$; $ddx = dp\,du = q\,du^2$ et $ddy = q'\,du^2$, habebimus has aequationes:

$$q + \alpha p + \beta p' + \gamma x + \delta y = 0;\quad q' + \alpha' p + \beta' p' + \gamma' x + \delta' y = 0.$$

Pro priori fupponamus multiplicatorem effe Φ, pro pofteriori autem ψ, tumque effe

$$\Phi\,du\,(q + \alpha p + \beta p' + \gamma x + \delta y) + \psi\,du\,(q' + \alpha' p + \beta' p' + \gamma' x + \delta' y) = 0,$$

quantitatem integrabilem. Simpliciffima autem forma multiplicatorum Φ et ψ fine dubio erit ea, qua fupponuntur tantum variabilem u continere, hac igitur fuppofitione facta, ob

$$V = \Phi(q + \alpha p + \beta p' + \gamma x + \delta y) + \psi\,(q' + \alpha' p + \beta' p' + \gamma' x + \delta' y)$$

consequemur

$$N=\gamma\Phi+\gamma'\psi;\ N'=\delta\Phi+\delta'\psi;$$
$$P=\alpha\Phi+\alpha'\psi;\ P'=\beta\Phi+\beta'\psi;$$
$$Q=\Phi;\quad Q'=\psi.$$

Criterium igitur integrabilitatis propositum, requirit vt sit:

$$dd\Phi-\alpha d\Phi-\alpha' d\psi+\gamma\Phi+\gamma'\psi=0$$
$$dd\psi-\beta d\Phi-\beta' d\psi+\delta\Phi+\delta'\psi=0,$$

ex quibus aequationibus iam valores multiplicatorum Φ et ψ inuestigari oportet.

§. 20. Aequationes illae pro Φ et ψ inuentae, quum eiusdem sint formae ac illae pro x et y primo propositae, videtur hinc nullum subsidium adferri pro integratione perficienda; verum pro multiplicatoribus Φ et ψ non desideratur, vt valores eorum completi ex aequationibus differentio-differentialibus eruantur; valores enim particulares harum quantitatum, commodas horum multiplicatorum formas omnino suppeditabunt. Quum igitur in vtraque aequatione Φ et ψ eiusdem sint dimensionum, statuere licebit $\psi=m\Phi$, tumque aequationes nostrae differentiales erunt:

$$dd\Phi-\alpha d\Phi-m\alpha' d\Phi+\gamma\Phi+m\gamma'\Phi=0$$
$$m\,dd\Phi-\beta d\Phi-m\beta' d\Phi+\delta\Phi+m\delta'\Phi=0.$$

Ostensum autem est, huiusmodi aequationibus satisfieri, si ponatur $\Phi=e^{nu}$, designante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $=1$, et n quantitatem constantem. Heic autem de absolutis valoribus ipsorum m et n, nondum disquirimus, sufficit quod iam nobis innotescat pro Φ et ψ, has adhiberi posse formas: $\Phi=e^{nu}$, $\psi=me^{nu}$.

§. 21. Vt autem nunc valores quantitatum m, n innotescant, supponamus integratione facta, hoc prodiisse integrale

$$e^{nu}(dx+m\,dy+Ax+By)=C.$$

Tum vero differentiali sumto, elicietur haec aequatio:

$$ddx+m\,ddy+(A+n)dx+(B+mn)dy+nAx+nBy=0$$

 quae

quae nunc conferri debet, cum noſtra aequatione propoſita, quae erat

$$ddx + mddy + (\alpha + m\alpha')dx + (\beta + m\beta')dy + (\gamma + m\gamma')x + (\delta + m'\delta)y = 0,$$

vnde ſequentes prodeunt quatuor aequalitates:

$$A + n = \alpha + m\alpha'; \quad B + mn = \beta + m\beta'; \quad nA = \gamma + m\gamma'; \quad nB = \delta + m\delta';$$

ex prima et ſecunda fiunt

$$nA = n\alpha + nm\alpha' - n^2; \quad nB = n\beta + mn\beta' - mn^2,$$

vnde conſequimur

$$\gamma + m\gamma' = n\alpha + nm\alpha' - n^2; \quad \delta + m\delta' = n\beta + mn\beta' - mn^2;$$

ideoque

$$m = \frac{\gamma + n^2 - n\alpha}{n\alpha' - \gamma'} = \frac{\delta - n\beta}{n\beta' - n^2 - \delta'},$$

ex quo denuo conficitur haec aequatio quarti gradus:

$$n^4 - (\alpha + \beta')n^3 + (\gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta)n^2 - (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')n + (\gamma\delta' - \gamma'\delta) = 0.$$

Intelligitur itaque hinc, n quadruplicem habere poſſe valorem; ideoque pro Φ quatuor diuerſos multiplicatores formae propoſitae adhiberi poſſe, niſi forſan ſi aequatio illa biquadratica, binas vel plures radices habuerit aequales.

§. 22. Inuentis autem quatuor aequationibus differentialibus primi gradus huius formae:

$$e^{nu}(dx + mdy + Ax + By) = C,$$

ſeu potius ſi placet iſtius:

$$dx + mdy + Ax + By = Ce^{nu}$$

ſcribendo loco n, $-n$, inde facillimum erit valores quantitatum x et y eruere, eliminando ſcilicet dx, dy, tumque vel x, vel y.

Sint nimirum hae quatuor aequationes:

$$dx + m\,dy + A\,x + B\,y = C\,e^{nu}$$
$$dx + m'\,dy + A'\,x + B'\,y = C'\,e^{n'u}$$
$$dx + m''\,dy + A''\,x + B''\,y = C''\,e^{n''u}$$
$$dx + m'''\,dy + A'''\,x + B'''\,y = C'''\,e^{n'''u}$$

fietque

fietque primo:

$$dy + \frac{(A - A')}{m - m'}x + \frac{B - B'}{m - m'}y = \frac{C e^{nu} - C' e^{n'u}}{m - m'}$$

$$dy + \frac{(A - A'')}{m - m''}x + \frac{B - B''}{m - m''}y = \frac{C e^{nu} - C' e^{n'u}}{m - m''}$$

$$dy + \frac{A - A'''}{m - m'''}x + \frac{B - B'''}{m - m'''}y = \frac{C e^{nu} - C''' e^{n'''u}}{m - m'''}.$$

Tum vero eliminando dy, binas consequemur aequationes, quae x et y continent, ex quibus denique siue x, siue y determinari potest. Patet autem eliminatione peracta, x huiusmodi habiturum esse formam:

$$x = D e^{nu} + E e^{n'u} + F e^{n''u} + G e^{n'''u},$$

quin etiam minime necessarium est, hanc eliminationem suscipere, nam ob constantes C, C' etc. prorsus arbitrarias, statim supponere licebit

$$x = D e^{nu} + E e^{n'u} + F e^{n''u} + G e^{n'''u},$$

acceptis pro D, E, F, G constantibus quibuscunque arbitrariis. Assumta autem forma ipsius x, illa pro y minime nostro arbitrio relinquitur, sed ex valore pro x iam sponte determinatur, vti supra §. 4. ostendimus.

§. 23. Caeterum obseruari quoque conuenit, aequationem illam biquadraticam pro n, statim ex aequationibus nostris differentio-differentialibus pro Φ deduci, scilicet ex priori esse debet:

$$n^2 - (\alpha + m\alpha')n + \gamma + m\gamma' = 0$$

et ex posteriori

$$mn^2 - (\beta + m\beta')n + \delta + m\delta' = 0,$$

vnde colligitur

$$m = \frac{n^2 - n\alpha + \gamma}{n\alpha' - \gamma'} = \frac{n\beta - \delta}{n^2 - n\beta' + \delta'},$$

vti supra inuenimus. Valores autem pro A et B ex inuento n, sic satis concinne exprimuntur:

$$A = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma + n\gamma'}{n\alpha' - \gamma'}, \quad B = \frac{\beta'\delta - \beta\delta' - n\delta}{n\beta' - n^2 - \delta'} = \frac{n\delta + \beta\delta' - \beta'\delta}{n^2 - n\beta' + \delta'}.$$

 Aequa-

Aequatio biquadratica quam hic pro n inuenimus, insignem habet affinitatem, cum aequatione differentiali pro x §. 3. inuenta; scilicet si loco n^4, n^3, n^2, n respectiue scribantur $d^4 x, -d^3 x, +ddx, -dx$, ex aequatione pro n, orietur aequatio differentialis quarti gradus pro x; et quum inuestigatio multiplicatorum pro integranda aequatione differentiali §. 3. ex resolutione huius aequationis biquadraticae dependeat, intelligitur iisdem multiplicatoribus quibus aequatio differentio-differentialis iam proposita redditur integrabilis, etiam aequationem differentialem sola differentialia ipsius x inuoluentem integrabilem reddi. Methodus igitur iam proposita illam priorem facilitate vix superare videtur, nam vtroque in casu, totum negotium integrationis, ad inueniendam illam aequationem biquadraticam reducitur. Tum vero et posterior Methodus illo incommodo laborare videtur, quod minus patescat, quomodo integratio sit perficienda illis in casibus, vbi aequatio ista biquadratica plures habuerit radices aequales. Pro binis quidem radicibus aequalibus res est manifesta. Subsidio enim trium aequationum §. 21. propositarum, eliminando dx et dy, inueniri potest aequatio inter x, y et functiones cognitas ipsius u, tum vero eliminando x et y, habebitur aequatio differentialia dx et dy implicans, quae quum sponte sit integrabilis, integratione peracta, nouam habebimus aequationem, quam x et y ingrediuntur, ex qua si cum prius inuenta conferatur, siue x, seu y elici poterit.

§. 24. At vero si aequatio ista biquadratica, vel tres habuerit radices aequales, vel bina radicum aequalium paria, ita vt aequationum §. 2. propositarum, binas tantum habeamus, inuestigatio ipsarum x et y ita perfici debet, vt noua instituatur integratio harum aequationum. Supponamus nimirum combinatione harum aequationum facta, oriri hanc aequationem integralem: $e^{\lambda u}(x+\lambda y)=V$, designante V summam quantitatum

titatum huius formae $De^{\rho u}$, differentiatione autem instituta prodeat:

$$dx + \lambda dy + \nu x + \nu\lambda y = R,$$

multiplicetur haec aequatio in $(1+\mu)$, ita vt sit

$$(1+\mu)dx + \lambda(1+\mu)dy + \nu(1+\mu)x + \nu\lambda(1+\mu)y = (1+\mu)R.$$

Concipiamus hanc aequationem prodiisse eo modo, quod ad aequationem nostram I. §. 22. addita sit II. in μ ducta, singulis igitur terminis inter se aequatis, hae prodibunt aequalitates: $\lambda(1+\mu) = m + \mu m'$; $\nu(1+\mu) = A + \mu A'$; $\nu\lambda(1+\mu) = B + \mu B'$; vnde colligimus $\nu(m + \mu m') = B + \mu B'$; et $\mu = \frac{m\nu - B}{B' - m'\nu}$ ex secunda vero $\mu = \frac{\nu - A}{A' - \nu}$, his igitur valoribus aequatis, prodit sequens aequatio secundi gradus:

$$(m + m')\nu^2 + (mA' - m'A + B' - B)\nu + AB' - A'B = 0,$$

ex qua aequatione valores ipsius ν elici oportet, quibus inuentis erit

$$\mu = \frac{\nu - A}{A' - \nu} \text{ et } \lambda = \frac{m + \mu m'}{1 + \mu} = \frac{mA' - m'A + m' - m\nu}{A' - A}.$$

Quum aequatio inueniendo ipsi ν inseruiens sit quadratica, binas hinc obtinebimus aequationes huius formae:

$$x + \lambda y = V; \quad x + \lambda' y = V',$$

quarum ope iam x et y facile determinantur; verum heic merito desideratur vt dilucide ostendi posset, quomodo hi valores pro ν, ex valoribus pro n ope aequationis biquadraticae inuentis, dependeant, quod quidem vix absque calculis admodum prolixis, perfici posse videtur.

§. 25. Supra quidem iam ostendimus, quomodo y per valorem ipsius x iam inuentum determinetur, at si forma pro x inuenta attentius consideretur, facile liquet adhuc simpliciori ratione y exprimi posse. Scilicet quum sit

$$x = De^{nu} + Ee^{n'u} + Fe^{n''u} + Ge^{n'''u}$$

facile liquet esse debere

$$y = \lambda De^{nu} + \lambda' Ee^{n'u} + \lambda'' Fe^{n''u} + \lambda''' Ge^{n'''u}.$$

 Iam

Iam igitur quaeritur quomodo hi coefficientes λ, λ' etc. inveſtigari debeant? Per aequationem vero noſtram primam, quum ſit

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0,$$

ſi ponatur

$$x = D e^{nu} \text{ et } y = \lambda D e^{nu},$$

eſſe debebit

$$n^2 + n\alpha + n\lambda\beta + \gamma + \lambda\delta = 0, \text{ ſiue } \lambda = -\frac{(n^2 + n\alpha + \gamma)}{n\beta + \delta}.$$

Haec autem expreſſio pro λ, licet primo intuitu cum illa quae ex §. 4. deducitur, vix coincidere videtur, tamen facta euolutione plenus ſe patefaciet conſenſus. Ex §. enim 4. fit

$$n^3 D + n^2 D\left(\alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta}\right) + nD\left(\gamma + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \frac{\alpha\delta}{\beta}\right) + D\left(\beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta}\right)$$
$$+ \left(\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta}\right) y = 0,$$

poſito nunc $y = -\frac{(n^2 + n\alpha + \gamma)}{n\beta + \delta}.D$ et multiplicatione facta per $n\beta + \delta$, ſiue per $n + \frac{\delta}{\beta}$, haec prodit aequatio:

$$0 = n^4 + n^3\left(\frac{\delta}{\beta} + \alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta}\right) + n^2\left(\frac{\delta}{\beta}\left(\alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta}\right) + \gamma + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \frac{\alpha\delta}{\beta}\right)$$
$$- n^2\left(\frac{\beta'}{\beta}\delta - \delta' - \frac{\delta^2}{\beta^2}\right)$$
$$+ n\left(\frac{\delta}{\beta}\left(\gamma + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \frac{\alpha\delta}{\beta}\right) + \beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta}\right)\right)$$
$$+ \frac{\delta}{\beta}\left(\beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta}\right) - \frac{\gamma}{\beta}\left(\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta}\right).$$

Ex ea vero deletis terminis ſe mutuo tollentibus, conſequimur

$$0 = n^4 + n^3(\alpha + \beta) + n^2(\gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta) + n(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')$$
$$+ \gamma\delta' - \gamma'\delta$$

ſicque plene euictum eſt, vtroque modo pro λ eundem prodire valorem.

§. 26. In aequationibus differentialibus, quas hucusque contemplati ſumus, quantitas variabilis cuius differentiale ſuppoſitum fuit conſtans, plane non ingredi ſupponitur; verum tamen ſi eiusmodi expreſſiones:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y$$
$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y$$

ſuppo-

ſupponantur non eſſe aequales nihilo, ſed functionibus quibusdam datis U et U′, quantitatis variabilis u, cuius differentiale aſſumitur conſtans, integratio nihilo minus aeque bene ſuccedet. Nam ſi ponatur

$$ddx + \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, x + \delta\, y = U$$
$$ddy + \alpha'\, dx + \beta'\, dy + \gamma'\, x + \delta'\, y = U',$$

haeque aequationes tractentur iuxta Methodum §. 3. praeſcriptam, emerget tandem haec aequatio:

$$d^4x + (\alpha+\beta')d^3x \ldots + (\delta'\gamma - \delta\gamma')x = ddU + \lambda dU' + \mu dU + \nu U' + \varrho U$$
$$= ddU - \beta dU' + \beta' dU - \delta U' + \delta' U.$$

Quare forma differentialis pro x §. 3. inuenta, aequabitur functioni datae ipſius u, haecque aequatio differentialis, aeque facile reſoluetur, ac ſi haec functio plane abeſſet. Paradoxum autem merito videri poſſet, quod hic differentialia functionum U et U′ adeo ſecundi ordinis ſint introducta, quae tamen in valoribus ipſorum x et y minime reperiri debere videntur. Tenendum igitur eſt, haec differentialia per integrationem iterum eliminari; ſupponamus enim primum integrale aequationis propoſitae, hanc habere formam:

$$e^{-nu}(d^3x + A\, ddx + B\, dx + C\, x) = D + V,$$

et facta differentiatione prodire

$$d^4x + (\alpha + \beta')d^3x \ldots + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)x = dV.e^{nu},$$

quum ergo eſſe debeat

$$dV.e^{nu} = ddU + \beta' dU + \delta' U - \beta dU' - \delta U', \text{ erit}$$
$$dV = e^{-nu}(ddU + \beta' dU + \delta' U - \beta dU' - \delta U').$$

Eſt vero $\int e^{-nu} ddU = e^{-nu} dU + n\int e^{-nu} dU.du$, hinc
$\int e^{-nu}(ddU + \beta' dU) = e^{-nu} dU + (n+\beta')\int e^{-nu} dU\, du$;
porro ob $\int e^{-nu} dU = e^{-nu} U + n\int e^{-nu} U\, du$, fiet

$$\int e^{-nu}(ddU + \beta' dU) = + e^{-nu} dU + (n+\beta') e^{-nu} U\, du$$
$$+ n(n+\beta')\int e^{-nu} U\, du^2.$$

Nunc

Nunc igitur ſi aequatio noſtra integralis repraeſentetur ſub hac forma: $d^3 x + A\, ddx + B\, dx + C\, x = D\, e^{nu} + V.\, e^{nu}$, fiet

$$V.\, e^{nu} = dU + (n+\beta')\, U\, du + (n(n+\beta') + \delta')\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U\, du^2$$
$$- \beta\, U'\, du - (n\beta - \delta)\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U'\, du^2,$$

ideoque ſi cum hac aequatione alia eiusdem generis:

$$d^3 x + A'\, ddx + B'\, dx + C'\, x = E\, e^{n'u} + dU + (n'+\beta')\, U\, du \text{ etc.}$$

conferatur, patet hinc oriri aequationem quam dU prorſus non ingreditur, quin etiam quantitas U in expreſſione pro x exulabit ob $A - A' = n - n'$, quod facile demonſtrari poterit. Sicque tandem pro x huiusmodi conſequemur expreſſionem:

$$x = D\, e^{nu} + E\, e^{n'u} + F\, e^{n''u} + G\, e^{n'''u} + \lambda\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U\, du^2$$
$$+ \mu\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U'\, du^2 + \lambda'\, e^{n'u} \int e^{-n'u}\, U\, du^2$$
$$+ \mu'\, e^{n'u} \int e^{-n'u}\, U'\, du^2 + \lambda''\, e^{n''u} \int e^{-n''u}\, U\, du^2$$
$$+ \mu''\, e^{n''u} \int e^{-n''u}\, U'\, du^2 + \lambda'''\, e^{n'''u} \int e^{-n'''u}\, U\, du^2$$
$$+ \mu'''\, e^{n'''u} \int e^{-n'''u}\, U'\, du^2;$$

vbi n, n', n'' etc. deſignant radices aequationis biquadraticae §. 24. allatae, et λ, λ' etc. μ, μ' etc. ſunt coefficientes conſtantes.

§. 27. Poſteriori noſtra Methodo adhibita, fiet vti ex §. 21. conſtat:

$$dx + m\, dy + A\, x + B\, y = C\, e^{nu} + e^{nu} \int e^{-nu}\, U\, du$$
$$+ m\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U'\, du$$
$$dx + m'\, dy + A'\, x + B'\, y = C'\, e^{n'u} + e^{n'u} \int e^{-n'u}\, U\, du$$
$$+ m'\, e^{n'u} \int e^{-n'u}\, U'\, du$$

etc. etc.

vbi quidem ſtatim apparet in expreſſionibus pro x vel y praeter quantitates huius formae $C\, e^{nu}$, etiam huiusmodi reperiri $\lambda\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U\, du^2$ et $\mu\, e^{nu} \int e^{-nu}\, U'\, du^2$, praeterea autem nec U, nec differentialia ipſius U, his expreſſionibus ineſſe. Caeterum probe obſeruari conuenit, formam modo pro x allatam, tunc

tunc solummodo veritati esse consentaneam, quando omnes valores ipsius n inter se sunt inaequales, nam pro binis vel pluribus valoribus ipsius n aequalibus, haec forma aliquantum immutabitur, prouti ex iis, quae alibi de integratione huiusmodi formularum integralium iam demonstrata sunt, facile patet.

§. 28. Praeter Methodos in superioribus allatas, adhuc quidem alia mihi se obtulit, sed prioribus aliquanto magis perplexa et difficilior, quare eius ideam heic breuiter explicasse suffecerit. Consideremus igitur denuo has binas aequationes:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0$$
$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0,$$

et supponamus per integrationem hinc binas ortas esse aequationes primi ordinis:

$$dx + Ax + By = P; \quad dy + A'x + B'y = Q$$

existentibus A, A', B, B' quantitatibus constantibus, P vero et Q functionibus quantitatis variabilis u, cuius differentiale ponitur constans. Ponamus autem hinc prodire aequationes nostras differentiales propositas, si sequentes fiant combinationes:

$dP + \lambda P + \mu Q$ et $dQ + \lambda' Q + \mu' P$, vnde colligimus
$$ddx + (\lambda + A')dx + (\mu + B)dy + (\lambda A + \mu A')x + (\lambda B + \mu B')y = ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y, \text{ et}$$
$$ddy + (\mu' + A')dx + (\lambda' + B')dy + (\lambda' A' + \mu' A)x + (\lambda' B' + \mu' B)y = ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y.$$ Hinc vero prodit

$$\lambda + A = \alpha \qquad \mu' + A' = \alpha'$$
$$\mu + B = \beta \qquad \lambda' + B' = \beta'$$
$$\lambda A + \mu A' = \gamma \qquad \lambda' A' + \mu' A = \gamma'$$
$$\lambda B + \mu B' = \delta \qquad \lambda' B' + \mu' B = \delta'$$

vnde eliminatis A, B, A', B', sequentes prodeunt aequationes:

$$\lambda(\alpha - \lambda) + \mu(\alpha' - \mu') = \gamma; \quad \lambda(\beta - \mu) + \mu(\beta' - \lambda') = \delta$$
$$\lambda'(\alpha' - \mu') + \mu'(\alpha - \lambda) = \gamma'; \quad \lambda'(\beta' - \lambda') + \mu'(\beta - \mu) = \delta',$$

 tum

tum vero eliminatis successiue ex his quatuor aequationibus, μ, μ', λ', prodibit aequatio quarti gradus pro λ, cuius aliquo valore assumto, reliquae incognitae λ', μ, μ', A, A' etc. sponte determinabuntur. Tum vero ex his duabus aequationibus:

$$dP+\lambda P+\mu Q=0;\ dQ+\lambda' Q+\mu' P=0,$$

vbi λ, λ', μ, μ' iam supponuntur cognitae, definiri debent valores incognitarum P et Q, quibus inuentis integratio demum institui debet harum aequationum:

$$dx+Ax+By=P \text{ et } dy+A'x+B'y=Q;$$

sicque binae habebuntur aequationes x et y inuoluentes, ex quibus alterutram eliminando, alterius valor facile reperietur.

MEDI-

MEDITATIONES
CIRCA RESOLVTIONEM FRACTIONIS
$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.}}$$
IN FRACTIONES SIMPLICES.
VBI SIMVL DEMONSTRATIO INSIGNIS THEOREMATIS ARITHMETICI OCCVRRIT.

Auctore
NICOLAO FVSS.

§. 1.

Cum ſpeculationes Analyticas, quas Illuſtriſſimus *Eulerus* non ita pridem cum Academia communicauit, perſcrutarer, maxime praeter alia inſignia inuenta attentionem meam incitauit Theorema nonum, in cuius fine vir celeberrimus ad omnia, quae de integratione formularum quamcunque poteſtatem logarithmi x in denominatore habentium docuerat, vberius illuſtranda obſeruat: ſe iam olim demonſtrationem Theorematis cuiusdam Arithmetici dediſſe circa fractiones $\frac{1}{\mathfrak{A}}$, $\frac{1}{\mathfrak{B}}$, $\frac{1}{\mathfrak{C}}$, etc. quarum numerus ſit n, denotantibus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ huiusmodi producta:

$$\mathfrak{A} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\text{etc.}$$
$$\mathfrak{D} = (\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)(\delta-\varepsilon)(\text{etc.}$$

et oſtendiſſe, omnes ſequentes formulas nihilo aequari:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^2}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^3}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^3}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0,$$

 donec

donec perueniatur ad poteſtatem $n-1$, pro qua ſemper fore

$$\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}+\frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}+\frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}}+\frac{\delta^{n-1}}{\mathfrak{D}}+\text{etc.}=1.$$

Statim enim eximius vſus, quem hoc Theorema tam in Arithmeticam vulgarem quam in ſubliniorem Analyſin allaturum videtur, cupidiſſimum me fecit eius veritatem perſcrutandi; vnde haud mediocrem cepi voluptatem, dum nuper, forte fortuna, problema quoddam circa reſolutionem fractionis genuinae in fractiones ſimplices tractans, perſpexi, huius Theorematis demonſtrationem inde elici poſſe. Etiamſi igitur, vti deinceps animaduerti, in Inſtitutionibus calculi integralis elegantiſſima huius Theorematis demonſtratio ab Illuſtr. *Eulero* ſit tradita: tamen, quia modus procedendi ab hic adhibito aliquantum differt, ibique tantum in tranſitu obſeruatur, eam ex ſequentibus profundioribus Analyſeos penetralibus repetendam eſſe, rei dignitatem conſulens haud inutile fore arbitror, ſi etiam meam demonſtrationem, ex conſideratione valoris infiniti ipſius x petitam, caeteraque omnia, quae ſe mihi ſuper hoc argumento obtulerunt hic dato Studio expoſuero.

§. 2. Sint fractiones ſimplices, in quas fractio

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.}}$$

reſolui debeat iſtae: $\frac{\alpha}{x-a}$, $\frac{\beta}{x-b}$, $\frac{\gamma}{x-c}$, etc. quarum ſumma igitur aequalis eſſe debet fractioni propoſitae, vnde habemus iſtam aequationem:

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.}}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}+\frac{\delta}{x-d}+\text{etc.}$$

quam per $x-a$ multiplicemus, vt prodeat haec:

$$\frac{x^m}{(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.}}=\alpha+(x-a)\left(\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}+\frac{\delta}{x-d}+\text{etc.}\right)$$

quae

quae aequalitas cum ſubſiſtere debeat, quidquid pro x aſſumatur, ſtatuatur $x = a$; vnde ſtatim colligitur

$$\alpha = \frac{a^m}{(a-b)(a-c)(a-d)(\text{etc.}}$$

Deinde pro inueniendo valore litterae β multiplicetur aequatio illa per $x-b$, vt fiat

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-c)(x-d)(\text{etc.}} = \beta + (x-b)\left(\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d} + \text{etc.}\right)$$

quae iterum ſubſiſtere debet, quicunque valor litterae x tribuatur, vnde ponendo $x = b$ fiet

$$\beta = \frac{b^m}{(b-a)(b-c)(b-d)(\text{etc.}}$$

Eodemque modo ducendo eandem aequationem ſucceſſiue in $(x-c)$, $(x-d)$, etc. et ſtatuendo $x = c$, $x = d$, etc. habebitur

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-a)(c-b)(c-d)(\text{etc.}} \text{ et } \delta = \frac{d^m}{(d-a)(d-b)(d-c)(\text{etc.}}$$

et ita porro; quibus valoribus inuentis erit

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(\text{etc.}} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d} + \text{etc.}$$

ſi modo exponens m minor fuerit numero factorum, qui ſit n; ſi enim eſſet aequalis vel maior quam n, tum praeter fractiones ſimplices inſuper accederent termini integri.

§. 3. Quod ſi ergo hanc aequationem vtrinque multiplicemus per x, habebimus

$$\frac{x^{m+1}}{(x-a)(x-b)(x-c)(\text{etc.}} = \frac{\alpha x}{x-a} + \frac{\beta x}{x-b} + \frac{\gamma x}{x-c} + \frac{\delta x}{x-d} + \text{etc.}$$

quae aequatio vera erit, quicunque valores litterae x tribuantur: etiam igitur valebit ſumendo $x = \infty$; vbi duo caſus ſunt perpendendi, provti exponens numeratoris aequalis vel minor fuerit numero factorum in denominatore, hoc eſt prouti fuerit $m+1 = n$ vel $m+1 < n$. Priori caſu quo $m+1 = n$

 ſiue

ſiue $m = n - 1$ habebimus $1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. ſiue loco α, β, γ, etc. eorum valores ſubſtituendo

$$\frac{a^{n-1}}{(a-b)(a-c)(a-d)(\text{etc.}} + \frac{b^{n-1}}{(b-a)(b-c)(b-d)(\text{etc.}}$$
$$+ \frac{c^{n-1}}{(c-a)(c-b)(c-d)(\text{etc.}} + \text{etc.} = 1.$$

Altero vero caſu, quo $m + 1 < n$ ſiue $m < n - 1$ poſito $x = \infty$ erit $0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. Quia igitur m debet eſſe numerus integer, haec poſterior aequalitas ſubſiſtet caſibus his omnibus:

$$m = 0,\ m = 1,\ m = 2,\ m = 3, \ldots\ldots\ m = n - 2.$$

§. 4. Ponamus nunc breuitatis gratia

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(\text{etc.} = \mathfrak{A}$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.} = \mathfrak{B}$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(\text{etc.} = \mathfrak{C}$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(\text{etc.} = \mathfrak{D}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

t habeamus

$$\alpha = \frac{a^m}{\mathfrak{A}},\ \beta = \frac{b^m}{\mathfrak{B}},\ \gamma = \frac{c^m}{\mathfrak{C}},\ \delta = \frac{d^m}{\mathfrak{D}},\ \text{etc.}$$

quarum igitur fractionum ſumma caſibus, quibus $m < n - 1$ cyphrae aequetur, caſu vero quo $m = n - 1$, vnitati; quocirca, loco m ſucceſſiue ſcribendo $0, 1, 2, 3, 4, \ldots n - 2$. erit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{a}{\mathfrak{A}} + \frac{b}{\mathfrak{B}} + \frac{c}{\mathfrak{C}} + \frac{d}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{a^2}{\mathfrak{A}} + \frac{b^2}{\mathfrak{B}} + \frac{c^2}{\mathfrak{C}} + \frac{d^2}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$\frac{a^3}{\mathfrak{A}} + \frac{b^3}{\mathfrak{B}} + \frac{c^3}{\mathfrak{C}} + \frac{d^3}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - = 0$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - = 0$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - = 0$$
$$\frac{a^{n-2}}{\mathfrak{A}} + \frac{b^{n-2}}{\mathfrak{B}} + \frac{c^{n-2}}{\mathfrak{C}} + \frac{d^{n-2}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0 \quad \text{at vero}$$
$$\frac{a^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{b^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{c^{n-1}}{\mathfrak{C}} + \frac{d^{n-1}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 1 \qquad \text{vnde}$$

vnde iam veritas illius Theorematis eſt manifeſtiſſima.

§. 5. Iam cum ſit

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(\text{etc.}} = \frac{a^m}{\mathfrak{A}(x-a)} + \frac{b^m}{\mathfrak{B}(x-b)} + \frac{c^m}{\mathfrak{C}(x-c)} + \text{etc.}$$

hanc aequationem etiam valere obſeruamus, ſi ponatur $x = 0$, quo autem caſu aequatio prodit in praecedentibus iam contenta; obtinetur enim, poſito $x = 0$ et $m > 0$, haec aequatio:

$$0 = \frac{a^{m-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{b^{m-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{c^{m-1}}{\mathfrak{C}} + \frac{d^{m-1}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.}$$

quae manifeſto in praecedentibus ineſt. At ſi in ſuperiore aequatione ſit $m = 0$, poſito $x = 0$ erit

$$\frac{\pm 1}{abcde\ \text{etc.}} = -\frac{1}{a\mathfrak{A}} - \frac{1}{b\mathfrak{B}} - \frac{1}{c\mathfrak{C}} - \frac{1}{d\mathfrak{D}} - \text{etc.}$$

vbi ſignum ſuperius valet, ſi factorum numerus fuerit par, inferius vero ſi impar; ſiue mutatis ſignis erit

$$\frac{1}{a\mathfrak{A}} + \frac{1}{b\mathfrak{B}} + \frac{1}{c\mathfrak{C}} + \frac{1}{d\mathfrak{D}} + \text{etc.} = \frac{\mp 1}{abcde\ \text{etc.}}.$$

§. 6. Si omnes ſuperiores formulae, quarum ſumma nihilo aequatur, quomodocunque inter ſe coniungantur, obtinebitur ſequens expreſſio generalis:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{+p+qa+raa+sa^3+ta^4+\text{etc.} ------ +za^{n-2}}{\mathfrak{A}} \\ \dfrac{+p+qb+rbb+sb^3+tb^4+\text{etc.} ------ +zb^{n-2}}{\mathfrak{B}} \\ \dfrac{+p+qc+rcc+sc^3+tc^4+\text{etc.} ------ +zc^{n-2}}{\mathfrak{C}} \\ \dfrac{+p+qd+rdd+sd^3+td^4+\text{etc.} ------ +zd^{n-2}}{\mathfrak{D}} \\ +\text{etc.} \qquad\qquad +\text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

quarum formularum ſumma ſemper nihilo aequabitur, quicunque valores litteris p, q, r, s, etc. tribuantur.

§. 7.

§. 7. Quod si ergo breuitatis gratia ponamus

$$A = p + qa + ra^2 + sa^3 + \text{etc.} - - - - + za^{n-1}$$
$$B = p + qb + rb^2 + sb^3 + \text{etc.} - - - - + zb^{n-1}$$
$$C = p + qc + rc^2 + sc^3 + \text{etc.} - - - - + zc^{n-1}$$
$$D = p + qd + rd^2 + sd^3 + \text{etc.} - - - - + zd^{n-1}$$
etc. etc. etc.

quarum aequationum numerus sit n, pariter ac litterarum a, b, c, d, etc. atque ex his aequationibus quantitates p, q, r, s eliminare oporteat, id per praecedentia iam facillime expedietur: prodibit enim sequens aequatio a litteris p, q, r, s, etc. immunis:

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} + \frac{B}{\mathfrak{B}} + \frac{C}{\mathfrak{C}} + \frac{D}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0.$$

Vbi notandum, quouis casu numerum litterarum p, q, r, s esse $n-1$; sicque ad singulas determinandas sufficerent $n-1$ aequationes: at vero ad eas penitus eliminandas opus est aequationum numero n.

§. 8. At si per methodum communem hanc eliminationem expedire velimus, sumamus tantum casum trium litterarum p, q, r, pro quibus igitur eliminandis habentur sequentes quatuor aequationes:

$$A = p + qa + raa$$
$$B = p + qb + rbb$$
$$C = p + qc + rcc$$
$$D = p + qd + rdd$$

vnde primo litteram p eliminando oriuntur hae aequationes:

$$A - B = q(a-b) + r(aa-bb)$$
$$B - C = q(b-c) + r(bb-cc)$$
$$C - D = q(c-d) + r(cc-dd)$$

siue

fiue per $a-b$, $b-c$, $c-d$ diuidendo

$$\frac{A-B}{a-b} = q + r(a+b)$$
$$\frac{B-C}{b-c} = q + r(b+c)$$
$$\frac{C-D}{c-d} = q + r(c+d)$$

vnde porro, litteram q eliminando, erit

$$\frac{A-B}{a-b} - \frac{B-C}{b-c} = r(a-c) \text{ et}$$
$$\frac{B-C}{b-c} - \frac{C-D}{c-d} = r(b-d) \text{ ideoque}$$
$$\frac{A-B}{(a-b)(a-c)} - \frac{B-C}{(a-c)(b-c)} = r \text{ et}$$
$$\frac{B-C}{(b-c)(b-d)} - \frac{C-D}{(b-d)(c-d)} = r$$

quibus posterioribus aequationibus a se inuicem subtractis colligitur

$$\frac{A-B}{(a-b)(a-c)} - \frac{B-C}{(a-c)(b-c)} - \frac{B-C}{(b-c)(b-d)} + \frac{C-D}{(b-d)(c-d)} = 0$$

quae aequatio in ordinem redacta ita se habebit:

$$\frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B(a-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{C(a-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} - \frac{D}{(b-d)(c-d)} = 0$$

fiue per $(a-d)$ diuidendo ita:

$$\frac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{D}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$$

quae est ea ipsa forma, quam per regulam nostram inuenimus.

§. 9. Quo nunc veritas ac vsus formularum §. 4. exhibitarum melius in oculos incidat, percurramus aliquot casus speciales ex numero litterarum a, b, c, d, desumtos. Habeantur igitur duo tantum numeri a et b, vt sit $n=2$, eritque $\mathfrak{A}=a-b$ et $\mathfrak{B}=b-a$, hincque colligitur $\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}=0$ et $\frac{a}{\mathfrak{A}}+\frac{b}{\mathfrak{B}}=1$, vti Theorematis conditio postulat.

§. 10. Habeantur tres litterae a, b, c, vt sit $n=3$, eritque $\mathfrak{A}=(a-b)(a-c)$; $\mathfrak{B}=(b-a)(b-c)$; $\mathfrak{C}=(c-a)(c-b)$ hinc tres sequentes aequationes:

I. $\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}=0$. II. $\frac{a}{\mathfrak{A}}+\frac{b}{\mathfrak{B}}+\frac{c}{\mathfrak{C}}=0$. III. $\frac{aa}{\mathfrak{A}}+\frac{bb}{\mathfrak{B}}+\frac{cc}{\mathfrak{C}}=1$.

Sit $a=5$, $b=4$, $c=2$, eritque $\mathfrak{A}=3$, $\mathfrak{B}=-2$, $\mathfrak{C}=6$, vnde

 fiet

fiet

$$\text{I. } \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}=0. \quad \text{II. } \tfrac{5}{3}-\tfrac{4}{2}+\tfrac{2}{6}=0. \quad \text{III. } \tfrac{25}{3}-\tfrac{16}{2}+\tfrac{4}{6}=1.$$

Sit porro $a=11$, $b=7$, $c=5$, vt fiat $\mathfrak{A}=24$, $\mathfrak{B}=-8$, $\mathfrak{C}=12$ hincque erit

$$\text{I. } \tfrac{1}{24}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12}=0. \quad \text{II. } \tfrac{11}{24}-\tfrac{7}{8}+\tfrac{5}{12}=0. \quad \text{III. } \tfrac{121}{24}-\tfrac{49}{8}+\tfrac{25}{12}=1.$$

§. 11. Habeantur quatuor numeri a, b, c, d, vt sit $n=4$ et

$$\mathfrak{A}=(a-b)(a-c)(a-d); \quad \mathfrak{C}=(c-a)(c-b)(c-d)$$
$$\mathfrak{B}=(b-a)(b-c)(b-d); \quad \mathfrak{D}=(d-a)(d-b)(d-c)$$

et quatuor aequationes hinc erunt:

$$\text{I. } \tfrac{1}{\mathfrak{A}}+\tfrac{1}{\mathfrak{B}}+\tfrac{1}{\mathfrak{C}}+\tfrac{1}{\mathfrak{D}}=0$$
$$\text{II. } \tfrac{a}{\mathfrak{A}}+\tfrac{b}{\mathfrak{B}}+\tfrac{c}{\mathfrak{C}}+\tfrac{d}{\mathfrak{D}}=0$$
$$\text{III. } \tfrac{a^2}{\mathfrak{A}}+\tfrac{b^2}{\mathfrak{B}}+\tfrac{c^2}{\mathfrak{C}}+\tfrac{d^2}{\mathfrak{D}}=0$$
$$\text{IV. } \tfrac{a^3}{\mathfrak{A}}+\tfrac{b^3}{\mathfrak{B}}+\tfrac{c^3}{\mathfrak{C}}+\tfrac{d^3}{\mathfrak{D}}=1$$

Sit nunc $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, vt fiat $\mathfrak{A}=-6$, $\mathfrak{B}=2$, $\mathfrak{C}=-2$, $\mathfrak{D}=6$, eritque

$$\text{I. } -\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}=0$$
$$\text{II. } -\tfrac{1}{6}+\tfrac{2}{2}-\tfrac{3}{2}+\tfrac{4}{6}=0$$
$$\text{III. } -\tfrac{1}{6}+\tfrac{4}{2}-\tfrac{9}{2}+\tfrac{16}{6}=0$$
$$\text{IV. } -\tfrac{1}{6}+\tfrac{8}{2}-\tfrac{27}{2}+\tfrac{64}{6}=1$$

Sit porro $a=2$, $b=5$, $c=7$, $d=9$, vt habeatur

$$\mathfrak{A}=-3.5.7, \quad \mathfrak{B}=+3.2.4, \quad \mathfrak{C}=-5.2.2, \quad \mathfrak{D}=+7.4.2$$

vnde sequentes prodibunt aequalitates:

$$\text{I. } -\tfrac{1}{3.5.7}+\tfrac{1}{3.2.4}-\tfrac{1}{5.2.2}+\tfrac{1}{7.4.2}=0$$
$$\text{II. } -\tfrac{2}{3.5.7}+\tfrac{5}{3.2.4}-\tfrac{7}{5.2.2}+\tfrac{9}{7.4.2}=0$$
$$\text{III. } -\tfrac{4}{3.5.7}+\tfrac{25}{3.2.4}-\tfrac{49}{5.2.2}+\tfrac{81}{7.4.2}=0$$
$$\text{IV. } -\tfrac{8}{3.5.7}+\tfrac{125}{3.2.4}-\tfrac{343}{5.2.2}+\tfrac{729}{7.4.2}=1.$$

§. 12. In aequationibus generalibus numeri a, b, c, d, etc. manifesto inter se inaequales supponuntur, quia alioquin valorum $\mathfrak{A}$,

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. vnus alterue euanefceret, vnde fractiones prodirent infinitae. Interim tamen nihilo minus noftrae formulae veritati debent effe confentaneae. Ad hoc oftendendum fumatur $a=b$: at quo hinc aliquid concludi queat, ftatuatur $a=b+\omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam; vnde pro cafu primi exempli erit $\mathfrak{A}=+\omega$ et $\mathfrak{B}=-\omega$, hincque $\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega}=0$ et $\frac{b+\omega}{\omega}-\frac{b}{\omega}=1$, vti requiritur.

§. 13. Iam pro fecundo cafu fpeciali fupra §. 10. confiderato, pofito $a=b+\omega$ erit

$\mathfrak{A}=\omega(b-c+\omega)$, $\mathfrak{B}=-\omega(b-c)$ et $\mathfrak{C}=(c-b-\omega)(c-b)$

vnde fit

$$\text{I. } \frac{1}{\omega(b-c+\omega)}-\frac{1}{\omega(b-c)}+\frac{1}{(c-b-\omega)(c-b)}=0$$

fiue partibus prima et fecunda coniunctis

$$-\frac{1}{(b-c+\omega)(b-c)}+\frac{1}{(c-b-\omega)(c-b)}=0.$$

vnde pofito $\omega=0$ manifefto eft $\frac{1}{(c-b)^2}-\frac{1}{(b-c)^2}=0$. Secunda vero aequatio erit

$$\frac{b+\omega}{\omega(b-c+\omega)}-\frac{b}{\omega(b-c)}+\frac{c}{(c-b-\omega)(c-b)}=0$$

fiue prioribus duobus terminis coniunctis

$$\frac{-c}{(b-c+\omega)(b-c)}+\frac{c}{(c-b-\omega)(c-b)}=0 \text{ et pofito } \omega=0$$

$$\frac{c}{(c-b)^2}-\frac{c}{(b-c)^2}=0.$$

Tertia denique aequatio eft

$$\frac{bb+2b\omega}{\omega(b-c+\omega)}-\frac{bb}{\omega(b-c)}+\frac{cc}{(c-b-\omega)(c-b)}=1,$$

vbi iterum priora duo membra in vnum colligantur, vt fiat

$$\frac{bb-2bc}{(b-c+\omega)(b-c)}+\frac{cc}{(c-b-\omega)(c-b)}=1, \text{ et facto } \omega=0 \text{ erit}$$

$$\frac{bb-2bc}{(b-c)^2}+\frac{cc}{(c-b)^2}=1.$$

§. 14. Pro cafu tertio §. 11. exhibito praeftabit primo tantum valores $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ confideraffe. Cum igitur pofito $a=b+\omega$ fit

$\mathfrak{A}=\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)$ et $\mathfrak{B}=-\omega(b-c)(b-d)$, erit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}=\frac{1}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)}-\frac{1}{\omega(b-c)(b-d)},$$

qui termini ad eundem denominatorem reducti, omisso scilicet termino ω^2, ita se habebunt $\frac{(b-c)(b-d)-(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{\omega(b-c)^2(b-d)^2}$.
Pro huius autem fractionis numeratore obseruasse iuuabit hanc quantatem:

$$(b-c+\omega)(b-d+\omega)-(b-c)(b-d)$$

sumta littera b variabili, positoque $db=\omega$, aequari differentiali producti $(b-c)(b-d)$, siue esse $= d(b-c)(b-d)$. At vero actu differentiando sumta b variabili et $db=\omega$ erit

$$d(b-c)(b-d)=\omega(b-d)+\omega(b-c)=\omega(2b-c-d), \text{ ita vt sit}$$
$$(b-c)(b-d)-(b-c+\omega)(b-d+\omega)=-\omega(2b-c-d).$$

Vi huius obseruationis erit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}=-\frac{(2b-c-d)}{(b-c)^2(b-d)^2}. \text{ Porro erit}$$
$$\frac{a}{\mathfrak{A}}+\frac{b}{\mathfrak{B}}=\frac{b+\omega}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)}-\frac{b}{\omega(b-c)(b-d)}=$$
$$\frac{(b+\omega)(b-c)(b-d)-b(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{\omega(b-c)^2(b-d)^2}.$$

Cum igitur ex praecedentibus nouerimus esse

$$(b-c+\omega)(b-d+\omega)-(b-c)(b-d)=d.(b-c)(b-d) \text{ erit}$$
$$\frac{a}{\mathfrak{A}}+\frac{b}{\mathfrak{B}}=-\frac{b(2b-c-d)+(b-c)(b-d)}{(b-c)^2(b-d)^2}=\frac{cd-bb}{(b-c)^2(b-d)^2}.$$

Praeterea fiet $\frac{a^2}{\mathfrak{A}}+\frac{b^2}{\mathfrak{B}}=\frac{(b+\omega)^2}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)}-\frac{bb}{\omega(b-c)(b-d)}=$

$$\frac{(b+\omega)^2(b-c)(b-d)-bb(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{\omega(b-c)^2(b-d)^2}=\frac{2bcd-bb(c+d)}{(b-c)^2(b-d)^2}$$

Denique habebimus $\frac{a^3}{\mathfrak{A}}+\frac{b^3}{\mathfrak{B}}=\frac{(b+\omega)^3}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)}$

$-\frac{b^3}{\omega(b-c)(b-d)}=\frac{(b+\omega)^3(b-c)(b-d)-b^3(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{(b-c)^2(b-d)^2}$ siue

$$\frac{a^3}{\mathfrak{A}}+\frac{b^3}{\mathfrak{B}}=\frac{bb(bb-2bc-2bd+3cd)}{(b-c)^2(b-d)^2}.$$

§. 15. Considerentur nunc etiam litterae $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, in quibus statim ponere licet $a=b$, et cum idcirco sint

$$\mathfrak{C}=(c-b)^2(c-d) \text{ et } \mathfrak{D}=(d-b)^2(d-c),$$

prior illarum quatuor aequationum erit

$$-\frac{(2b-c-d)}{(b-c)^2(b-d)^2}+\frac{1}{(c-b)^2(c-d)}+\frac{1}{(d-b)^2(d-c)}=0$$

cuius veritas statim manifesta erit, si in primo membro loco

2b—

$2b-c-d$ scribatur $b-c+b-d$, idque in has duas partes discerpatur:

$$-\frac{1}{(b-c)(b-d)^2}-\frac{1}{(b-c)^2(b-d)}, \text{ vt sit}$$

$$\frac{1}{(c-b)^2(c-d)}+\frac{1}{(d-b)^2(d-c)}-\frac{1}{(b-c)(b-d)^2}-\frac{1}{(b-c)^2(b-d)}=0;$$

tum enim hae fractiones ad eundem denominatorem $(b-c)^2(b-d)^2(c-d)$ reductae et iunctim sumtae vtique erunt $=0$, quemadmodum rem tentanti mox patebit. Secunda aequatio fiet

$$-\frac{bb+cd}{(b-c)^2(b-d)^2}+\frac{c}{(c-b)^2(c-d)}+\frac{d}{(d-b)^2(d-c)}=0$$

quae ad communem denominatorem $(b-c)^2(b-d)^2(c-d)$ reducta est

$$\frac{(cd-bb)(c-d)+c(b-d)^2-d(b-c)^2}{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)}=0$$

cuius numerator euolutus manifesto in nihilum abit, quemadmodum rei natura postulat. Tertia porro aequatio, omnibus membris ad communem denominatorem reductis, ita se habet:

$$\frac{(2bcd-bbc-bbd)(c-d)+cc(b-d)^2-dd(b-c)^2}{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)}=0,$$

cuius veritas iterum facta euolutione in oculos incurret. Quarta denique aequatio, quia est

$$\frac{bb(bb-2bc-2bd+3cd)}{(b-c)^2(b-d)^2}+\frac{c^3}{(c-b)^2(c-d)}+\frac{d^3}{(d-b)^2(d-c)}=1,$$

si ea eodem modo tractetur, abibit in hanc:

$$\frac{(b^4-2b^3c-2b^3d+3bbcd)(c-d)+c^3(b-d)^2-d^3(b-c)^2}{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)}=1.$$

Quod si autem huius fractionis tam numerator quam denominator actu euoluantur, reperietur esse

$$(b^4-2b^3c-2b^3d+3bbcd)(c-d)+c^3(b-d)^2-d^3(b-c)^2= (b-c)^2(b-d)^2(c-d),$$

vti requiritur.

§. 16. Quoniam autem istae euolutiones continuo fiunt molestiores, praestabit tales casus ex formula principali $\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(\text{etc.}}$, vnde omnia hactenus sunt deducta, deriuare. In ea igitur statim ponamus $a = b$ et statuamus

$$\frac{x^m}{(x-b)^2(x-c)(x-d)(\text{etc.}} = \frac{\alpha}{(x-b)^2} + \frac{\beta}{x-b} + R,$$

denotante R omnia reliqua membra; haecque aequatio per $(x-b)^2$ multiplicata praebet

$$\frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(\text{etc.}} = \alpha + \beta(x-b) + R(x-b)^2$$

Fiat nunc $x = b$ eritque $\alpha = \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.}}$, quo valore ad sinistram translato fiet

$$\frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(\text{etc.}} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.}} = \beta(x-b) + R(x-b)^2$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(\text{etc.}} = X$ vt habeatur $X - \alpha = \beta(x-b) + R(x-b)^2$, siue per $x-b$ diuidendo $\frac{X-\alpha}{x-b} = \beta + R(x-b)$; huius vero fractionis $\frac{X-\alpha}{x-b}$ tam numerator quam denominator euanescit posito $x = b$, vnde nihil concludi posset. Quo igitur valorem ipsius β obtineamus, tam loco numeratoris quam denominatoris sumamus eorum differentialia, orieturque ista fractio: $\frac{dX}{dx}$, cuius valor per x expressus sequenti modo elicitur.

§. 17. Cum sit $X = \frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(\text{etc.}}$ erit

$$lX = m\,lx - l(x-c) - l(x-d) - l(x-e) - \text{etc.},$$

hinc-

hincque differentiando

$$\frac{dX}{X} = \frac{m\,dx}{x} - \frac{dx}{x-c} - \frac{dx}{x-d} - \frac{dx}{x-e} - \text{etc.}$$

siue multiplicando per X et per dx diuidendo

$$\frac{dX}{dx} = \frac{mX}{x} - \frac{X}{x-c} - \frac{X}{x-d} - \frac{X}{x-e} - \text{etc. seu}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{m x^{m-1}}{(x-c)(x-d)(x-e)(\text{etc.}} - \frac{x^m}{(x-c)^2(x-d)(x-e)(\text{etc.}} - \frac{x^m}{(x-c)(x-d)^2(x-e)(\text{etc.}} - \text{etc.}$$

quocirca posito $x = b$ habebitur

$$\beta = \frac{m b^{m-1}}{(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.}} - \frac{b^m}{(b-c)^2(b-d)(b-e)(\text{etc.}} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)^2(b-e)(\text{etc.}} - \text{etc.}$$

pro reliquis autem erit

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-b)^2(c-d)(c-e)(\text{etc.}},\ \delta = \frac{d^m}{(d-b)^2(d-c)(d-e)(\text{etc.}},\ \text{etc.}$$

§. 18. His in genere obseruatis haud difficile erit, quemvis casum specialem expedire. Vt res exemplo illustretur, coronidis loco consideremus adhuc casum supra §. 11. tractatum, vbi erat $n = 4$, ideoque et numerus litterarum a, b, c, etc. $= 4$, pro quo igitur casu erit

$$\alpha = \frac{b^m}{(b-c)(b-d)}$$

$$\beta = \frac{mb^{m-1}}{(b-c)(b-d)} - \frac{b^m}{(b-c)^2(b-d)} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)^2} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)}$$

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-b)^2(c-d)},\ \text{et}\ \delta = \frac{d^m}{(d-b)^2(d-c)}$$

tam

Iam quicunque valores litteris a, b, c, d, tribuantur,

si	semper erit
$m = 0$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$
$m = 1$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$
$m = 2$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$
$m = 3$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

§. 19. At si habeantur quinque litterae a, b, c, d, e, ita vt $n = 5$, tum pro hoc casu erit.

$$\alpha = \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.}}$$

$$\beta = \frac{m b^{m-1}}{(b-c)(b-d)(b-e)} - \frac{b^m}{(b-c)^2 (b-d)(b-e)} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)^2 (b-e)}$$

$$- \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)^2} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)}$$

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-b)^2 (c-d)(c-e)}, \quad \delta = \frac{d^m}{(d-b)^2 (d-c)(d-e)},$$

$$\varepsilon = \frac{e^m}{(e-b)^2 (e-c)(e-d)},$$

ac tum	erit
casu $m = 0$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 1$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 2$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 3$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 4$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 1$

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.



DE REPRAESENTATIONE SVPERFICIEI SPHAERICAE SVPER PLANO.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Hic non tantum proiectiones opticas confidero, quibus diuerſa puncta ſuperficiei ſphaericae in plano ita repraeſentantur, quemadmodum a ſpectatore in certo loco conſtituto cernuntur, dum ſingula puncta ab eo viſa ſecundum leges Perſpectiuae in planum proiiciuntur: Sed hic vocabulum Repraeſentationis in latiſſimo ſenſu accipio, ita vt ſingula ſuperficiei ſphaericae puncta ſecundum legem quamcunque in ſuperficie plana exhibeantur, ſicque ſingulis punctis in Sphaera certa puncta in plano reſpondeant, ac viciſſim, niſi forte eueniat, vt quorundam punctorum Sphaerae repraeſentatio fiat imaginaria.

§. 2. Referat igitur figura $a\,b\,c$ portionem ſuperficiei Sphaericae, cuius polus ſit in puncto b et circulus $a\,l\,c$ Aequator; primus autem Meridianus ſit $a\,b$, a quo longitudines ſingulorum punctorum Sphaerae computentur, more in Geographia recepto. Conſideretur nunc punctum quodcunque p in Meridiano $b\,p\,l$ ſito, qui a primo Meridiano $b\,a$ diſtet angulo $a\,b\,l$, ſiue arcu Aequatoris $a\,l = t$; latitudo vero iſtius loci ſit arcus $l\,p = u$, dum radium Sphaerae vnitate expreſſum aſſumimus. Nunc in tertia figura referat planum tabulae id planum, in Tab. I. Fig. 2. Fig. 3.

O 2 quo

quo repraesentationem fieri oportet sitque P punctum illi loco p respondens, vnde ad axem vtcunque pro lubitu assumtum EF demittatur perpendiculum PX, et constituto abscissarum initio in puncto E vocetur abscissa $EX = x$ et applicata $XP = y$; et quia punctum P secundum legem quamcunque ex situ puncti p in Sphaera determinari assumimus, situs autem puncti p per binas variabiles t et u determinatur, praesentes coordinatae x et y tanquam Functiones quaecunque binarum illarum variabilium t et u spectari debebunt; vnde patet, hanc inuestigationem ad eam Analyseos partem esse referendam, in qua Functiones binarum variabilium tractantur.

Tab. I. Fig. 2. §. 3. Iam variabilitatem binarum quantitatum t et u in computum inducamus, sitque in Sphaera punctum q, cuius longitudo $= t$, at latitudo $= u + du$; r vero sit punctum, cuius longitudo sit $t + dt$, latitudo vero $l'r = u$, vnde completo parallelogrammo $pqrs$ loci s longitudo erit $t + dt$ et latitudo $= u + du$. Tum vero erunt quantitates elementares in Sphaera $pq = du$ et $ll' = dt$, vnde ex figura sphaerica fit elementum $pr = dt \cos. u$, at vero parallelogrammum $pqrs$ erit rectangulum, hincque diagonalis $ps = du^2 + dt^2 \cos. u^2$.

Fig. 3. §. 4. Nunc sphaerae punctis illis p, q, r, s respondeant in plano puncta P, Q, R, S,, vnde ad axem EF demittantur perpendicula PX, QU, RV et SW, et quia punctum Q ex P oritur, dum sola variabilis u elemento suo du augetur, coordinatae pro hoc puncto Q erunt

$$EU = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) \text{ et } UQ = y + du\left(\frac{dy}{u}\right).$$

Simili modo quia punctum R ex P per variabilitatem solius P nascitur, pro hoc puncto erit abscissa $EV = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et applicata $VR = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Denique vero pro puncto S, quod ex variabilitate vtriusque t et u nascitur, erit abscissa

$$EW = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

et

et applicata

$$WS = y + du\left(\frac{dy}{du}\right) + dt\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Vnde patet fore $XU = du\left(\frac{dx}{du}\right)$, cui ergo aequale eſt interuallum $VW = du\left(\frac{dx}{du}\right)$. Simili modo erit

$$WS - VR = UQ - XP = du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Ex quo ſequitur fore elementum $RS =$ elemento PQ, ſimilique modo $PR = QS$, ideoque quadrilaterum $PQRS$ parallelogrammum.

§. 5. Cum igitur rectangulum elementare in Sphaera $pqrs$ in plano per parallelogrammum $PQRS$ repraeſentetur, comparemus primo latera inter ſe, et cum ſit $pq = du$ et $pr = dt \operatorname{coſ.} u$ in plano habebimus

$$PQ = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \text{ et } PR = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Tum vero in plano elementum PQ exhibebit directionem Meridiani eiusque particulam incremento du reſpondentem: At elementum PR referet directionem Paralleli eiusque particulam incremento $dt \operatorname{coſ.} u$ reſpondentem. Quod ſi ergo functiones x et y ita eſſent comparatae, vt foret

$$du = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \text{ et } dt \operatorname{coſ.} u = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

tum tam Meridiani quam Paralleli in plano eandem obtinerent quantitatem quam habent in Sphaera. Interim tamen eo maius diſcrimen intercederet, quo magis anguli in plano ab angulis rectis eſſent diſcrepaturi.

§ 6. Quaeramus igitur primo poſitionem, quam directio Meridiani PQ et Paralleli PR reſpectu coordinatarum x et y tenet. Ac primo quidem ſecundum figuram elementum Meridiani PQ ad axem noſtrum EF ſub angulo inclinatur, cuius tangens eſt $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right)$. Simili modo directio Paralleli PR ad axem noſtrum EF inclinatur ſub angulo cuius tangens eſt $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$. Horum ergo angulorum differentia dabit angulum

QPR, ſub quo Parallelus ad Meridianum inclinatur, cuius ergo tangens erit

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Quamobrem ſi hic angulus debeat eſſe rectus, quemadmodum in Sphaera, neceſſe eſt vt fiat

$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ſiue $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

§. 7. Quod ſi ergo deſideraretur, vt figura in plano PQRS perfecte ſimilis et aequalis fieret figurae in Sphaera $pqrs$, tribus ſequentibus conditionibus ſatisfieri oporteret. Primo ſcilicet vt fieret $PQ=pq$, 2°.) $PR=pr$ ac 3°.) angulus $QPR=qpr=90°$. Ad hoc ergo poſtularentur tres ſequentes aequationes:

I. $\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}=1$ ſiue $\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2=1$

II, $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\operatorname{cof.} u$ ſiue $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\operatorname{cof.} u^2$

III. $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Vnde ſi ſtatuamus $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=\operatorname{tang.}\Phi$, per tertiam conditionem eſſe deberet $\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\operatorname{cot.}\Phi$, ideoque

$$\left(\frac{dy}{du}\right)=\left(\frac{dx}{du}\right)\operatorname{tang.}\Phi \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right)\operatorname{cot.}\Phi,$$

qui valores in binis aequationibus praecedentibus ſubſtituti praeberent

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=\operatorname{cof.}\Phi^2 \text{ et } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\operatorname{fin.}\Phi^2.\operatorname{cof.} u^2.$$

Manifeſtum autem eſt, his tribus conditionibus iunctim ſumtis nullo modo ſatisfieri poſſe; quandoquidem certum eſt, ſuperficiem ſphaericam nequaquam accurate in plano repraeſatari poſſe.

§. 8. Quo autem formulas differentiales ex calculo expellamus, faciamus ſequentes ſubſtitutiones

$$\left(\frac{dx}{du}\right)=p,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)=q,\ \left(\frac{dy}{du}\right)=r \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right)=s$$

ac primo quidem hinc fiet

$$dx=p\,du+q\,dt \text{ et } dy=r\,du+s\,dt$$

hic-

hicque ante omnia requiritur vt istae binae formulae integrabiles euadant, id quod eueniet, si p, q, r, s tales fuerint functiones binarum variabilium t et u, vt sit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{dq}{du}\right) \text{ et } \left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{ds}{du}\right).$$

Praeterea vero valores supra inuenti ita exprimentur, vt sit

$$PQ=du\sqrt{pp+rr} \text{ et } PR=dt\sqrt{qq+ss}.$$

Tum vero anguli, quo elementum PQ ad axem inclinatur, tangens erit $=\frac{r}{p}$: at vero anguli, sub quo elementum PR ad axem inclinatur, tangens $=\frac{s}{q}$; denique anguli QPR tangens erit $\frac{qr-ps}{pq+rs}$.

§. 9. His igitur denominationibus introductis ad repraesentationem perfectam requirerentur tres sequentes conditiones:

$$\text{I. } pp+rr=1: \text{ II. } qq+ss=\cos.u^2; \text{ III. } \frac{r}{p}=-\frac{q}{s}.$$

Hinc ergo, si fiat $\frac{r}{p}=\text{tang.}\,\Phi$, erit $\frac{s}{q}=-\cot.\Phi$, ita vt sit

$$r=p\,\text{tang.}\,\Phi \text{ et } s=-q\cot.\Phi,$$

vnde binae priores conditiones dant

$$pp=\cos.\Phi^2 \text{ et } qq=\sin.\Phi^2\cos.u^2.$$

atque hinc deducimus

$$p=\cos.\Phi \text{ et } q=-\sin.\Phi\cos.u$$

hincque porro

$$r=\sin.\Phi \text{ et } s=\cos.\Phi\cos.u.$$

His igitur valoribus substitutis integrabiles reddi debent hae duae formulae:

$$dx=du\cos.\Phi-dt\sin.\Phi\cos.u \text{ et}$$
$$dy=du\sin.\Phi+dt\cos.\Phi\cos.u$$

ad quod cum requiratur vt sit

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{du} \text{ et } \frac{dr}{dt}=\frac{ds}{du},$$

orientur hae duae aequationes

$$\text{I. } -\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\sin.\Phi=\sin.u\sin.\Phi-\left(\frac{d\Phi}{du}\right)\cos.u\cos.\Phi$$

$$\text{II. } \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\cos.\Phi=-\sin.u\cos.\Phi-\left(\frac{d\Phi}{du}\right)\cos.u\sin.\Phi.$$

Hinc

Hinc igitur I. fin. Φ + II. cof. Φ praebet $o = (\frac{d\Phi}{du})$ cof. u, vnde $(\frac{d\Phi}{du}) = o$, ficque angulus Φ tantum a variabili t pendere deberet: at vero haec combinatio: II. cof. Φ − I. fin. Φ dat $(\frac{d\Phi}{dt}) = -$ fin. u, ideoque pendere deberet ab u, quod cum praecedenti conclufioni contradicat, etiam per calculum euictum eft, talem repraefentationem perfectam locum habere non poffe.

§. 10. Cum igitur repraefentatio perfecta penitus excludatur, vtique disparitatem in repraefentatione admittere cogimur, qua figura in plano defcripta a figura fphaerica aberret. Prouti igitur talem aberrationem a veritate concedere voluerimus, repraefentationem ad fcopum quouis cafu propofitum accommodare licebit; quare cum conditiones, quibus fatisfacere defideramus, infinitis modis variari queant, cafus nonnullos praecipuos in fequentibus euoluamus. Ante omnia autem affumemus, angulum, quem Meridiani cum Parallelis conftituunt, vbique rectum effe debere; quandoquidem, fi angulos obliquos admittere vellemus, repraefentatio maxime inepta effet proditura, quocirca in fequentibus perpetuo affumemus angulum Q P R effe rectum ideoque $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$.

§. 11. Hanc igitur proprietatem, qua in repraefentatione omnes Paralleli Meridianos normaliter traiicere debent, in genere accuratius euoluamus. Hunc infinem iterum introducamus angulum Φ, vt fit $r = p$ tag. Φ ideoque $s = -q$ cot. Φ. Quibus valoribus loco r et s fubftitutis fequentes duae formulae differentiales integrabiles reddi debebunt

$$dx = p\,du + q\,dt \quad \text{et} \quad dy = p\,du \,\text{tag.}\, \Phi - q\,dt \,\text{cot.}\, \Phi.$$

§. 12. Quo iam has formulas ad maiorem vniformitatem perducamus, loco p et q binas nouas variabiles m et n introducamus, ponendo $p = m$ cof. Φ et $q = n$ fin. Φ, vnde euadet $r = m$ fin. Φ et $s = -n$ cof. Φ atque ambae formulae integrabi-

les

les reddendae erunt

$dx = m\,du\,\mathrm{cos}.\,\Phi + n\,dt\,\mathrm{sin}.\,\Phi$ et $dy = m\,du\,\mathrm{sin}.\,\Phi - n\,dt\,\mathrm{cos}.\,\Phi$.
Sicque totum negotium huc reducitur, vt inquiratur, cuiusmodi functiones m et n accipi debeant, vt istae duae formulae integrabiles reddantur; vbi imprimis respiciendum erit ad eam conditionem, quam insuper quouis casu adimplere voluerimus.

Hypothesis I.

Qua omnes Meridiani ad nostrum axem E F normales, Paralleli vero E I paralleli statuuntur.

§. 13. Cum angulus Φ metiatur inclinationem elementi P Q ad axem E F, quoniam assumsimus tag. $\Phi = \frac{r}{p}$, elementum vero P Q directionem Meridiani indicat, angulus iste Φ pro hac Hypothesi erit rectus, vnde ambae formulae differentiales erunt $dx = n\,dt$ et $dy = m\,du$, quae cum esse debeant integrabiles, id infinitis modis effici poterit, dummodo pro m functio quaecunque ipsius u, pro n vero functio ipsius t accipiatur; quamobrem insuper pluribus conditionibus, quae desiderari possunt, satisfieri poterit.

§. 14. Primum igitur effici poterit, vt omnes gradus longitudinis inter se fiant aequales, quandoquidem nulla ratio suadet, vt in his gradibus inaequalitas statuatur. Quod si ergo noster axis E F Aequatorem referat, ita vt abscissa E X repraesentet, arcum Aequatoris $al = t$, statui oportebit $x = t$, ideoque n vnitati vel alii quantitati constanti pro lubitu accipiendae aequale, tum vero pro applicata quaecunque functio ipsius ω accipi poterit.

§. 15. In hac ergo Hypothesi quadrilaterum P Q R S non solum erit parallelogrammum rectangulum, vti in Sphaera, sed etiam punctum Q in ipsa applicata X P producta erit situm, ita vt futurum sit $PQ = dy$ et $PR = dx = dt$. Quod si ergo sumeremus $y = u$, quoniam u denotat latitudinem loci, si $dx = dt$ referat gradum longitudinis, et $dy = du$ gradum lati- Tab. I. Fig. 4.

tudinis, hoc casu foret $dy = dx$. Verum talis repraesentatio omni vsu caritura et regiones Terrae vehementer distortas esset exhibitura.

§. 16. Pro applicata autem y talem functionem latitudinis u assumi conueniet, vt scopo cuipiam, quem nobis proponimus satisfiat. Ac primo quidem hic occurrit ista conditio, vt parallelogrammum in plano P Q R S simile reddatur parallelogrammo in Sphaera $p\,q\,r\,s$, quandoquidem hoc modo omnes saltem portiunculae minimae in superficie sphaerica similimodo in plano exhibebuntur. Atque haec est ipsa illa conditio, quae in Mappis Hydrographicis ab inuentore *Mercatoriis* dictis, obseruari solet, quoniam talis repraesentatio nauigantibus maxima commoda suppeditat, quem ergo repraesentandi modum breuiter accuratius euoluamus.

I. De Mappis Hydrographicis Mercatoris.

§. 16. Quoniam igitur hic requiritur, vt rectangulum P Q R S simile fiat rectangulo $p\,q\,r\,s$, vbi est P Q $= du$ et P R $= dt \cos. u$, ob $dx = dt$ fieri debet $dy : dt = du : dt \cos. u$, vnde colligitur $dy = \frac{du}{\cos. u}$, hincque integrando erit $y = l\,\text{tag.}(45° + \frac{1}{2}u)$, Latitudini scilicet quae in sphaera angulo denotatur, in hac repraesentatione respondebit applicata y, logarithmo hyperbolico tangentis anguli $45° + \frac{1}{2}u$ aequalis; ex qua formula pro singulis latitudinibus u valores ipsius y computari et in tabula referri solent.

§. 17. Scilicet cum hic omnes Paralleli Aequatori aequales referantur, qui tamen in Sphaera continuo fiunt minores, gradus cuiusque Meridiani, qui in Sphaera sunt aequales in hac repraesentatione tanto maiores accipi oportet, quanto maiores hic gradus cuiusque Paralleli sunt quam super Sphaera. Hocqne modo in Meridianis gradus latitudinis continuo magis augentur, quo maior fuerit latitudo, idque in eadem ratione, qua cosinus latitudinis diminuitur. Ita si du denotet gradum in

in Meridiano ſuper Sphaera, in his Mappis quantitas huius gradus eſt $\frac{du}{\cos. u}$: vnde ſub latitudine 60° gradus Meridiani duplo maior eſt quam in ſuperficie ſphaerica; at ſub polo adeo creſcit in infinitum, quam ob cauſſam iſtas mappas non vsque ad polos extendere licet.

§. 18. Maximum autem commodum, quod iſtae Mappae nauigantibus praeſtant, in eo conſiſtit, quod curuae Loxodromicae, quae in Sphaera omnes Meridianos ſub eodem angulo traiiciunt, in hac repraeſentatione per lineas rectas exhibentur, quae ſcilicet omnes Meridianos, qui hic inter ſe ſunt paralleli, ſub eodem angulo interſecant.

§. 19. Ita ſi in Sphaera linea ap referat curuam Loxodromicam, quae Meridianos traiiciat ſub angulo $=\zeta$, eiusque longitudo vocetur $ap = z$ erit $du : dz = \cos.\zeta : 1$ ideoque $dz = \frac{du}{\cos.\zeta}$ hincque $z = \frac{u}{\cos.\zeta}$. Quod ſi iam iſti lineae ap in plano reſpondeat linea EP, quoniam angulus EPX itidem eſt $=\zeta$, euidens eſt hanc lineam EP fore rectam, eiusque longitudinem $\frac{y}{\cos.\zeta}$; vnde ex cognita quantitate lineae EP viciſſim vera longitudo viae a naue percurſae, ſcilicet linea ap, concludi poterit, cum ſit $ap : \mathrm{EP} = u : y$: haec autem ratio $u : y$ vt cognita ſpectari poteſt.

§. 20. Quem ad modum autem curuae Loxodromicae hoc modo in plano ſimpliciſſime per lineas rectas exhibentur, ita e contrario circuli maximi in Sphaera ducti hic per lineas maxime tranſcendentes repraeſentabuntur. Sit enim ap arcus circuli maximi ad Aequatorem in a inclinati ſub angulo $lap = \theta$, erit vti conſtat $\mathrm{tang.}\, u = \mathrm{tang.}\, \theta\, \mathrm{ſin.}\, t$, vnde naturam curuae EP illi arcui reſpondentis definiri poterit per formulas $x = t$ et $y = l\, \mathrm{tang.}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2} u)$.

§. 21. Ad naturam igitur huius curuae EP inueſtigandam denotet e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$,

eritque $e^y = \text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}u) = \frac{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}u}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}u}$, hincque tang. $\frac{1}{2}u = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$, ex quo porro colligitur tang. $u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$, qui valor in aequatione superiore substitutus ob $t = x$ praebebit hanc aequationem inter x et y: $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.}\,\theta\ \text{fin.}\,x$, qua natura huius curuae E P exprimitur; vnde patet, si longitudo x fuerit quam minima, tum fore etiam y minimum, ideoque $e^y = 1 + y$ et $e^{2y} = + 2y$, vnde ob fin. $x = x$ erit $\frac{y}{1+y} = x\,\text{tang.}\,\theta$ ipeoque $\frac{y}{x} = \text{tang}\,\theta$; vnde patet curuam in E ad Aequatorem etiam sub angulo θ inclinari. Tum vero sumto $x = 90^\circ$, applicata y fiet maxima atque $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.}\,\theta$ vnde deducitur

$$e^y = \text{tang.}\,\theta \pm \sqrt{\text{tang.}\,\theta^2 + 1} = \frac{\text{fin.}\,\theta + 1}{\text{cof.}\,\theta} = \sqrt{\frac{1 + \text{fin.}\,\theta}{1 - \text{fin.}\,\theta}}$$

quae expruffio porro reducitur ad cot. $(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$, sicque erit $e^y = \text{cot.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$ hinque

$$y = l\,\text{cot.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Ex quo intelligitur, hanc curuam maxime esse transcendentem.

2°.) De Mappis veram quantitatem cuiusque regionis exhibentibus.

§. 22. Maneant, vti in hac Hypothesi assumsimus, omnes Meridiani inter se paralleli, gradus autem in Aequatore omnes inter se aequales, quibus igitur etiam gradus in omnibus Parallelis aequabuntur, ita vt sit $x = t$; et nunc requiritur, vt area rectanguli P Q R S $= dx\,dy$ aequalis reddatur areae rectanguli $pqrs$ in Sphaera $= du\,dt\,\text{cof.}\,u$. Fiat igitur $dy = du\,\text{cof.}\,u$ eritque integrando $y = \text{fin.}\,u$, vnde constructio huiusmodi repraesentationis erit facillima, quia singulae applicatae aequales sumi

debent

debent ſinubus latitudinum quibus reſpondent. Gradus autem in quolibet Meridiano ab Aequatore diſcedendo continuo diminuentur et ſub polo plane euaneſcent; polus autem referetur per lineam rectam Aequatori EF parallelam ab eoque diſtantem interuallo ſin. $u = 1$, hoc eſt radio Sphaerae aequali.

§. 23. Quod ſi ergo tota ſuperficies Terrae hoc modo repraeſentetur, mappa referet parallelogramum, cuius longitudo erit peripheriae totius Aequatoris $= 2\pi$ aequalis; latitudo autem vtrinque ab Aequatore ad diſtantiam $= 1$ extenditur, vnde area totius rectanguli erit $= 4\pi$, quae aequatur areae totius ſuperficiei ſphaericae In talibus igitur mappis omnes Terrae regiones vera quantitate exhibebuntur, quanquam earum figura plurimum a veritate aberret. Semper enim area cuiusque regionis hoc modo in plano repraeſentatae aequalis erit areae eiusdem regionis in ſuperficie Terrae; vnde tales mappae inſeruient diuerſis Terrae regionibus ſecundum veram quantitatem inter ſe comparandis, quod commodiſſime praeſtabitur per gradus vel milliaria quadrata, dum ſingulis gradibus Aequatoris quindecim miliiaria germanica tribuuntur.

Hypotheſis II.

Qua regiones minimae in Terra per ſimiles figuras in plano exhibentur.

§. 24. Quo ſimilitudo iſta obſeruetur ante omnia neceſſe eſt, vt vbique Meridiani ad Parallelos normales ſtatuantur, quam ob rem ambae formulae differentiales, quas integrabiles reddi oportet, erunt vti iam ſupra §. 12. ſunt inuentae Tab. I. Fig. 3.

$dx = m\,du \operatorname{cof.} \Phi + n\,dt \operatorname{fin.} \Phi$ et

$dy = m\,du \operatorname{fin.} \Phi - n\,dt \operatorname{cof.} \Phi$

hinc autem fiunt elementa

$PQ = du\sqrt{pp + rr} = m\,du$ et $PR = dt\sqrt{qq + ss} = n\,dt$

angulus vero QPR has formulas iam redditus eſt rectus.

§. 25. Cum igitur rectangulum PQRS simile esse debeat rectangulo $pqrs$, necesse est vt fiat $PQ:PR = pq:pr$ hoc est $m:n = 1:\text{cos}.\, u$, ideoque $n = m\,\text{cos}.\, u$, quare binae nostrae formulae differentiales erunt:

$$dx = m\,du\,\text{cos}.\,\Phi + m\,dt\,\text{cos}.\,u\,\text{sin}.\,\Phi \text{ et}$$
$$dy = m\,du\,\text{sin}.\,\Phi - m\,dt\,\text{cos}.\,u\,\text{cos}.\,\Phi.$$

§. 26. Totum ergo negotium huc reducitur, vt indicetur, quales functiones ipsarum t et u pro m et Φ assumi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles reddantur. Quoniam autem supra posuimus $p = m\,\text{cos}.\,\Phi$ et $r = m\,\text{sin}.\,\Phi$, breuitatis gratia has litteras p et r introducamus, vt habeamus has duas aequationes:

$$dx = p\,du + r\,dt\,\text{cos}.\,u \text{ et}$$
$$dy = r\,du - p\,dt\,\text{cos}.\,u$$

et iam quaeritur, quales functiones ipsarum t et u pro litteris p et r accipi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles euadant, vbi quidem statim casus Mapparum Hydrographicarum se offert, quippe quo sumi debet $p = 0$ et $r = \frac{1}{\text{cos}.\,u}$. Alios autem casus hic diuinando non tam facile elicere licet.

§. 27. Ex notis autem integrabilitatis conditionibus requiritur vt sit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = d.\left(\frac{r\,\text{cos}.\,u}{du}\right) = -r\,\text{sin}.\,u + \text{cos}.\,u\frac{dr}{du} \text{ et}$$
$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -d.\left(\frac{p\,\text{cos}.\,u}{du}\right) = p\,\text{sin}.\,u - \text{cos}.\,u\frac{dp}{du},$$

ex quarum posteriore fit $\frac{dp}{du} = p\,\text{tang}.\,u - \frac{dr}{dt\,\text{cos}.\,u}$. Quare cum sit $dp = du\left(\frac{dp}{du}\right) + dt\left(\frac{dp}{dt}\right)$, hinc nascitur ista noua conditio:

$$dp = p\,du\,\text{tang}.\,u - \frac{dr}{dt}.\frac{du}{\text{cos}.\,u} - r\,dt\,\text{sin}.\,u + \frac{dr}{du}dt\,\text{cos}\,u$$

quae per cos. u multiplicata, et termino p ad alteram partem partem translato fit

$$dp\,\text{cos}.\,u - p\,du\,\text{sin}.\,u = -r\,dt\,\text{sin}.\,u\,\text{cos}.\,u + \left(\frac{dr}{du}\right)dt\,\text{cos}.\,u^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)du$$

vbi, quia membrum sinistrum sponte est integrabile, etiam dextrum

dextrum ad integrabilitatem perduci debet, quaerendo ſcilicet pro r idoneam functionem ipſarum t et u.

§. 28. Hanc ob rem etiam viam inire oportet has formulas reſoluendi. Poſtquam autem difficultates probe perpendiſſem, duplex ſe mihi obtulit methodus hoc negotium conficiendi, quarum altera ſuppeditat innumerabiles ſolutiones particulares, altera vero me ad ſolutionem generaliſſimam perduxit. Has igitur ambas methodos, quibus Analyſi circa functiones duarum variabilium verſanti inſignia incrementa afferi videntur, hic accuratius euoluam.

Methodus particularis reſoluendi aequationes differentiales

$$dx = p\,du + r\,dt\,\text{coſ.}\,u, \quad dy = r\,du - p\,dt\,\text{coſ.}\,u.$$

§. 29. Quoniam ambae functiones p et r vtramque variabilem u et t inuoluunt, vtramque producto ex functione ipſius u in functionem ipſius t aequalem ſtatuamus. Sit igitur $p = \text{U}\,\text{T}$ et $r = \text{V}\,\Theta$, exiſtentibus U et V functionibus ſolius u, T vero et Θ functionibus ſolius t, ſicque habebimus has duas formulas differentiales integrabiles reddendas:

I. $dx = \text{U}\,\text{T}\,du + \text{V}\,\Theta\,dt\,\text{coſ.}\,u$

II. $dy = \text{V}\,\Theta\,du - \text{U}\,\text{T}\,dt\,\text{coſ.}\,u.$

§. 30. Hinc iam duplici modo tam valor ipſius x quam ipſius y per formulas integrales exhiberi poterit. Si enim quantitas t vt conſtans ſpectatur, ideoque poſteriora membra euaneſcant, ex prioribus colligetur

$$x = \text{T}\int \text{U}\,du \quad \text{et} \quad y = \Theta \int \text{V}\,du$$

ſin autem quantitas u pro conſtante habeatur, ex poſterioribus membris fiet

$$x = \text{V}\,\text{coſ.}\,u \int \Theta\,dt \quad \text{et} \quad y = -\,\text{U}\,\text{coſ.}\,u \int \text{T}\,dt$$

atque

atque hi gemini vtriusque valores inter se aequales esse debent, vnde pro x hanc adipiscimur aequationem:

$$T\int U\,du = V\,\text{cos}.u\int \Theta\,dt \text{ siue } \int\frac{U\,du}{V\,\text{cos}.u} = \int\frac{\Theta\,dt}{T}$$

pro y autem erit

$$\Theta\int V\,du = -U\,\text{cos}.u\int T\,dt \text{ siue } \int\frac{V\,du}{U\,\text{cos}.u} = -\int\frac{T\,dt}{\Theta}.$$

Ex quibus duabus conditionibus indolem functionum U et V T et Θ elici oportet.

§. 31. Cum igitur esse debeat $\int\frac{U\,du}{V\,\text{cos}.u} = \int\frac{\Theta\,dt}{T}$, manifestum est, has duas fractiones quantitati constanti esse debere aequales, quandoquidem ambae variabiles t et u neutiquam a se inuicem pendent. Sit igitur α ista quantitas constans, eritque

$$\int U\,du = \alpha\,V\,\text{cos}.\,u \text{ et } \int\Theta\,dt = \alpha\,T.$$

Simili modo cum sit $\int\frac{V\,du}{U\,\text{cos}.\,u} = -\int\frac{T\,dt}{\Theta}$, vtraque fractio aequetur quantitati constanti β, indeque fiet

$$\int V\,du = \beta\,U\,\text{cos}.\,u \text{ et } \int T\,dt = -\beta\,\Theta.$$

Hocque modo formulae integrales ad quantitates absolutas reducuntur, vnde valores ipsarum x et y ita sine signo summatorio exprimentur:

$$x = \alpha\,T\,V\,\text{cos}.\,u \text{ et } y = \beta\,\Theta\,U\,\text{cos}.\,u.$$

§. 32. Statuamus breuitatis gratia $U\,\text{cos}.\,u = P$ et $V\,\text{cos}.\,u = Q$, ita vt sit $U = \frac{P}{\text{cos}.\,u}$ et $V = \frac{Q}{\text{cos}.\,u}$, vnde quatuor nostrae formulae erunt

$$\int\Theta\,dt = \alpha T \text{ et } \int T\,dt = -\beta\,\Theta$$

$$\int\frac{P\,du}{\text{cos}.\,u} = \alpha Q \text{ et } \int\frac{Q\,du}{\text{cos}.\,u} = \beta P.$$

Iam priores formulae vtriusque ordinis differentiatae dant $\Theta = \frac{\alpha\,dT}{dt}$, $P = \frac{\alpha\,dQ\,\text{cos}.\,u}{du}$, qui valores in posterioribus substituti praebent

$$\int T\,dt = -\frac{\alpha\beta\,dT}{dt} \text{ et } \int\frac{Q\,du}{\text{cos}.\,u} = \frac{\alpha\beta\,dQ\,\text{cos}.\,u}{du}.$$

Quae

Quae aequationes denuo differentiatae sumendis elementis dt et du constantibus praebent sequentes aequationes:

$$T = -\frac{\alpha\beta\, ddT}{dt^2} \text{ et } Q = \frac{\alpha\beta\, ddQ\, cos.\, u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta\, dQ\, sin.\, u\, cos.\, u}{du}$$

sicque ad binas aequationes differentiales secundi gradus sumus deducti, a quarum integratione tota solutio pendet.

§. 34. Incipiamus a priore aequatione $T = -\frac{\alpha\beta\, ddT}{dt^2}$ quae ducta in $2\,dT$ et integrata praebet $TT = -\frac{\alpha\beta\, dT^2}{dt^2} + A$ vnde colligitur $dt^2 = \frac{\alpha\beta\, dT^2}{A - TT}$. Simili modo altera aequatio

$$Q = \frac{\alpha\beta\, ddQ\, cos.\, u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta\, dQ\, sin.\, u\, cos.\, u}{du}$$

ducta in $2\,dQ$ et integrata praebet $QQ = \frac{\alpha\beta\, dQ^2\, cos.\, u^2}{du^2} + B$, vnde colligitur $\frac{du^2}{cos.\, u^2} = \frac{\alpha\beta\, dQ^2}{QQ - B}$. Pro harum autem integratione vlteriori duos casus distingui oportet, prouti quantitas $\alpha\beta$ fuerit vel positiua vel negatiua.

Casus prior

quo est $\alpha\beta = +\lambda\lambda$

ideoque $\beta = \frac{\lambda\lambda}{\alpha}$.

§. 35. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = \frac{\lambda\lambda\, dT^2}{A - TT}$, vbi, cum A debeat esse quantitas positiua, ponamus $A = aa$ eritque $dt = \frac{\lambda\, dT}{\surd(aa - TT)}$, cuius integrale manifesto est $t + \delta = \lambda A\, sin. \frac{T}{a}$; viciſſim ergo colligitur $T = a\, sin.\, (\frac{t+\delta}{\lambda})$; vnde cum sit

$dT = \frac{a\, dt}{\lambda} cos.\, (\frac{t+\delta}{\lambda})$ ob $\Theta = \frac{\alpha\, dT}{dt}$ erit nunc

$\Theta = \frac{\alpha a}{\lambda} cos.\, (\frac{t+\delta}{\lambda})$.

§. 36. Altera vero aequatio integranda, ob $\alpha\beta = \lambda\lambda$ erit $\frac{du}{cos.\, u} = \frac{\lambda\, dQ}{\surd(QQ - B)}$, quae integrata dat

$$l\, tang.\, (45° + \tfrac{1}{2}u) + \lambda\, l\varepsilon = \lambda\, l(Q + \surd\overline{QQ - B}).$$

Quo autem hanc formulam commodius euoluere queamus, vocemus $tang.\, (45° + \frac{1}{2}u) = s$, et cum sit $ls = \int \frac{du}{cos.\, u}$ erit $\frac{ds}{s} = \frac{du}{cos.\, u}$

ideoque $ds = \frac{s\,du}{\cos. u}$. Cum igitur sit

$$l\varepsilon^\lambda s = \lambda l(Q + \sqrt{QQ - B}) \text{ erit } \varepsilon^\lambda s = (Q + \sqrt{QQ - B})^\lambda$$

ideoque $Q + \sqrt{QQ - B} = \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda}}$, vbi breuitatis gratia faciamus $\frac{1}{\lambda} = \nu$, et facta euolutione prodibit $Q = \frac{1}{2}\varepsilon s^\nu + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon}$, hincque fit $dQ = \frac{1}{2}\nu\varepsilon s^{\nu-1} ds - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu-1} ds$, quae aequatio ob $ds = \frac{s\,du}{\cos. u}$ abit in hanc

$$dQ = \frac{\frac{1}{2}\nu\varepsilon s^\nu du}{\cos. u} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu} \frac{du}{\cos. u}.$$

Quia igitur erat $P = \frac{\alpha\,dQ \cos. u}{du}$ erit

$$P = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\varepsilon s^\nu - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

§. 37. His igitur valoribus inuentis erit

$$U = \frac{\alpha\nu\varepsilon s^\nu}{2 \cos. u} - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon \cos. u} \text{ et } V = \frac{\varepsilon s^\nu}{2 \cos. u} + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon \cos. u}$$

ex quibus denique colligimus ambas nostras coordinatas x et y: scilicet

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha a \sin. \left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu + \tfrac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right) \text{ et}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\lambda a \cos. \left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu - \tfrac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right)$$

vbi meminisse oportet esse $\nu = \frac{1}{\lambda}$ et $s = \tang. (45^\circ + \frac{1}{2}u)$; vnde ad has formulas concinniores reddendas, ponamus $B = \varepsilon\varepsilon b$, quibus notatis obtinebimus

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \sin. \left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \cos. \left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Casus posterior

quo $\alpha\beta = -\mu\mu$ ideoque $\beta = -\frac{\mu\mu}{\alpha}$.

§. 38. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = -\frac{\mu\mu\,dT^2}{A - TT}$ hincque

$dt =$

$dt = \frac{\mu\, dT}{\sqrt{TT - A}}$, vnde integrando fit

$$t + \delta = \mu\, l\,(T + \sqrt{TT - A})$$

vnde si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$ erit $e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = T + \sqrt{TT - A}$. Sit breuitatis gratia $\frac{t+\delta}{\mu} = \theta$ ita vt sit $d\theta = \frac{dt}{\mu}$ eritque $e^{\theta} - T = \sqrt{TT - A}$, vnde fit

$$T = \frac{e^{2\theta} + A}{2\, e^{\theta}} = \tfrac{1}{2} e^{\theta} + \tfrac{1}{2} A\, e^{-\theta}.$$ Hinc autem fit

$$dT = \frac{dt}{2\mu} e^{\theta} - \frac{A\, dt}{2\mu} e^{-\theta},$$ ex quo fit

$$\Theta = \frac{\alpha}{2\mu}(e^{\theta} - A\, e^{-\theta}).$$

§. 39. Hoc autem casu porro erit

$$\frac{du^2}{\cos. u^2} = -\frac{\mu\mu\, dQ^2}{QQ - B} = \frac{\mu\mu\, dQ^2}{B - QQ}.$$

Quia igitur B necessario est positiuum, ponamus $B = bb$, vt fiat $\frac{du}{\cos. u} = \frac{\mu\, dQ}{\sqrt{(bb - QQ)}}$ et integrando

$$l\,\text{tang.}(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}u) + l\varepsilon = \mu\, A\,\text{sin.}\frac{Q}{b},$$

vbi si iterum sit $\text{tang.}(45^{\circ} + \frac{1}{2}u) = s$, erit $\frac{l\varepsilon s}{\mu} = A\,\text{sin.}\frac{Q}{b}$, vnde vicissim deducimus $Q = b\,\text{sin.}\frac{l\varepsilon s}{\mu}$, hincque

$$dQ = \frac{b}{\mu}\cdot\frac{ds}{s}\cos.\frac{l\varepsilon s}{\mu} = \frac{b}{\mu}\,\frac{du}{\cos. u}\cos.\frac{l\varepsilon s}{\mu},$$ vnde fit

$$P = \frac{\alpha b}{\mu}\cos.\frac{l\varepsilon s}{\mu}.$$

§. 40. Cum igitur ex superioribus sit

$$x = \alpha\, T\, V \cos. u = a\, T\, Q \text{ et } y = \beta\,\Theta\, P = -\frac{\mu\mu}{\alpha}\Theta\, P$$

erit valoribus modo erutis substituendis

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha\, b\,\text{sin.}\frac{l\varepsilon s}{\mu}(e^{\theta} + A\, e^{-\theta} \text{ et}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\alpha\, b\cos.\frac{l\varepsilon s}{\mu}(e^{\theta} - A\, e^{-\theta}).$$

Vbi meminisse oportet esse

$$\theta = \frac{t+\delta}{\mu} \text{ et } s = \text{tang.}(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}u).$$

§. 41. Quoniam in his formulis nonnullae quantitates arbitrio nostro penitus sunt relictae, hae solutiones iam satis late patent, et innumerabiles casus speciales in se complectuntur. Verum multo adeo latius haec solutio extendi potest dum binae pluresue quaeuis solutiones inuentae inter se coniungi possunt. Scilicet: si inuenti fuerint primo hi valores: $x = \mathrm{M}$ et $y = \mathrm{N}$; deinde vero $x = \mathrm{M}'$ et $y = \mathrm{N}'$; praeterea etiam $x = \mathrm{M}''$ et $y = \mathrm{N}''$ etc., tum ex his solutionibus ista multo generalior formari poterit:

$$x = \mathfrak{A}\mathrm{M} + \mathfrak{B}\mathrm{M}' + \mathfrak{C}\mathrm{M}'' + \mathfrak{D}\mathrm{M}''' \text{ etc. et}$$
$$y = \mathfrak{A}\mathrm{N} + \mathfrak{B}\mathrm{N}' + \mathfrak{C}\mathrm{N}'' + \mathfrak{D}\mathrm{N}''' \text{ etc.}$$

quae solutio vtique tam generalis videtur, vt omnes solutiones possibiles in se complectatur.

Methodus generalis resoluendi aequationes differentiales

$$dx = p\,du + r\,dt \operatorname{cos.} u \text{ et } dy = r\,du - p\,dt \operatorname{cos.} u.$$

§. 42. Quaeratur eiusmodi combinatio harum duarum formularum, quae resolutionem in duos factores admittat. Hunc in finem prior ducatur in α, posterior vero in β et aggregatum ambarum erit

$$\alpha\,dx + \beta\,dy = p(\alpha\,du - \beta\,dt \operatorname{cos.} u) + r(\beta\,du + \alpha\,dt \operatorname{cos.} u)$$

cuius factores differentiales, vt ad similitudinem perducantur, ita disponantur:

$$\alpha\,dx + \beta\,dy = \alpha p\left(du - \tfrac{\beta}{\alpha}\,dt \operatorname{cos.} u\right) + \beta r\left(du + \tfrac{\alpha}{\beta}\,dt \operatorname{cos.} u\right).$$

Iam fiat $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, siue $\alpha\alpha + \beta\beta = 0$ siue $\beta = \alpha\sqrt{-1}$, et ista combinatio dabit

$$dx + dy\sqrt{-1} = (p + r\sqrt{-1})(du - \sqrt{-1}\,dt \operatorname{cos.} u)$$

quae forma, vt factor differentialis integrabilis reddatur, ita repraesentetur

$$dx + dy\sqrt{-1} = \operatorname{cos.} u\,(p + r\sqrt{-1})\left(\frac{du}{\operatorname{cos.} u} - \sqrt{-1}\,dt\right).$$

§. 43.

§. 43. Ponamus nunc $\frac{du}{cos.\,u} - dt\sqrt{-1} = dz$, vt sit

$$z = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{1} \text{ eritque}$$

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos.\,u\,(p + r\sqrt{-1})\,dz$$

quae aequatio manifesto integrabilis esse nequit, nisi factor finitus cos. $u\,(p + r\sqrt{-1})$ sit functio ipsius z; quaecunque autem fuerit functio, integratio semper locum habebit. Vnde patet, etiam integrale futurum esse functionem ipsius z, ita vt formula $x + y\sqrt{-1}$ aequetur functioni cuicunque ipsius z hoc est quantitatis

$$l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}.$$

§. 44. Vt autem haec formula concinnior reddatur statuamus vt hactenus tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$, vt sit

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{cos.\,u} \text{ et } z = ls - t\sqrt{-1}.$$

Nunc more solito denotet character Γ functionem quamcunque quantitatis suffixae, eritque

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$$

siue etiam, quod eodem redit,

$$x + y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma : (ls - t\sqrt{-1}).$$

Cum autem formula $\sqrt{-1}$ natura sua signum ambiguum $\pm$ inuoluat, erit quoque

$$x - y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Hinc autem colligimus fore

$$x = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Constat autem has expressiones pro x et y semper reduci ad valores reales.

§. 45. Ita si Γ designet potestatem quamcunque formulae suffixae, vel etiam multiplum quodcunque, cuius exponens sit λ, facta euolutione et posito v. g. $ls = v$ fiet

 $x = v^\lambda$

$$x = v^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\,2} v^{\lambda-2}.\,tt + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.\,2.\,3.\,4} v^{\lambda-4}\,t^4 - \frac{\lambda.\ldots\ldots(\lambda-5)}{1.\ldots\ldots 6} v^{\lambda-6}\,t^6 + \text{etc. et}$$

$$y = \frac{\lambda}{1} v^{\lambda-1}\,t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\,2.\,3} v^{\lambda-3}\,t^3 + \frac{\lambda\ldots\ldots(\lambda-4)}{1.\ldots\ldots 5} v^{\lambda-5}.\,t^5 - \frac{\lambda\ldots\ldots\ldots(\lambda-6)}{1.\ldots\ldots\ldots 7} v^{\lambda-7}.\,t^7.$$

Ex quibus formulis valor quidem ipſius y prodiiſſet mutatis ſignis: verum ex rei natura intelligitur, ambas coordinatas x et y tam negatiue quam poſitiue accipi poſſe.

§. 46. Euidens autem eſt hos valores plurimum diſcrepare ab iis quos ſolutio particularis nobis ſuppeditauit. Hinc autem caſus Mapparum Hydrographicarum, qui in ſuperioribus formulis non continebatur, ſponte ſe prodit ſumendo $\lambda = 1$; tum enim erit $x = ls = l\,\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$ et $y = t$. Supra quidem iſti valores pro x et y erant permutati: verum perſpicuum eſt coordinatas x et y ſemper inter ſe commutari poſſe.

§. 47. Interim tamen certum eſt, omnes valores ſupra inuentos etiam in his formulis contineri debere, quoniam iſta ſolutio manifeſto maxime eſt generalis, quod oſtendiſſe operae erit pretium. Notetur igitur ſi formulo $\Gamma : z$ denotet functiones quamcunque ipſius z, tum eius loco ſemper ſcribi poſſe $\Delta : Z$, exiſtente Z functione quacunque ipſius z. Hoc notato cum ſit $z = ls - t\sqrt{-1}$, pro Z ſumamus $e^{\alpha z}$, ideoque loco $\Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$ ſcribere licebit $\Delta : e^{\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}}$. Eſt vero $e^{\alpha ls} = s^\alpha$; tum vero eſt

$e^{\alpha t\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\alpha t + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t$, vnde fiet

$e^{\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}} = s^\alpha(\text{coſ.}\,\alpha t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t)$.

Quo circa binis huiusmodi formulis coniungendis erit

$$x = \Delta : s^\alpha(\text{coſ.}\,\alpha t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t) + \Delta : s^\alpha(\text{coſ.}\,\alpha t + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t)$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : s^\alpha(\text{coſ.}\,\alpha t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t) - \Delta : s^\alpha(\text{coſ.}\,\alpha t + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t)$$

vbi obſeruaſſe iuuabit, hos binos valores non ſolum per conſtantem quamcunque multiplicari ſed etiam inter ſe permutari poſſe.

§. 48.

§. 48. Consideremus hic casum quo $\Delta : Z = Z$ eritque

$$x = 2 s^{\alpha} \cos. \alpha t \text{ et } y = 2 s^{\alpha} \sin. \alpha t.$$

Quod si hic α negatiue capiamus, valores satisfacientes erunt quoque

$$x = 2 s^{-\alpha} \cos. \alpha t \text{ et } y = -2 s^{-\alpha} \sin. \alpha t.$$

Supra autem iam notauimus, binas solutiones semper ita inter se combinari posse, vt ambae per quantitates constantes quascunque multiplicentur; vnde ex his duabus solutionibus formari poterit ista multo latius patens:

$$x = (\mathfrak{A} s^{\alpha} + \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \cos. \alpha t \text{ et } y = (\mathfrak{A} s^{\alpha} - \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \sin. \alpha t$$

in quibus formalis solutio ante §. 37. data continetur. Euidens autem est formulas hic per functionem Δ exhibitas infinities esse generaliores.

§. 49. Vt hinc etiam solutionem particularem posteriorem eruamus, sumamus

$$Z = \cos. \alpha z = \cos.(\alpha l s - \alpha t \surd -1) = \cos. \alpha l s \cos. \alpha t \surd -1 + \sin. \alpha l s \sin. \alpha t \surd -1:$$

constat autem esse

$$\cos. \alpha t \surd -1 = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \text{ et}$$

$$\sin. \alpha t \surd -1 = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2 \surd -1} \text{ vnde fit}$$

$$Z = \left(\frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}\right) \cos. \alpha l s + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2 \surd -1}\right) \sin. \alpha l s.$$

Nunc igitur characterem Δ praefigendo erit

$$x = \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}) \sin. \alpha l s}{2 \surd -1}\right)$$
$$+ \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\sin. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2 \surd -1}\right) \text{ et}$$

$$y \surd -1 = \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2 \surd -1}\right)$$
$$- \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\sin. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2 \surd -1}\right).$$

Quod

Quod ſi ergo pro $\Delta : Z$ ſumatur ipſum Z erit

$$x = \frac{\text{cof.}\, \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} \text{ et } y\sqrt{-1} = \frac{\text{fin.}\, \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

ſumto autem α negatiuo erit

$$x = \text{cof.}\, \alpha l s (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \text{ et } y\sqrt{-1} = \frac{\text{fin.}\, \alpha l s (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

quae formulae continent ſolutionem caſus poſterioris §. 40. allati.

§. 50. In his igitur formulis generaliſſimis, pro coordinatis x et y inuentis, continentur omnes plane repraeſentationes poſſibiles ſuperficiei ſphaericae, quae in plano ita exhiberi poſſunt, vt Meridiani a Parallelis normaliter traiiciantur et omnes figurae valde exiguae in Sphaera ſumtae per ſimiles figuras in plano exprimantur.

§. 51. In hac ſolutione generaliſſima continetur proiectio ordinaria, qua Hemiſphaeria terreſtria repraeſentari ſolent per circulos, in quorum centro alteruter polus exiſtit. Prodit enim iſta proiectio, ſi in formulis

$$x = s^{\alpha} \text{ cof.}\, \alpha t \text{ et } y = s^{\alpha} \text{ fin.}\, \alpha t$$

ſumatur $\alpha = -1$, vt ſit

$$x = \frac{\text{cof.}\, t}{\text{tang.}\,(45^{\circ} + \frac{1}{2} u)} \text{ et } y = \frac{\text{fin.}\, t}{\text{tang.}\,(45^{\circ} + \frac{1}{2} u)},$$

tum enim pro Polo, vbi $u = 90^{\circ}$, tam x quam y euaneſcunt. Pro Aequatore autem, vbi $u = 0$ et $s = 1$, fit $x = \text{cof.}\, t$ et $y = \text{fin.}\, t$ vnde fit $xx + yy = 1$. Sicque Aequator referetur circulo circa polum deſcripto cuius radius $= 1$. Tum vero longitudine t manente eadem erit $\frac{y}{x} = \text{tang.}\, t$; vnde patet omnes Meridianos eſſe radios circuli. Pro quauis autem latitudine u Paralleli erunt circuli Aequatori concentrici, quorum radii erunt

$$= \frac{1}{s} = \frac{1}{\text{tang.}\,(45^{\circ} + \frac{1}{2} u)} = \text{tang.}\,(45 - \frac{1}{2} u)$$

hoc eſt = tangenti ſemiſſis diſtantiae a polo. Secundum has conditiones etiam Hemiſphaeria talia exhiberi ſolent.

Hypo-

Hypothesis III.

Qua omnes Terrae regiones vera quantitate in plano repraesentatur.

§. 58. Constitutis in genere binis formulis pro dx et dy, quae sint

$$dx = p\,du + q\,dt \text{ et } dy = r\,du + s\,dt$$

primum efficiatur, vt omnes meridiani a parallelis normaliter traiiciantur, id quod euenit si fuerit $\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}$. Statuatur igitur $s = -np$ et $q = +nr$ vt habeamus

$$dx = p\,du + nr\,dt \text{ et } dy = r\,du - np\,dt.$$

Nunc igitur erit elementum $PQ = du\sqrt{pp + rr}$ et elementum Paralleli $PR = ndt\sqrt{pp + rr}$. Hinc igitur area rectanguli $PQRS$ erit $ndudt(pp + rr)$; in Sphaera autem area respondens $pqrs$ est $= dudt\,\text{cos}.\,u$, quae ergo formulae aequales sunt reddendae, vnde fit $n(pp + rr) = \text{cos}.\,u$ ideoque $n = \frac{\text{cos}.\,u}{pp + rr}$, quamobrem pro nostra Hypothesi habebimus has formulas:

$$dx = p\,du + \frac{r\,dt\,\text{cos}.\,u}{pp + rr} \text{ et } dy = r\,du - \frac{p\,dt\,\text{cos}.\,u}{pp + rr}.$$

Quaeri ergo oportet functiones idoneas pro p et r, vt ambae istae formulae fiant integrabiles.

§. 59. Quo hoc facilius effici possit statuamus

$$p = m\,\text{cos}.\,\Phi \text{ et } r = m\,\text{sin}.\,\Phi$$

vt sit $pp + rr = mm$ et habebimus

$$dx = m\,du\,\text{cos}.\,\Phi + \frac{dt\,\text{cos}.\,u\,\text{sin}.\,\Phi}{m} \text{ et}$$

$$dy = m\,du\,\text{sin}.\,\Phi - \frac{dt\,\text{cos}.\,u\,\text{cos}.\,\Phi}{m}.$$

Fiat porro $m = k\,\text{cos}.\,u$ vt consequamur

$$dx = k\,du\,\text{cos}.\,u\,\text{cos}.\,\Phi + \frac{dt\,\text{sin}.\,\Phi}{k} \text{ et}$$

$$dy = k\,du\,\text{cos}.\,u\,\text{sin}.\,\Phi - \frac{dt\,\text{cos}.\,\Phi}{k}.$$

Faciamus denique $d u \operatorname{cof.} u = d v$ vt fit $v = \operatorname{fin.} u$ eritque

$$d x = k d v \operatorname{cof.} \Phi + \frac{d t \operatorname{fin.} \Phi}{k} \text{ et } d y = k d v \operatorname{fin.} \Phi - \frac{d t \operatorname{cof.} \Phi}{k}$$

vbi ergo valores idoneos pro k et Φ inueſtigari oportet.

§. 54. Quoniam nullo adhuc modo patet, quomodo reſolutionem generalem harum formularum inſtitui conueniat, quaeramus ſolutiones particulares. Ac primo quidem ſtatim ſe offert ea ſolutio huius caſus, quam ſupra iam inuenimus (vid. §. 22.) vbi erat $x = t$ et $y = \operatorname{fin.} u$, qui valores prodeunt ex noſtris formulis, ſi ſumatur $k = 1$ et $\Phi = 90^\circ$; hincque patet, etiam generalius ſumi poſſe tam pro k quam Φ quantitates, quascunque conſtantes. Sit igitur $k = a$ et $\Phi = \alpha$, vnde reperietur

$$x = a v \operatorname{cof.} \alpha + \frac{t \operatorname{fin.} \alpha}{a} \text{ et } y = a v \operatorname{fin.} \alpha - \frac{t \operatorname{cof.} \alpha}{a}.$$

Haec autem ſolutio ab illa hoc tantum differt, quod Meridiani non amplius ſint ad noſtrum axem E F normales ſed ſub angulo obliquo inclinantur, qui aequatur ipſi angulo $= \alpha$; Paralleli autem iſtos Meridianos normaliter traiicient eruntque idcirco pariter lineae rectae.

§. 55. Alias autem ſolutiones elicere poterimus, ſi pro altera quantitatum k et Φ tantum functionem ipſius v, pro altera autem ipſius t tantum ſumamus. Sit igitur $k = \mathrm{T}$ et $\Phi = \mathrm{V}$, vt habeamus

$$d x = \mathrm{T}\, d v \operatorname{cof.} \mathrm{V} + \frac{d t}{\mathrm{T}} \operatorname{fin.} \mathrm{V} \text{ et}$$
$$d y = \mathrm{T}\, d v \operatorname{fin.} \mathrm{V} - \frac{d t}{\mathrm{T}} \operatorname{cof.} \mathrm{V}.$$

eliciuntur ſcilicet

$$x = \mathrm{T} \int d v \operatorname{cof.} \mathrm{V} = \operatorname{fin.} \mathrm{V} \int \frac{d t}{\mathrm{T}}$$
$$y = \mathrm{T} \int d v \operatorname{fin.} \mathrm{V} = - \operatorname{cof.} \mathrm{V} \int \frac{d t}{\mathrm{T}}.$$

Hos igitur valores aequales inter ſe reddi oportet.

§. 56. Ex binis valoribus ipſius x deducimus

$$\int \frac{dv \operatorname{cof.} V}{\operatorname{fin.} V} = \int \frac{dt}{T} : T = \alpha \text{ et ex valoribus ipſius } y$$

$$\int \frac{dv \operatorname{fin.} V}{\operatorname{cof.} V} = -\int \frac{dt}{T} : T = \beta$$

vnde pro functione t iſtae aequalitates prodeunt

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T \text{ et } \int \frac{dt}{T} = -\beta T$$

vbi ſtatim patet eſſe debere $\beta = -\alpha$; tum vero differentiando fit $\frac{dt}{T} = \alpha dT$ ideoque $T = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}$. Pro V autem habebimus $\int dv \operatorname{cof.} V = \alpha \operatorname{fin.} V$ et $\int dv \operatorname{fin.} V = -\alpha \operatorname{cof.} V$; quae ambae differentiatae praebent $dv = \alpha dV$, ita vt ſit $V = \frac{v}{\alpha}$, ſiue conſtantem adiiciendo $V = \frac{v+c}{\alpha}$.

§. 57. His iam valoribus inuentis ob

$$\int dv \operatorname{cof.} V = \alpha \operatorname{fin.} V = \alpha \operatorname{fin.} \frac{v+c}{\alpha} \text{ et}$$

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T = \sqrt{2 \alpha t}$$

ambae coordinatae ita reperiuntur expreſſae:

$$x = \operatorname{fin.} \frac{v+c}{\alpha} \sqrt{2 \alpha t} \text{ et } y = -\operatorname{cof.} \frac{v+c}{\alpha} \sqrt{2 \alpha t}.$$

Hinc ſtatim colligimus $\sqrt{xx+yy} = \sqrt{2 \alpha t}$; ex quo manifeſtum eſt, pro locis, quibus eadem longitudo t conuenit, ea ſita fore in peripheria circuli cuius radius $= \sqrt{2 \alpha t}$; quam ob rem in hac repraeſentatione omnes Meridiani exprimentur per circulos concentricos, atque adeo Meridianus primus, vbi $t = 0$, totus in centro circulorum coaleſcit; ex quo iam maſeſtum eſt, omnes circulos parallelos hic per radios circuli referri. Talis autem repraeſentatio ſine dubio maxime foret abſurda, etiamſi conditiones praeſcriptas adimpleat.

§. 58. Sumatur nunc pro k functio ipſius v, quae ſit V; angulus vero Φ ſtatuatur aequalis functioni ipſius t, quae ſit $=T$, et habebimus

$$dx = V dv \operatorname{cof.} T + \frac{dt \operatorname{fin.} T}{V} \text{ et } dy = V dv \operatorname{fin.} T - \frac{dt \operatorname{cof.} T}{V}$$

 vnde

vnde bini valores pro x et y reſultantes fiunt

$x = \text{coſ.}\,T \int V\,dv + \frac{1}{V}\int dt\,\text{ſin.}\,T$ et $y = \text{ſin.}\,T \int V\,dv - \frac{1}{V}\int dt\,\text{coſ.}\,T$.

Ex his igitur valoribus ſequentes ſtatuantur aequalitates

$$V\int V\,dv = \int \frac{dt\,\text{ſin.}\,T}{\text{coſ.}\,T} = \alpha \quad \text{et} \quad -V\int V\,dv = \int \frac{dt\,\text{coſ.}\,T}{\text{ſin.}\,T}.$$

Ex valoribus ipſius V ſtatim fit $\beta = \alpha$; tum vero differentiando fit $V\,dv = -\frac{\alpha\,dV}{VV}$, vnde fit $dv = -\frac{\alpha\,dV}{V^3}$ et integrando $v + c = \frac{\alpha}{2VV}$, hincque $V = \sqrt{-\frac{\alpha}{2(v+c)}}$. Pro functione T autem erit

$$\int dt\,\text{ſin.}\,T = \alpha\,\text{coſ.}\,T \quad \text{et} \quad -\int dt\,\text{coſ.}\,T = \alpha\,\text{ſin.}\,T$$

ex quarum differentiatione ſequitur $dT = -\frac{dt}{\alpha}$ ergo $T = -\frac{t}{\alpha}$.

§. 59. His valoribus inuentis ob $\int V\,dv = \sqrt{2\alpha(v+c)}$, erit $x = \sqrt{2\alpha(v+c)}\,\text{coſ.}\,\frac{t}{\alpha}$ et $y = -\sqrt{2\alpha(v+c)}\,\text{ſin.}\,\frac{t}{\alpha}$. Hinc fit primo $\frac{y}{x} = -\text{tang.}\,\frac{t}{\alpha}$ et $xx + yy = 2\alpha(v+c)$. Ex priore formula patet, pro eadem longitudine t omnes Meridianos per rectas ex puncto fixo tanquam radios eductas repraeſentari: ex altera autem patet, omnes Parallelos per circulos concentricos expreſſum iri. Hoc igitur modo hemiſphaeria Terrae perquam apte per circulos repraeſentari poterunt, dum polus in centro exiſtit; vbi adeo figura cuiusque regionis non multum a veritate abludet, quam ob cauſſam facile erit veram cuiusque regionis magnitudinem dimetiri.

§. 60. In his autem tribus Hypotheſibus omnia continentur, quae circa repraeſentationes tam geographicas quam hydrographicas deſiderari ſolent; atque adeo ſecunda Hypotheſis ſupra tractata omnes plane modos poſſibiles in ſe complectitur. Ob ſummam autem vniuerſalitatem minus facile eſt methodos vſu receptas ex formulis noſtris generalibus elicere. Neque vero inſtitutum praeſens permittit vt huic negotio immoremur, praecipue cum conſuetae proiectiones ab aliis iam abunde ſint explicata.

DE

DE PROIECTIONE GEOGRAPHICA SVPERFICIEI SPHAERICAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum in superiori dissertatione omnes plane modos possibiles expendissem, quibus superficies sphaerica in plano ita repraesentari potest, vt singulae portiones minimae per figuras similes exhibeantur: inde quidem statim mapparum hydrographicarum *Mercatoris* constructio pariter atque Hemisphaeriorum polarium se prodebat; quemadmodum autem ambo Hemisphaeria, superius scilicet et inferius, vti quidem hodie construi solent cum meis formulis cohaereant, vix patebat, cum tamen ista repraesentatio eadem proprietate sit praedita. Hanc obrem accuratius inquirere constitui, quomodo etiam hic repraesentandi modus cum formulis generalibus ibi datis egregie consentiat, ex iisque luculenter deriuari queat.

§. 2. Formulae autem generales, quas pro huiusmodi constructionibus erueram ita se habent, vt si loci cuiuspiam in Sphaera distantia a polo fuerit $=v$ eiusque longitudo a certo Meridiano fixe computata $=t$, id punctum in plano per binas coordinatas orthogonales x et y ita determinari debeat, vt sit

$$x=\Delta:(l(\cot.\tfrac{1}{2}v+t\sqrt{-1}))+\Delta:(l(\cot.\tfrac{1}{2}v-t\sqrt{-1}))$$

$$y\sqrt{-1}=\Delta:(l(\cot.\tfrac{1}{2}v+t\sqrt{-1}))-\Delta:(l(\cot.\tfrac{1}{2}v-t\sqrt{-1}))$$

quas formulas quoque ita exhibere licet, vt sit

$$x=\Delta(\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos.t+\sqrt{-1}\sin.t)+\Delta(\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos.t-\sqrt{-1}\sin.t)$$

et cum sit

$$\frac{1}{\cot.\frac{1}{2}v(\cos.t\pm\sqrt{-1}\sin.t)}=\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t\mp\sqrt{-1}\sin.t)$$

hae formulae etiam ita exhiberi possunt:

$$x=\Delta:(\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t+\sqrt{-1}\sin.t))+\Delta:(\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t-\sqrt{-1}\sin.t))$$

$$y\sqrt{-1}=\Delta:(\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t+\sqrt{-1}\sin.t))-\Delta:(\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t-\sqrt{-1}\sin.t))$$

vbi manifestum est, ex prioribus formulis, si character indefinitus functionis Δ omittatur, priores formulas praebere mappas hydrographicas, postremas vero constructionem Haemisphaerii siue borealis siue australis.

§. 3. Quo nunc facilius appareat, quomodo etiam reliquae proiectiones eidem principio innixae ex nostris formulis deduci queant, rationem istius proiectionis, quae vulgo stereographica vocari solet hic accuratius euoluam. Hoc autem modo superficies Sphaerae in planum Sphaeram tangens ita proieci solet, quemadmodum a spectatore in puncto contactui opposito constituto secundum regulas Perspectiuae cerneretur.
Tab. I. Fig. 5. Referat igitur circulus AMC Sphaeram, recta autem EF planum, quod Sphaeram in puncto C tangat; tum vero A sit punctum ipsi C oppositum in quo spectator sit constitutus. Iam sumto in Sphaera puncto quocunque M, si per id ex A producatur recta AMS, rectae EF occurrens in puncto F, erit S proiectio puncti M. Hinc si radius sphaerae ponatur $= 1$, vt sit diameter $AC = 2$, arcus vero CM statuatur $= z$, erit angulus $CAM = \frac{1}{2}z$, vnde fit interuallum

$$CS = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2}z = \frac{2 \sin. z}{1 + \cos. z} = 2\sqrt{\frac{1 + \cos. z}{1 - \cos. z}}.$$

§. 4. Si ad AC ex M ducatur normalis MP erit $MP = \sin. z$, ac si circulus circa axem AC conuerti concipiatur, punctum M describet circulum plano tangenti parallelum, cuius radius $= MP = \sin. z$, qui ergo super plano itidem circulo referetur, cuius radius $= CS = \text{tag. } \frac{1}{2}z$, ita vt radius istius circuli in sphaera se habeat ad radium proiectionis, vt PM ad CS, hoc est vt AP : AC vel vt AM ad AS. Anguli autem in circulo sphaerae radio CM descripto aequales erunt angulis in proiectione super plano.

§. 5. Nunc in sphaera concipiamus punctum m, ipsi M proximum, cui in proiectione respondeat punctum s, ita vt elemen-

elementum Mm exprimatur per ſpatiolum S s, et quaeramus rationem inter haec duo elementa Mm et Ss. Ac primo quidem patet fore angulum $ASC = 90° - \frac{1}{2}z = AsC$. At vero anguli AM$m$ menſura eſt ſemiſſis arcus AM, vnde erit angulus $AMm = 90° - \frac{1}{2}z$ ideoque aequalis angulo AsC; vnde ſequitur triangulum $AMm \sim$ triangulo AsS, vnde erit $Mm : Ss = AM : AS$ hoc eſt $= AP : AC$; quae ergo ratio conuenit cum ea, quam inuenimus inter circulum in ſphaera radio PM deſcriptum et circulum in plano radio CS deſcriptum; quamobrem haec ratio etiam aequalis erit ei, quam elementa ſimilia in duobis his circulis inter ſe tenent. Atque hinc manifeſtum eſt, ſi in ſphaera portio infinite parua circa elementum Mm deſcripta concipiatur, eius proiectionem ipſi fore ſimilem, ita vt haec proiectio eidem legi ſit adſtricta, ex qua meas formulus generales elicueram.

§. 6. Referat vt ante circulus AGC ſphaeram, cuius ſuperficies proiicienda ſit in planum EF, quod ſphaeram in puncto C tangat, ac ſtatuamus nunc alterum Terrae polum exiſtere in puncto G. Vocemus arcum $CG = g$ et per praecedentia iſte polus in plano exhibebitur in puncto H, vt ſit $GH = 2\,\text{tag.}\,\frac{1}{2}g$. Iam vero conſideremus punctum ſphaerae quodcunque in M cuius diſtantia a polo ſit $GM = v$, angulus vero $CGM = t$, qui ergo denotabit longitudinem loci M in Meridiano GC, atque ad triangulum ſphaericum complendum ducatur arcus CM; quo facto, ſi in proiectione S ſit punctum loco M reſpondens, erit $CS = 2\,\text{tag.}\,\frac{1}{2}\,CM$, angulus vero $ECS =$ angulo GCM. Ad locum igitur huius puncti S definiendum in triangulo ſphaerico GCM quaeri oportet tam latus CM quam angulus GCM. Tab. I. Fig. 6.

§. 7. In triangulo autem ſphaerico CGM dantur duo latera $CG = g$ et $GM = v$ cum angulo intercepto $CGM = t$, vnde per regulas Trigonometriae ſphericae reperitur

$$\text{coſ.}\,CM = \text{coſ.}\,g.\,\text{coſ.}\,v + \text{ſin.}\,g\,\text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,t$$

vnde

vnde cum sit

$$CS = 2\,\text{tag.}\,\tfrac{1}{2}CM = \frac{2\,\text{fin.}\,CM}{1+\text{cof.}\,CM} = 2\sqrt{\frac{1-\text{cof.}\,CM}{1+\text{cof.}\,CM}}$$

ex postrema formula statim habemus

$$CS = 2\sqrt{\frac{1-\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v-\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}{1+\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v+\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}}.$$

Praeterea vero reperitur $\text{tag.}\,GCM = \frac{\text{fin.}\,v\,\text{fin.}\,t}{\text{cof.}\,v\,\text{fin.}\,g-\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,t}$, quae ergo formula simul exprimit in proiectione tangentem anguli ECS.

§. 8. Nunc in proiectione ex puncto S ad rectam fixam EF, quippe in quam cadit polus H, ducamus perpendiculum SX, ac vocemus coordinatas $CX = x$ et $XS = y$; et cum sit

$$CS = \frac{2\,\text{fin.}\,CM}{1+\text{cof.}\,CM} \text{ erit } x = \frac{2\,\text{fin.}\,CM\,\text{cof.}\,GCM}{1+\text{cof.}\,CM} \text{ et } y = \frac{2\,\text{fin.}\,CM\,\text{fin.}\,GCM}{1+\text{cof.}\,CM},$$

vnde patet fore

$$\frac{y}{x} = \text{tag.}\,GCM = \frac{\text{fin.}\,v\,\text{fin.}\,t}{\text{cof.}\,v\,\text{fin.}\,g-\text{cof.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}.$$

Praeterea vero ex iam inuentis erit

$$xx+yy = CS^2 = \frac{4(1-\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v-\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t)}{1+\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v+\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}$$

ex quibus duabus aequationibus ambas coordinatas x et y seorsim definire licebit.

§. 9. Facilius autem earum valores directe sequenti modo reperire licebit. Cum sit

$\text{fin.}\,t : \text{fin.}\,CM = \text{fin.}\,GCM : \text{fin.}\,v$ erit

$\text{fin.}\,CM.\,\text{fin.}\,GCM = \text{fin.}\,t\,\text{fin.}\,v$,

quo valore introducto fiet

$$\text{tag.}\,GCM = \frac{\text{fin.}\,CM.\,\text{fin.}\,GCM}{\text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,v-\text{cof.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t} = \frac{\text{fin.}\,GCM}{\text{cof.}\,GCM}$$

vnde fit $\text{fin.}\,CM\,\text{cof.}\,GCM = \text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,v - \text{cof.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t$ ex quibus valoribus statim colligimus

$$x = \frac{2(\text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,v-\text{cof.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t)}{1+\text{cof.}\,CM} \text{ et } y = \frac{2\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}\,v}{1+\text{cof.}\,CM}.$$

Quia igitur inuenimus $\text{cof.}\,CM = \text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v + \text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t$ binas coordinatas x et y ita habebimus expressas

$$x = \frac{2(\text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,v-\text{cof.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t)}{1+\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v+\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t} \text{ et } y = \frac{2\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}\,v}{1+\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v+\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}.$$

§. 10.

§. 10. Quod si ergo hic ponamus $v = 0$, locus poli H in proiectione prodire debet; tum autem reperietur

$$x = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} = 2 \text{ tag.} \tfrac{1}{2} g = \text{CH}.$$

At vero fit $y = 0$. Hinc igitur etiam locum alterius poli in proiectione assignare poterimus, ponendo $v = 180°$; tum autem reperietur $x = -\frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$ et $y = 0$. Vnde si ex altera parte alter polus statuatur in K, erit interuallum

$$\text{CK} = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g} = 2 \cot. \tfrac{1}{2} g.$$

Tum vero si capiamus $\text{CE} = \text{CF} = 2$, erit EF diameter circuli, quo referetur Hemisphaerium totum circa centrum C descriptum, cuius ergo diameter erit $\text{EF} = 4$, hoc est duplo maior quam diameter sphaerae.

§. 11. Vt nunc in hac proiectione Aequatorem designemus, sumamus $v = 90°$, atque x et y fient coordinatae Aequatoris in proiectione; tum autem erit

$$x = -\frac{2 \cos. g}{1 + \sin. g \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t}{1 + \sin. g \cos. t}.$$

Supra autem iam vidimus esse $xx + yy = \frac{4(1 - \sin. g \cos. t)}{1 + \sin. g \cos. t}$, hinc concludimus fore

$$\frac{x}{xx + yy} = -\frac{\cos. g}{2(1 - \sin. g \cos. t)}, \text{ vnde fit } \cos. t = \frac{2x}{2x \sin. g - (xx + yy) \cos. g}$$

qui valor substitutus in aequatione pro x praebet

$$4x \sin. g - (xx + yy) \cos. g = -4 \cos. g$$

vnde fit $xx + yy = \frac{4(x \sin. g + \cos. g)}{\cos. g}$, vnde colligimus hanc aequationem: $yy + (2 \text{ tag.} g - x)^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$. Hinc patet, Aequatorem in proiectione fore circulum radio $= \frac{2}{\cos. g}$ descriptum. Ad centrum autem huius circuli inueniendum capiatur interuallum $\text{CI} = 2 \text{ tag.} g$, vt fiat $\text{IX} = 2 \text{ tag.} g - x$, et cum fieri debeat $\text{XS}^2 + \text{IX}^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$, patet fore $\text{IS} = \frac{2}{\cos. g}$ hoc est quantitati constanti. Erit ergo hoc ipsum punctum I centrum circuli Aequatorem referentis, existente $\text{CI} = 2 \text{ tag.} g$. Quare ex

Tab. I. Fig. 6.

C erigatur perpendiculum $CD = 2$, et cum hinc fiat recta $ID = \frac{2}{cos.\, g}$, patet Aequatorem descriptum iri, si ex centro I et radio ID circulus delineetur.

§. 12. Definiamus nunc quoque omnes circulos Aequatori parallelos in nostra proiectione, atque vt calculos taediosos euitemus statuamus breuitatis gratia $a = 2\, sin.\, g\, cos.\, \alpha$, $b = 2\, cos.\, g\, sin.\, \alpha$, $c = 1 + cos.\, g\, cos.\, \alpha$ et $d = sin.\, g\, sin.\, \alpha$ et $e = 4 - 4\, cos.\, g\, cos.\, \alpha$, vbi α scripsimus loco v, vt distantia Paralleli a polo sit $= \alpha$, quo facto nostrae aequationes ita se habebunt: $x = \frac{a - b\, cos.\, t}{c + d\, cos.\, t}$ et $xx + yy = \frac{e - 4\, d\, cos.\, t}{c + d\, cos.\, t}$, ex quarum priore colligitur $cos.\, t = \frac{a - cx}{b + dx}$, qui valor in altera substitutus praebet $xx + yy = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + ad}$. Restitutis vero valoribus assumtis erit $xx + yy = \frac{4(x\, sin.\, g + cos.\, g - cos.\, \alpha)}{cos.\, g + cos.\, \alpha}$, quae aequatio reducta ad hanc formam

$$yy + \left(\frac{2\, sin.\, g}{cos.\, g + cos.\, \alpha} - x\right)^2 = \frac{4\, sin.\, \alpha^2}{(cos.\, g + cos.\, \alpha)^2}$$

monstrat, proiectionem Paralleli propositi esse circulum, cuius radius $= \frac{2\, sin.\, \alpha}{cos.\, g + cos.\, \alpha}$, centrum autem in ipso axe EF esse situm puta in puncto L ita vt sit $CL = \frac{2\, sin.\, g}{cos.\, g + cos.\, \alpha}$.

§. 13. Inuestigemus nunc etiam proiectionem omnium
Tab. I. Meridianorum; ac primo quidem cum sumto $t = 0$ ipsa recta
Fig. 6. HK referet Meridianum principalem, a quo reliquos computemus, ponamus declinationem Meridiani quaesiti ab hoc principali esse $= \beta$, vt sit $t = \beta$, et aequationes nostrae erunt

$$x = \frac{2(sin.\, g\, cos.\, v - cos.\, \beta\, cos.\, g\, sin.\, v)}{1 + cos.\, g\, cos.\, v + cos.\, \beta\, sin.\, g\, sin.\, v}$$

$$y = \frac{2\, sin.\, \beta\, sin.\, v}{1 + cos.\, g\, cos.\, v + cos.\, \beta\, sin.\, g\, sin.\, v} \text{ et}$$

$$xx + yy = \frac{4(1 - cos.\, g\, cos.\, v - cos.\, \beta\, sin.\, g\, sin.\, v)}{1 + cos.\, g\, cos.\, v + cos.\, \beta\, sin.\, g\, sin.\, v}$$

ex quibus aequationibus quantitatem v eliminare oportet. Hunc in finem consideremus formulam

$$\frac{y}{x} = \frac{sin.\, \beta\, sin.\, v}{sin.\, g\, cos.\, v - cos.\, \beta\, cos.\, g\, sin.\, v} = \frac{sin.\, \beta\, tang.\, v}{sin.\, g - cos.\, \beta\, cos.\, g\, tang.\, v}$$

ex qua colligitur $tang.\, v = \frac{y\, sin.\, g}{y\, cos.\, \beta\, cos.\, g + x\, tang.\, \beta}$.

§. 14.

§. 14. Quo nunc facilius hoc valore in reliquis aequationibus vti queamus, formemus hanc aequationem:

$$4 - xx - yy = \frac{8 \cos. g \cos. v + 8 \cos. \beta \sin. g \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

quae per y diuisa praebet

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4 \cos. g \cos. v + 4 \cos. \beta \sin. g \sin. v}{\sin. \beta \sin. v} = \frac{4 \cos. g + 4 \cos. \beta \sin. g \tang. v}{\sin. \beta \tang. v}$$

in qua loco tang. v valorem ante inuentum scribamus, vnde fiet

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4 y \cos. \beta + 4 x \sin. \beta \cos. g}{y \sin. \beta \sin. g}$$

ex qua deducimus

$$xx + yy = 4 - \frac{4 y \cos. \beta - 4 x \sin. \beta \cos. g}{\sin. \beta \sin. g}$$

quae aequatio itidem est pro circulo; vnde tuto concludere possumus, omnes circulos maximos in sphaera ductos etiam per arcus circulares exprimi, vel adeo per lineas rectas.

§. 15. Quo nunc tam centrum quam radium cuiusque Meridiani pro nostra proiectione assignemus, aequationem inventam in hanc formam transfundamus: Tab. I. Fig. 8.

$$\left(\frac{2 \cos. g}{\sin. g} + x\right)^2 + \left(\frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g} + y\right)^2 = \frac{4}{\sin. \beta^2 \sin. g^2}.$$

Sint igitur puncta H et K poli in proiectione, ita vt sit

$$CH = 2 \tang. \tfrac{1}{2} g = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} \text{ et } CK = 2 \cot. \tfrac{1}{2} g = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$$

ideoque totum interuallum $HK = \frac{4}{\sin. g}$ eiusque semissis $= \frac{2}{\sin. g}$ quod medium in punctum O incidat, eritque $CO = \frac{2 \cos. g}{\sin. g}$; hinc sumto $CX = x$ erit $OX = \frac{2 \cos. g}{\sin. g} + x$. Ex O erigatur perpendiculum $= \frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g}$, sumtaque XL ipsi ON aequali erit $LS = \frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g} + y$, quocirca esse oportet OX^2 (siue LN^2) $+ LS^2 = NS^2 = \frac{4}{\sin. \beta^2 \sin. g^2}$, ideoque $NS = \frac{2}{\sin. \beta \sin. g}$. Vnde patet, punctum N esse centrum Meridiani describendi, radium vero $= \frac{2}{\sin. \beta \sin. g}$, qui radius praecise aequalis erit rectae NH, quod egregie cum natura rei conuenit; quandoquidem omnes Meridiani etiam in proiectione per polos N et H transire debent.

 Com-

Comparatio huius proiectionis cum formulis generalibus.

§. 16. Hic igitur quaeritur, cuius modi forma functioni Δ tribui debeat, vt proiectio modo descripta inde sequatur. Ac primo patet, potestates prima altiores in ea occurrere non posse, quia alioquin multipla angulorum t et v ingrederentur; deinde vero haec functio debebit esse fractio, quoniam formulae pro x et y inuentae sunt fractiones. Hanc ob caussam functioni $\Delta : z$ talem formam generalem tribuamus $\frac{a+bz}{c+dz}$: at vero pro z sumamus formam postremam supra expositam, qua erat $z = \text{tang.} \frac{1}{2} v (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)$

ita vt nostra functio euadat

$$\frac{a + b\, \text{tang.} \frac{1}{2} v (\text{cos.}\, t + \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}{c + d\, \text{tang.} \frac{1}{2} v (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}$$

quae, loco tang. $\frac{1}{2} v$ scribendo $\frac{\text{sin.}\, v}{1 + \text{cos.}\, v}$ induet hanc formam:

$$\frac{a(1 + \text{cos.}\, v) + b\, \text{sin.}\, v (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}{c(1 + \text{cos.}\, v) + d\, \text{sin.}\, v (\text{cos.}\, t \pm \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, t)}.$$

§. 17. Pro calculi commodo loco huius formae vtamur hac concinniore: $\frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{R \pm S\sqrt{-1}}$ vt sit

$$P = a(1 + \text{cos.}\, v) + b\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t;\quad Q = b\, \text{sin.}\, v\, \text{sin.}\, t$$

$$R = c(1 + \text{cos.}\, v) + d\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t;\quad S = d\, \text{sin.}\, v\, \text{sin.}\, t$$

Hinc autem coordinatae x et y ita prodibunt determinatae:

$$x = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} + \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}} \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} - \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}}$$

vnde colligimus

$$x = \frac{2PR + 2QS}{RR + SS} \text{ et } y = \frac{2QR - 2PS}{RR + SS}.$$

§. 18. Quod si iam loco P, Q, R, S valores assumtos restituamus, pro denominatore communi reperiemus

$$RR + SS = cc(1 + \text{cos.}\, v)^2 + 2cd(1 + \text{cos.}\, v)\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t + dd\, \text{sin.}\, v^2$$
$$= (1 + \text{cos.}\, v)(cc(1 + \text{cos.}\, v) + 2cd\, \text{sin.}\, v\, \text{cos.}\, t + dd(1 - \text{cos.}\, v)).$$

Tum

Tum vero pro numeratore ipſius x fiet

$$PR + QS = (1 + \text{cof.}\, v)(ac(1 + \text{cof.}\, v) + (bc + ad)\,\text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t + bd(1 - \text{cof.}\, v)).$$

denique pro numeratore ipſius y

$$QR - PS = (1 + \text{cof.}\, v)(bc - ad)\,\text{fin.}\, v\, \text{fin.}\, t$$

ſicque pro coordinatis nanciſcimur has expreſſiones:

$$x = \frac{2ac(1 + \text{cof.}\, v) + 2(bc + ad)\,\text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t + 2bd(1 - \text{cof.}\, v)}{cc(1 + \text{cof.}\, v) + 2cd\,\text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t + dd(1 - \text{cof.}\, v)}$$

$$y = \frac{2(bc - ad)\,\text{fin.}\, v\, \text{fin.}\, t}{cc(1 + \text{cof.}\, v) + 2cd\,\text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t + dd(1 - \text{cof.}\, v)}.$$

§. 19. Quod ſi iam has formulas cum iis comparemus, quas ſupra inuenimus, quae erant

$$x = \frac{2\,\text{fin.}\, g\, \text{cof.}\, v - 2\,\text{cof.}\, g\, \text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t}{1 + \text{cof.}\, g\, \text{cof.}\, v + \text{fin.}\, g\, \text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t} \text{ et } y = \frac{2\,\text{fin.}\, t\, \text{fin.}\, v}{1 + \text{cof.}\, g\, \text{cof.}\, v + \text{fin.}\, g\, \text{fin.}\, v\, \text{cof.}\, t}$$

egregium iam conſenſum deprehendimus: at facile erit conſtantes a, b, c, d ita aſſumere, vt conſenſus fiat perfectus. Primo igitur vt denominatorem ad identitatem perducamus, requiritur, vt ſit $cc + dd = 1$, $cc - dd = \text{cof.}\, g$ et $2cd = \text{fin.}\, g$. Ex duabus prioribus fit

$$cc = \frac{1 + \text{cof.}\, g}{2} = \text{cof.}\, \tfrac{1}{2} g^2 \text{ et } dd = \frac{1 - \text{cof.}\, g}{2} = \text{fin.}\, \tfrac{1}{2} g^2$$

vnde fit $c = \text{cof.}\, \frac{1}{2} g$ et $d = \text{fin.}\, \frac{1}{2} g$, quibus valoribus iam tertiae conditioni ſatisfit; fiet enim

$$2cd = 2\,\text{fin.}\, \tfrac{1}{2} g\, \text{cof.}\, \tfrac{1}{2} g = \text{fin.}\, g.$$

Pro numeratore ipſius x perfectus conſenſus poſtulat, vt fiat

$$ac + bd = 0,\quad ac - bd = \text{fin.}\, g,\quad bc + ad = -\text{cof.}\, g$$

vbi ſi loco c et d valores modo inuentos ſcribamus, fiet

$$a\,\text{cof.}\, \tfrac{1}{2} g + b\,\text{fin.}\, \tfrac{1}{2} g = 0,\quad a\,\text{cof.}\, \tfrac{1}{2} g - b\,\text{fin.}\, \tfrac{1}{2} = \text{fin.}\, g,$$
$$b\,\text{cof.}\, \tfrac{1}{2} g + a\,\text{fin.}\, \tfrac{1}{2} g = -\text{cof.}\, g.$$

Ex binis prioribus fit

$$a = \frac{\text{fin.}\, g}{2\,\text{cof.}\, \frac{1}{2} g} = \text{fin.}\, \tfrac{1}{2} g, \text{ porro } b = -\frac{2\,\text{fin.}\, g}{2\,\text{fin.}\, \frac{1}{2} g} = -\text{cof.}\, \tfrac{1}{2} g$$

hisque valoribus etiam tertiae conditioni ſponte ſatisfit. Tantum

 igi-

igitur superest, vt etiam videamus, an isti valores cum numeratore ipsius y conueniant, quo requiritur, vt sit $bc - ad = 1$; est vero $bc = -\text{cos}.\frac{1}{2}g^2$ et $ad = \text{sin}.\frac{1}{2}g^2$ vnde fit $bc - ad = -1$. Probe autem notandum est, ambas coordinatas tam positiue quam negatiue sumi posse, ita vt hic perfecta identitas agnosci debeat.

§. 20. His valoribus inuentis manifestum est, formulas nostras generales perducturas fuisse ad hanc proiectionem stereographicam, si pro functione $\Delta : z$ assumsissemus statim hanc formam:

$$\frac{\text{sin}.\frac{1}{2}g - z\,\text{cos}.\frac{1}{2}g}{\text{cos}.\frac{1}{2}g + z\,\text{sin}.\frac{1}{2}g} \quad \text{siue} \quad \frac{\text{tang}.\frac{1}{2}g - z}{1 + z\,\text{tang}.\frac{1}{2}g}.$$

Ceterum hic obseruari conueniet, istum casum ad vsus practicos, quos in Geographia postulamus maxime esse accommodatum, quandoquidem veram figuram regionum terrestrium non admodum detorquet. Imprimis autem notari meretur, quod in hac proiectione non solum omnes Meridiani et Paralleli circulis vel adeo lineis rectis exhibeantur, sed etiam omnes circuli maximi in Sphaera descripti etiam per arcus circulares vel adeo lineas rectas exprimantur, dum e contrario aliae Hypotheses, quae pro functione Δ fingi possent, his commodis penitus essent cariturae.

DE

DE PROIECTIONE GEOGRAPHICA DE LISLIANA IN MAPPA GENERALI IMPERII RVSSICI VSITATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim deliberaretur, quanam proiectionis ratione in construenda mappa generali Imperii Russici esset vtendum, primo quidem statim se obtulit proiectio Stereographica, qua ambo Hemisphaeria terrestria, superius scilicet et inferius, repraesentari solent; quoniam hoc modo non solum omnes circuli paralleli a Meridianis normaliter traiicerentur, sed etiam omnes exiguae portiones ad similitudinem in superficie sphaerica exhiberentur. Atque hac proiectionis ratione tum temporis etiam vsus est Geographus praestantissimus et Professor Wittenbergensis *Hasius* in mappa generali huius Imperii exaranda.

§. 2. Verum in hac proiectione mox duo insignia incommoda sunt obseruata, quae scopo proposito maxime aduersabantur. Primo enim in Meridiano medio gradus latitudinis nimis sunt inaequales, dum prope Aequatorem duplo sunt minores quam circa polos; vnde hoc ingens incommodum nascebatur, vt pro regionibus circa oras huius mappae sitis scala milliarium multo maior euadat quam pro regionibus in medio mappae exhibitis, vnde mappam aspicienti Prouincia verbi gratia Kamtschatka fere quadruplo maior esset apparitura, quam Prouincia eiusdem magnitudinis in medio eiusdem mappae repraе-

praeſentata. In conſtructione autem talis mappae id ante omnia neceſſarium videbatur, vt regiones eiusdem magnitudinis etiam pari quantitate exprimerentur, in quocunque mappae loco fuerint collocandae.

§. 3. Alterum autem incommodum in eo deprehendebatur, quod in hac proiectione Meridiani a medio verſus oras progrediendo continuo magis incuruentur, atque adeo extremi per ſemicirculos referrentur. Ita v. gr. in Prouincia Kamtſchatka omnes Meridiani forent arcus circulares ſatis notabiliter incuruati; vnde ſi quis hanc portionem ex mappa generali exſcinderet, aut delinearet, vt chartam ſpecialem iſtius Prouinciae adipiſceretur, ea maxime incongrua, et legibus, quae in conſtruendis chartis geographicis obſeruari ſolent maximi foret contraria. Id autem potiſſimum erat propoſitum, vt ex mappa generali omnes mappae ſpeciales ſola delineatione ſine vlla vlteriori reductione deſcribi poſſent et formam vſu receptam obtinerent.

§. 4. Repudiata igitur hac proiectionis ratione examini ſubiiciebatur ea ratio, qua Hemiſphaeria polaria vulgo repraeſentari ſolent; verum, quanquam hic omnes Meridiani per lineas rectas in polo concurrentes exprimuntur, quo pacto alterum incommodum euitaretur: tamen, quia in omnibus Meridianis ſinguli gradus latitudinis nimis ſunt inter ſe inaequales, dum circa polos duplo ſunt minores quam prope Aequatorem, etiam haec proiectio reiicienda eſt viſa; quandoquidem hoc inprimis poſtulabatur, vt per totam mappam vbique eadem ſcala milliarium locum habere et vera magnitudo ſingularum Prouinciarum ex aſpectu chartae geographicae rite diiudicari poſſet.

§. 5. De alia igitur proiectionis ratione erat cogitandum, quae primo omnes Meridianos per lineas rectas exhiberet, in quibus etiam omnes gradus latitudinis eandem quantitatem obtinerent; tum vero vt omnes Paralleli Meridianos ad angulos rectos traiicerent. Quoniam vero hoc modo neutiquam fieri

fieri poteſt, vt vbique gradus Parallelorum ad gradus Meridianorum iuſtam teneant rationem, quae ſcilicet in ſuperficie ſphaerica deprehenditur, conſultum viſum eſt, ab iſta ratione potius aliquantillum aberrare, quam memoratis commodis renunciare. Hinc igitur ſequens quaeſtio maximi momenti eſt nata: quomodo Meridiani cum Parallelis conſtitui debeant, vt a vera ratione, quam gradus longitudinis et latitudinis in Sphaera inter ſe tenent, per totam mappae extenſionem quam minime aberretur? ita ſcilicet, vt errores vix percipi poſſent, quandoquidem talis aberratio facile condonari poterit, ſi modo memorata commoda obtineantur.

§. 6. Huic requiſito celeberrimus tum temporis Aſtronomus et Geographus *Deliſle*, cui cura talis mappae generalis primum erat demandata, ita ſatisfacere eſt annıſus, vt pro duobus Parallelis notabilioribus iuſtam proportionem inter gradus longitudinis et latitudinis ſtabiliret, qui ſi paribus interuallis tam a Parallelo medio totius mappae quam ab extremis diſtarent, iudicauit, aberrationem nusquam notabilem eſſe poſſe. Hic igitur quaeritur, quinam bini paralleli in hunc finem eligi debeant, vt etiam maximi errores inde oriundi fiant omnium minimi.

§. 7. Sit igitur A B portio Meridiani cuiusque per Imperium Ruſſicum tranſeuntis, cuius terminus maxime meridionalis ſit in A, borealis vero in B, ac ponatur latitudo in $A = a$, in B vero $= b$, ita vt propemodum ſit $a = 40°$ et $b = 70°$; tum vero deſignet δ quantitatem vnius gradus in omnibus Meridianis. Sint porro puncta P et Q ea loca, vbi gradus longitudinis ad gradus latitudinis iuſtam tenere debeant rationem, ac ponatur pro puncto P latitudo $= p$, pro loco Q vero latitudo $= q$. Quoniam ergo gradus cuiusque Paralleli in ſphaera ſe habent ad gradus Meridiani, vt coſinus latitudinis ad ſinum totum, pro loco P ſumi debet gradus longitudinis $Pp = \delta \cos. p$ et pro loco Q vnus gradus longitudinis $Qq = \delta \cos. q$, Tab. II. Fig. 1.

 quae

quae lineolae P p et Q q, etſi ſunt arcus circulares, hic tanquam rectae ad Meridianum A B normales ſpectari poterunt.

§. 8. Ducatur nunc per puncta p et q recta $p\,q$ O Meridiano principali A B producto occurrens in O, atque haec recta O $q\,p$ referet proximum Meridianum a principali vno gradu ſecundum longitudinem remotum: eodemque modo ex puncto O omnes reliqui Meridiani facile educi poterunt. Pro puncto autem concurſus O inueniendo fiat $Pp - Qq : PQ = Pp : PO$; hoc eſt: $\delta(\text{coſ.}\,p - \text{coſ.}\,q) : q - p = \delta\,\text{coſ.}\,p : PO$, vnde fit $PO = \frac{(q-p)\,\text{coſ.}\,p}{\text{coſ.}\,p - \text{coſ.}\,q}$. Ita ſi ſumatur $p = 50°$ et $q = 60°$, reperietur interuallum $PO = 45°.\,1'$. Quoniam igitur punctum P ab Aequatore diſtat $50°$, puncti O diſtantia ab Aequatore erit $95°.\,1'$, ideoque vltra polum Terrae cadet ad diſtantiam $5°.\,1'$.

§. 9. Quoniam igitur iſtud punctum O, ex quo omnes Meridiani educentur, diuerſum prodiit a vero polo terreſtri, vnde in Sphaera omnes Meridiani egrediuntur, hinc vtique in regionibus polo proximis maxime abſurda repraeſentatio naſceretur. Verum quia in mappa generali Imperii Ruſſici nulla loca vltra 70um. gradum latitudinis exhiberi aſſumuntur, dummodo pro hac latitudine error non prodeat enormis, illa aberratio facile tolerari poterit. Inuento autem hoc puncto O, primum ex eo deſcribatur interuallo O P circulus, cuius peripheria diuidatur in partes $= \delta\,\text{coſ.}\,p$ vniquippe gradui huius paralleli aequalibus, et rectae ex illo puncto O per ſingula diuiſionum puncta ductae dabunt omnes Meridianos in mappa ducendos. Atque hoc modo omnes circuli ex centro O per ſingulos gradus Meridiani deſcripti dabunt omnes circulos parallelos in mappa conſtituendos, qui ita erunt comparati, vt pro binis latitudinibus p et q eorum gradus longitudinis ad gradus latitudinis veram teneant rationem. Hoc igitur modo rete pro tali mappa generali facile conſtruetur, quo facto inſcriptio omnium Prouinciarum nulla amplius laborabit difficultate.

§. 10.

§. 10. Nunc ante omnia videamus, quantopere haec repraeſentatio in terminis mappae extremis A et B a veritate ſit receſſura. Sit igitur Aa vnus gradus Paralleli pro termino A, et Bb talis gradus pro termino B, qui reuera eſſe deberent δ coſ. a et δ coſ. b. Vt iam horum graduum quantitatem in mappa inueſtigemus, quaeramus primo angulum POp vni gradui reſpondentem, qui erit

$$= \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta(\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q)}{q-p} = \frac{\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q}{q-p} \text{ ob } \delta = 1^\circ.$$

Hunc igitur angulum breu. gr. ponamus $=\omega$, vt ſit $\omega = \frac{\delta(\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q)}{q-p}$. Hinc igitur, ſi vt ſupra ſumamus $p = 50^\circ$ et $q = 60^\circ$, iſte angulus POp fiet $\omega = 49'.\, 6''$. In hoc autem calculo probe obſeruandum eſt, interuallum $q-p$ non in gradibus, ſed partibus radii exprimi debere, vbi notetur, quantitatem vnius gradus eſſe 0,01745329. Hinc igitur patet, angulos ω, qui ad punctum O ſingulos gradus longitudinis referunt, aliquanto minores eſſe vno gradu.

§. 11. Hic autem, rem in genere ſpectantes, ſtatuamus iſtum angulum vni gradui reſpondentem $=\omega$, vt ſit $\omega = \frac{\delta(\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q)}{q-p}$, vbi notetur, quia hic litterae p et q in gradibus exprimuntur, interuallum $q-p$ multiplicari debere per 0,01745329, cuius loco breuitates gratia ſcribamus α, ita vt ſit $\omega = \frac{\delta(\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q)}{\alpha(q-p)}$, vbi loco δ ſcribi poteſt 1°, ſiquidem angulum ω etiam in gradibus deſideramus. Praeterea ponamus diſtantiam puncti O vltra polum $= z$ gradibus. Quoniam igitur loci P diſtantia a polo eſt $90^\circ - p$, eius diſtantia a puncto O erit $90^\circ - p + z$, cuius valor in partibus radii erit $\alpha(90^\circ - p + z)$. Hoc autem interuallum ante inuentum eſt $= PO = \frac{(q-p)\,\text{coſ.}\, p}{\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q}$, quod, quia in gradibus exprimitur, aequari debet angulo $90^\circ - p + z$, ita vt hinc fiat $z = \frac{(q-p)\,\text{coſ.}\, p}{\text{coſ.}\, p - \text{coſ.}\, q} - 90^\circ + p$.

§. 12. His poſitis quia diſtantia termini A a polo eſt $90^\circ - a$, erit interuallum AO $= 90^\circ - a + z$ et in partibus

radii $= \alpha(90^\circ - a + z)$, quod per ω multiplicatum dabit gradum A a, cuius ergo quantitas erit $\frac{\delta(90^\circ - a + z)(\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,q)}{q - p}$, qui gradus cum reuera esse debebat $= \delta\,\text{cof.}\,a$, differentia inter hos valores monstrabit errorem huius proiectionis in ipso termino A. Eodem modo pro altero termino B in hac proiectione gradus Paralleli erit $\frac{\delta(90^\circ - b + z)(\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,q)}{q - p}$, qui cum reuera sit $= \delta\,\text{cof.}\,b$, differentia inter hos valores ostendet errorem huius proiectionis in ipso termino B.

§. 13. Primo igitur bina loca intermedia P et Q ita accipi conueniet, vt errores in ambobus terminis A et B euadant inter se aequales, vnde obtinetur ista aequatio:

$$\frac{(90^\circ - a + z)(\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,q)}{q - p} - \text{cof.}\,a = \frac{(90^\circ - b + z)(\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,q)}{q - p} - \text{cof.}\,b$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(a - b)(\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,q) + (q - p)(\text{cof.}\,a - \text{cof.}\,b) = 0.$$

§. 14. Quo autem nostram inuestigationem faciliorem reddamus, loco quantitatum p et q in calculum introducamus interuallum z in gradibus expressum, quo punctum O vltra polum remouetur; atque insuper angulum ω, qui singulis gradibus longitudinis circa punctum O respondet, aut sub quo bini Meridiani proximi vno gradu distantes inuicem inclinantur, huncque angulum ω per gradus seu partes gradus solitas dari assumamus, quo pacto pro littera δ vnitatem scribere licebit. Hoc igitur modo vnus gradus paralleli in termino A erit

$$= \alpha(90^\circ - a + z)\,\omega, \text{ in termino vero } B = \alpha(90^\circ - b + z)\,\omega.$$

Quia igitur in his locis quantitas horum graduum reuera est cof. a et cof. b, errores inter se aequati praebebunt hanc aequationem:

$\alpha(90$

$$\alpha(90-a+z)\omega-\text{cof.}\,a=\alpha(90^\circ-b+z)\omega-\text{cof.}\,b$$

quae reducitur ad hanc: $\alpha(a-b)\omega=\text{cof.}\,a-\text{cof.}\,b$; vnde ſtatim colligimus $\omega=\frac{\text{cof.}\,a-\text{cof.}\,b}{\alpha(b-a)}$, qui valor in partibus vnius gradus exprimetur.

§. 15. Poſtquam igitur errores proiectionis in ambobus terminis A et B aequales reddidimus, eos inſuper aequemus maximo errori qui vsquam intra interuallum AB locum habere poteſt, qui error cum incidat in medium X, cuius latitudo $=\frac{a+b}{2}$, error in hoc loco erit $\alpha(90^\circ-\frac{a-b}{2}+z)\omega-\text{cof.}\frac{a+b}{2}$, qui cum vergat in partem contrariam, ponendus erit

$$\text{cof.}\frac{a+b}{2}-\alpha(90^\circ-\frac{a-b}{2}+z)\omega;$$

hic igitur error aequalis ſtatuatur erroribus pro a et b inuentis, et naſcentur hae duae aequationes:

$$\alpha(90^\circ-a+z)\omega-\text{cof.}\,a=\text{cof.}\frac{a+b}{2}-\alpha(90^\circ-\frac{a-b}{2}+z)\omega \text{ et}$$
$$\alpha(90^\circ-b+z)\omega-\text{cof.}\,b=\text{cof.}\frac{a+b}{2}-\alpha(90^\circ-\frac{a-b}{2}+z)\omega.$$

§. 16. At vero aequalitas errorum in terminis A et B iam nobis ſuppeditauit hanc aequationem: $\omega=\frac{\text{cof.}\,a-\text{cof.}\,b}{\alpha(b-a)}$, qui valor in alterutra praecedentium aequationum ſubſtitutus ſuppeditabit hanc aequationem:

$$\frac{(180^\circ-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b+2z)(\text{cof.}\,a-\text{cof.}\,b)}{b-a}=\text{cof.}\,a+\text{cof.}\frac{a+b}{2}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$180^\circ-\tfrac{3}{2}a-\tfrac{1}{2}b+2z=\frac{b-a}{\text{cof.}\,a-\text{cof.}\,b}(\text{cof.}\,a+\text{cof.}\frac{a+b}{2})$$

ex qua aequatione diſtantiam z facile definire licebit.

§. 17. Applicemus nunc haec ad caſum mappae Imperii Ruſſici, vbi ſit $a=40^\circ$ et $b=70^\circ$, hincque $\frac{a+b}{2}=55^\circ$. Hinc igitur

 primo

primo pro angulo ω nancifcemur hanc aequationem:

$$\omega = \frac{cof.\,40^\circ - cof.\,70^\circ}{30\,\alpha} = \frac{0,4240243}{0,5235987}$$

vnde reperitur $\omega = 48'.\,44''$. Inuento igitur hoc valore prior aequatio, fubftitutis loco a et b valoribus, fit

$$\alpha(85^\circ + 2z)\omega = cof.\,40^\circ + cof.\,55^\circ = 1,33962$$

erat autem $\alpha\,\omega = \frac{0,42402}{30} = 0,0141$, ficque habebimus

$$85^\circ + 2z = \frac{1,33962}{0,01410} = 95^\circ.\,0' \text{ ideoque } z = 5^\circ.$$

§. 18. Suppofuimus hic errorem maximum circa medium interualli AB incidere; cum autem ab hoc loco difcrepare poffit, quaeramus hoc ipfum punctum X, vbi error fit maximus. Denotet igitur x latitudinem huius loci, et quia error ibi erit $\alpha(90^\circ - x + z)\omega - cof.\,x$, eius differentiale nihilo aequemus. Hic autem cauendum eft, ne pro $d.\,cof.\,x$ more confueto fcribatur $-dx\,fin.\,x$; propterea quod hic x in gradibus exprimi affumitur, dum differentiale ipfius arcus, qui eft $\alpha\,x$ per fin. x multiplicari debet. Cum igitur fit

$$d.\,cof.\,x = -\alpha\,dx\,fin.\,x,$$

differentiale noftrae formulae dabit

$$-\alpha\,\omega\,dx + \alpha\,dx\,fin.\,x = 0 \text{ vnde fit } fin.\,x = \omega$$

vbi ω eft fractio fupra inuenta $= \frac{cof.\,a - cof.\,b}{\alpha(b-a)}$, cuius valor noftro cafu eft $\frac{0,4240243}{0,5235987} = fin.\,x$, vnde fit $x = 54^\circ.\,4'$, qui ergo locus vix differt a puncto medio interualli AB.

§. 19. Hoc iam valore pro x inuento error in ifto loco erit $\alpha(90^\circ - x + z)\omega - cof.\,x$, cuius negatiuum errori in terminis A et B aequale pofitum dabit hanc aequationem:

$$\alpha(180 - a - x + 2z)\omega = cof.\,a + cof.\,x$$

ex qua valor ipfius z definiri debet, fcilicet: quia eft $x = 54\tfrac{1}{15}{}^\circ$, aequatio erit $85\tfrac{14}{15} + 2z = \frac{cof.\,a + cof.\,x}{\alpha\,\omega} = 95^\circ\ 56'$, ideoque $2z = 10^\circ$ et $z = 5^\circ$ exiftente $\omega = 0,8098270$ in gradibus, fiue $\omega = 48'.\,44''$.

§. 20.

§. 20. Videamus igitur quantus iſte error maximus in locis A, B et X ſit futurus. Computemus hunc in finem errorem in A, qui cum ſit $\alpha\omega(90^\circ - a + z)$ - coſ. $a = 55\,\alpha\omega - 0{,}7660444$ ob $\alpha\omega = 0{,}01410$ euadet 0, 00946, ſcilicet, cum gradus Paralleli in latitudine A eſſe deberet = 0, 76604, is in hac proiectione eſt aliquanto maior: ſcilicet 0,77550; et quoniam iſte error in partibus vnius gradus Meridiani exprimitur, 15 milliaria tali gradui tribuendo, iſte error valebit 0, 14190, hoc eſt circiter ſeptimam partem vnius milliaris, ſiue vnam Verſtam Ruthenicam. Iſte igitur error in termino B ſeu latitudine 70° vbi vnus gradus Paralleli eſt 0, 34202, parti tantum trigeſimae octauae aequatur, qui in iſta regione facile tolerari poteſt.

§. 21. Pro conſtruenda igitur mappa Imperii Ruſſici aptiſſime punctum O in Meridiano medio B A vltra polum ad diſtantiam 5 graduum conſtituitur ex quo deinceps per ſingulos gradus latitudinis Meridiani A B facile deſcribentur, in quibus gradus longitudinis ita deſignari debent, vt ſingulis circa punctum O conueniat angulus 48′, 45″; vnde cum interuallum O A ſit = 55°, in parallelo per terminum A ducto vnus gradus longitudinis erit = $55 \cdot \alpha\omega = 0{,}77550$, ſiue talis gradus ſe habebit ad gradum Meridiani vt 0, 77550 : 1 vnde haec diuiſio ſatis expedite abſolui poterit.

§. 22. Quoniam in hac proiectione omnes Meridiani per lineas rectas exhibentur, etiam alii circuli maximi, quos in mappa concipere licet, non multum a lineis rectis diſcrepabunt. Aequator quidem foret circulus centro O radio = 95° deſcriptus, in quo ſinguli gradus futuri eſſent $95^\circ . \alpha\omega = 1{,}33950$, qui tamen gradibus Meridiani aequales eſſe debebant; quoniam autem Aequator in noſtra mappa non occurrit, iſte error proiectioni nihil nocet. Videamus igitur, quantum circuli maximi in ipſa mappa ducendi a lineis rectis ſint diſcrepaturi.

§. 23.

Tab. II. Fig. 2. §. 23. Quo iſta inueſtigatio facilius inſtitui poſſit, producatur noſter Meridianus medius AB tam ſurſum vsque in O quam deorſum vsque ad Aequatorem in E, ita vt ſit $EA = 40°$, $AB = 30°$ et $BO = 25°$; polus autem ſit in Π, exiſtente $\Pi O = 5°$ circulus autem centro O per E ductus referat Aequatorem, etſi eo in noſtra mappa non indigemus, in quo capiatur arcus EF 90 graduum quales modo definiuimus eritque angulus $EOF = 90°.\, \omega = 72°, 53'$, exiſtente interuallo $OF = 95°$. Erit igitur hoc punctum F communis polus omnium circulorum maximorum, qui ad noſtrum Meridianum AG normaliter duci poſſunt.

§. 24. Quod ſi ergo intra interuallum accipiamus punctum quodcunque z, per quod circulus maximus ad Meridianum AB normalis duci debeat, is vtique in z ad AB erit perpendicularis et per punctum F tranſibit. Vera autem eius figura curua erit maxime tranſcendens, interim tamen vix ſenſibiliter diſcrepabit ab arcu circulari, qui per puncta Z et F normaliter ad rectam AB ducetur, qui ſit arcus ZF, ad cuius curuaturum inueniendam, ex F ad rectam OE ducatur perpendiculum eritque

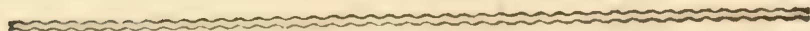
$$OG = 95° \operatorname{coſ.} 72°, 53' = 27,96024 \text{ et}$$

$$FG = 95° \operatorname{ſin.} 72°, 53' = 90,79221.$$

Hinc igitur patet ipſam rectam FG referre quadrantem circuli maximi ad Meridianum AB normalem, qui cum propemodum nonaginta gradus Meridiani contineat, a veritate vix aberrabit. At vero, ſi per terminum A talis circulus maximus ad BA normalis ducatur, eius arcus AF aliquanto maior erit quam recta FG; interim tamen error facile tolerari poterit. Radius enim talis circuli foret $165°,9477$ qui iam tantus eſt, vt eius curuatura in mappa vix perceptibilis euadat

cuadat, ideoque omnes circuli maximi in proiectione ducendi vix a lineis rectis ſint diſcrepaturi.

§. 25. Quae hic de circulis maximis ad Meridianum medium AB normalibus ſunt dicta, pari modo valent de omnibus circulis maximis, qui alios Meridianos normaliter traiiciunt; vnde etiam hoc inſigne commodum iſtius proiectionis obtinetur, vt lineae rectae a quouis loco ad alium quemuis locum ductae reſpondeant ſatis exacte circulis maximis in ipſa ſuperficie ſphaerica ducendis, ac propterea diſtantiae quorumuis locorum in hac proiectione ope circini ſine notabili errore definiri queant; quamobrem ob iſtas egregias proprietates haec ratio proiectionis pro mappa generali Imperii Ruſſici merito omnibus aliis longe eſt praeferenda, etiamſi, ſummo rigore examinata, a veritate haud mediocriter recedat.





TENTAMEN THEORIAE ELECTROPHORI.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Noua electrica machina, cuius hic indolem ſum inueſtigaturus, a ſingulari et mirabili quadam electricitatis productione originem repetit, quae, cum iam olim fuerit a naturae ſcrutatoribus detecta et acutis experimentis explorata, nouiſſime merito in ſcenam reuocari coepit, cum hodienum multa ſint in ea abſtruſa adhuc neque ſatis diſtincte explicata. Vis electrica, nullo frictionis auxilio, ſola reſinarum liquefactione producta et admodum diu in refrigerata reſina ſuperſtes, aut leui attritu facile reſuſcitanda iam dudum in hiſtoria theoriae electricae haud parum eſt celebritatis adepta. Ita, referente Cel. *Priſtley*, in reſinis quibusdam, nullo affrictu, aëri libero expoſitis, a Greyio et Deſaguliero ſpontaneae quaſi vis electricae indicia ſunt obſeruata. Memorabilis quoque phaenomeni huius vberiorem et experimentis ſtabilitam mentionem facit Cel. *Wilſon* in transactionibus ſocietatis Londinenſis; qui cum lagenae Lugdunenſi ceram hiſpanicam liquefactam infunderet, eam hoc modo iam tanta vi electrica imbutam deprehendit, vt viuidae commotionis Muſchenbroekianae experimento ſufficeret, ita tamen, vt in ratione diminuti caloris debilitaretur vis concuſſionis, tandemque, hoc extincto, penitus deſtrueretur. Penitiori adhuc indagine Cel. *Wilcke* ſingularem hanc vis electricae, quam vocat *ſpontaneam*, originem eſt proſecutus, compluribus experimentis, tam materiaruui quam conſectariorum varietate inſignibus; ſulphure

v. c.

v. c. liquefacto vasis argillaceis, vitreis ligneisue probe siccatis et suffultis infuso et post refrigerationem extracto; in vtroque viuidam satis, constanter positiuam in vitro, in sulphure negatiuam, vim deprehendit electricam, in sulphure sulphuri infuso nullam; quae denique experimenta vasis metallicis instituit Cel. *Aepinus*; atque his quidem potissimum postremae classis obseruationibus originem suam debere merito videtur praesens, de qua agitur, machina. Aestatis praeteritae medio paruus huius machinae modulus Vienna Petropolin est transmissus et cum spontanea et inopina quasi vi sua peritiorum attentionem iure sibi vindicaret, pluries maiori mensura constructus. Multiplicibus experimentis, quae in eiusmodi machina, mediocris tamen moduli, eius veram indolem scrutaturus, institui, superuenit alia insignis magnitudinis et effectus, AUGUSTAE IMPERATRICIS, promotricis scientiarum clementissimae iussu a Dno. *Kulibin* artifice Russo dexterrimo constructa, quae optatissimam mihi, singularis huius vis electricae et phaenomenorum inde pendentium naturam et caussas curatius inuestigandi occasionem obtulit, sibique Electrophori quasi perpetui, diuturna et pertinaci vis electricae semel excitatae conseruatione, nomen iure meritoque vindicat, cum post integros menses, siccos inprimis, viuide adhuc deprehendatur electricum, et nisi ad alia experimenta vigor eius leui attritu fuisset resuscitandus, sine dubio longe diutius pristinae virtutis, dudum excitatae, indicia, nullo accedente nouo attritu, fuisset conseruaturum.

§. 2. Constat hoc Electrophorum Tab. II. Fig. 3.

I. Patina A B C ex laminis tenuibus ferreis stanno obductis parata, nouem pedes longa et quatuor cum dimidio lata; margine conuexo cincta et in vtraque longitudinis suae extremitate globis E et D, ex eadem materia paratis, instructa.

II. Huic patinae infusae sunt centum sexaginta librae picis; octoginta librae cerae hispanicae et decem librae minii; superficie refrigerata plana et polita.

III. Superficiei huic resinosae K lamina incumbit metallica, moduli aliquantum minoris, septem cum dimidio pedes longa et tres pedes lata; margine conuexo et in vtraque longitudinis extremitate globis *m* et *n* prominentibus instructa. Annexi sunt huic patinae annuli *p*, *q*, *r*, *s*, insertis chordis sericis, quarum ope circa trochleas *t*, *u*, *v* et *w* eleuari et ab inferiori debita celeritate diduci potest,

IV. Globo D patinae inferioris annexus est excitator metallicus incuruus D E F, circa axem in D mobilis, cuius altitudo verticalis D F duorum cum dimidio pedum, ita dispositus, vt globulus F, in quem terminatur, a laminae superioris globulo *m*, cum haec eleuatur, interuallo vnius et dimidii circiter pedis distet, et inclinato reductoue excitatore D *e* F, plus minusue appropinquari possit.

V. Ex vncinulis *f* et *g* pendet alius globulus metallicus K; ex vna parte chorda serica *fk*; ex altera filo metallico *gk* suspensus, ad folia metallica *a*, *b*, *c* etc. pertingente, quibus interior sustentaculi lignei L M N O superficies est obtecta; hocque sustentaculo etiam suffulta est patina inferior, fulcris vitreis imponendo, si totum apparatum contactu corporum non per se electricorum excludere opus sit.

Machina haec, resina semel probe attrita, tum per diuturna temporis interualla eminenti pollet vi electrica et experimentis electricis consuetis magno vigore instituendis par est. Hisce tamen hac vice recensendis supersedeo, cum ea tantum cum Ill. Academia communicare mihi propositum sit, quae, quam egregie machinae huius phaenomena cum theoriae electricitatis a *Cel. Francklino* stabilitae principiis consentiant, aptissime demon-

demonſtrare videntur, quatenus inprimis theoria iſta, experientiis electricis miro modo conſentanea, ab *Ill. Aepino* ſummo ingenii acumine eſt exculta et in Tentamine theoriae electricitatis et magnetismi mathematicis calculis euoluta.

§. 3. Vt igitur, ad ductum huius theoriae, phaenomena in Electrophoro ſeſe manifeſtatura, a priori definiamus; principio perpendatur, omnia repeti debere ex conſideratione corporis per ſe electrici, vi electrica, quocunque id modo fuerit effectum, imbuti, cui ex vtroque latere contigua ſint corpora non per ſe electrica, totusque apparatus cinctus corporibus per ſe electricis, quae, niſi difficulter, nec transmittant in apparatum hunc, nec ex eo quidquam fluidi electrici recipiant; vbi tantisper abſtrahere licet a non perfecta aëris circumflui electricitate originaria. Sit igitur A B C D corpus per ſe electricum, maſſa v. c. reſinoſa, cui in ſtatu quoad electricitatem naturali conſtitutae competat fluidi electrici quantitas $= \mathfrak{N}$. Liquefactione autem et particularum contractione, refrigerationem comitante, factam eam eſſe *negatiue* electricam, experimentis conformiter aſſumo; ſitque fluidi electrici hoc modo expulſi quantitas ad naturalem vti $\mathfrak{E} : 1$, adeoque fluidi electrici in corpore A B C D ſuperſtitis quantitas $= \mathfrak{N}(1 - \mathfrak{E})$. Contiguum ſit corpus hoc negatiue electricum A B C D laminae metallicae, adeoque corpori non per ſe electrico C D E F, pedi vitreo G H inſiſtenti et aëre ſicco vndique cincto; cui corpori in ſtatu naturali competat fluidi electrici quantitas $= N$; atque iam ex primis *Cel. Francklini* theoriae principiis cognitum eſt, fluidum huius laminae electricum a ſuperficie auerſa E F ad ſuperficiem corpori negatiue electrico contiguam C D attractum iri; ita, vt, fluido electrico verſus C D vltra quantitatem naturalem accumulato, verſus E F infra eam depreſſo, planum in lamina horizontale concipi poſſit, vltra quod lamina contrariam, ei corporis A B C D, adeoque poſitiuam, citra Tab. II. Fig. 6.

 quod

quod eandem, id eſt, negatiuam poſſideat vim electricam. Fingamus ergo, ſtratum accumulationis extendi a C D vsque ad mn, huicque laminae CDEF parti C D mn deberi in ſtatu naturali fluidi electrici quantitatem $= \lambda$ N. Stratum rarefactionis erit ergo mn E F, eique in ſtatu naturali competet fluidi electrici quantitas $= (1 - \lambda)$ N. Sit porro fluidi electrici in C D mn accumulati quantitas ad naturalem, vti $\mathfrak{D} : 1$; expulſi autem in parte mn E F, vti $\mathfrak{E} : 1$; ita, vt fluidi electrici in parte C D mn ſit quantitas $= \lambda N(1 + \mathfrak{D})$; in parte mn E F vero $= (1 - \lambda) N (1 - \mathfrak{E})$; adeoque in tota lamina C D E F $= N(1 + \lambda\mathfrak{D} - (1 - \lambda)\mathfrak{E})$; ſint iam y et x duae particulae fluidi electrici, altera y in ſuperficie E F, altera x in plano mn, inter ſtratum accumulationis et rarefactionis medio, conſtitutae; atque inueſtigemus vires, et attractiuas et repulſiuas, quibus hae particulae x et y ſollicitabuntur; quem in finem perpendendum eſt, qualis earundem fuerit conditio in ſtatu naturali. Ponatur ergo, in ſtatu naturali particulam fluidi electrici y attrahi a maſſa totius aggregati vi $=$ A; repelli vero a fluido electrico ſtrati E F mn vi $= r$; ſtrati mn C D vi $= ar$; corporis C D A B vi $= br$. Similiter particulam x attrahi a maſſa totius aggregaſi vi $= \mathfrak{A}$; repelli a fluido electrico ſtrati mn E F vi $= r$; ſtrati mn C D vi $= \alpha r$; corporis CDAB vi $= \beta r$; atque ob ſtatum naturalem, id eſt, aequilibrium omnium harum virium habebitur

$$A - r - ar - br = 0; \text{ et } \mathfrak{A} + r - \alpha r - \beta r = 0;$$

vbi quidem notari conuenit, eſſe $a < 1$ et $\beta > b$, α vero ſtricto ſenſu $= 1$; quoniam tamen iſta vis reſpondet parti C D mn a parte mn E F diſtinctae, quarum ſuas quaelibet independenter ab altera intuitu electricitatis viciſſitudines ſubire poteſt, haec littera α in calculum erit introducenda, quo euoluto ponendum erit $\alpha = 1$.

Hiſce ex ſtatu naturali notatis, perpendatur, abiiſſe jam $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}(1 - \mathfrak{E})$; λ N in $\lambda N(1 + \mathfrak{D})$ et $(1 - \lambda)$ N in

(1 —

$(1-\lambda)$ N $(1-\mathfrak{E})$; vnde facile perſpicitur, abire r in $(1-\mathfrak{E}) r$ ar in $(1+\mathfrak{D}) ar$; br in $(1-\mathfrak{E}) br$; αr in $(1+\mathfrak{D}) \alpha r$; et βr in $(1-\mathfrak{E}) \beta r$; quibus valoribus ſubſtitutis, iisque membris, quae ſe ex conditione ſtatus naturalis deſtruunt, deletis colligitur

$$\text{vis } y = \mathfrak{E} r - \mathfrak{D} a r + \mathfrak{E} b r$$
$$\text{vis } x = - \mathfrak{E} r - \mathfrak{D} \alpha r + \mathfrak{E} \beta r$$

quibus particula y et x ad corpus ABCD attrahitur.

Atque his formulis continetur ſtatus Electrophori is, quem *primitiuum* et *illibatum* appellare licet, in quo verſatur haec machina immediate poſt applicationem reſinae fuſae et refrigeratae, dum lamina metallica, corporibus per ſe electricis cincta, nullius corporis, niſi aëris circumflui ſicci, contactum adhuc paſſa eſt quemque ſtatum ſemel perditum nunquam, niſi noua reſinae liquefactione recuperat.

§. 4. Electrophoro in tali ſtatu conſtituto, admoueatur laminae metallicae corpus non per ſe electricum neque ſuffultum, aut, ſi fuerit ſuffultum, ſaltem ſatis magnum; actualis obtinebit influxus fluidi electrici ex corpore admoto in laminam metallicam. et transfluxus ex huius ſtrato inferiori in ſuperius, vsque dum vtraque virium modo inuentarum fuerit ad nihilum reducta, id eſt, vsque dum fuerit:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}. \frac{b+\beta}{1+a}; \text{ et } \mathfrak{E} = \mathfrak{C}. \frac{\beta a - b}{1+\alpha}.$$

Eſt vero ob exiguam laminae craſſitiem quam proxime $a = 1$; et $b = \beta$; vnde fit $\mathfrak{D} = \mathfrak{C} b$ et $\mathfrak{E} = 0$. Quod indicio eſt, in lamina hac nullam dari partem, in qua fluidum electricum infra quantitatem naturalem eſſet depreſſum; ſed accumulationem huius fluidi verſus CD eſſe maximam, ob eoque recedendo verſus EF ſenſim decreſcere, certa lege, quae definiri hactenus non poteſt. Licet vero haec fluidi electrici ſuper naturalem abundans quantitas $= \lambda \mathfrak{D} = \lambda \mathfrak{C} b$ hoc modo non ſit per totam laminam vniformiter diſtributa; tamen ob laminae

ex-

exiguam crassitiem eam tanquam vniformiter distributam sine sensibilis erroris periculo spectare licet, quo posito euadet $\lambda = 1$, et tota iam fluidi electrici in lamina erit quantitas $= N(1 + \mathfrak{D}) = N(1 + \mathfrak{C}\, b)$. Constat itaque Electrophorum in hoc statu combinatione duorum corporum sibi contiguorum, vnius per se electrici et *negatiua* vi electrica imbuti, alterius non per se electrici et *positiua* electricitate pollentis, quod tamen nullam nec attractiuam nec repulsiuam vim exserit, cum fluido electrico naturali N ad quantitatem $N(1 + \mathfrak{C}\, b)$ accumulato vis eius euanuerit; quam ob caussam hanc fluidi electrici in lamina copiam $N(1 + \mathfrak{C}\, b)$ *quantitatem fluidi electrici debitam aequilibrio virium electricarum in Electrophoro* adpellari conueniet eamque littera Φ, excessum vero supra quantitatem naturalem seu $\mathfrak{C}\, b$ littera Δ designemus, vt sit $\Phi = N(1 + \mathfrak{C}\, b)$ et $\Delta = \mathfrak{C}\, b$. Atque in tali statu Electrophorum constitutum est, cum communiter inter manus versatur, vnde hunc eius statum *statum Electrophori communem* appellare licebit; moxque patebit, ex quantitatis huius Φ aequilibrio virium electricarum in Electrophoro debitae immutatione quocunque modo producta potiora eius phaenomena sponte explicari; quem in finem notetur vim laminae inferioris seu vim y iam esse $= (\mathfrak{C}\, b - \Delta)\, r = 0$.

§. 5. Explorato statu hoc *communi* Electrophori, progrediamur ad tertium eius statum, cum scilicet ipsi imponitur lamina metallica altera ABGH, filis sericis suspensa, cui in statu naturali competat fluidi electrici quantitas $= n$. Fluidum hoc laminae ABGH electricum duabus iam viribus contrariis sollicitatur, vna attractiua a corpore negatiue electrico ABCD, altera repulsiua a corpore positiue electrico CDEF, harumque virium vnius super alteram excessui obsequetur. Supponamus itaque fluidum laminae electricum versus AB accumulari; stratumque accumulationis extendi vsque ad $p\, q$, cui quidem strato in statu naturali competeret fluidi electrici quantitas

$= k\, n$,

$= kn$, et fluidum in hoc ſtrato accumulatum eſſe ad naturale vt $\mathfrak{B} : 1$. Erit igitur ſtratum euacuationis pqGH, cui competet in ſtatu naturali copia fluidi electrici $= (1-k)n$; porro ponamus fluidum electricum ex hoc ſtrato expulſum eſſe ad naturale vti $\mathfrak{A} : 1$; ita, vt iam ſit fluidi electrici quantitas in

$$ABpq = kn(1+\mathfrak{B}); \text{ in } pqGH = (1-k)n(1-\mathfrak{A});$$

adeoque in tota lamina $= n(1+k\mathfrak{B}-(1-k)\mathfrak{A})$, vbi quidem litteras $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ob rationem ſimilem §. 3. allatam diſtingui oportet. Sint iam z et v duae particulae fluidi electrici, altera z in ſuperficie laminae extima GH, altera v inter ſtratum accumulationis et euacuationis media; quae quibusnam viribus ſollicitentur, vt cognoſcatur, perpendenda eſt virium tam attractiuarum, quam repellentium conditio in ſtatu trium horum corporum quoad electricitatem naturali. Sit igitur primum pro ſuperficie inferiore EF vis, qua fluidi electrici particula y a maſſa trium horum corporum attrahitur, $=$ A; repellatur vero a fluido electrico in EFCD vi $= \varrho$; in CDAB vi $= b\varrho$; in ABpq vi $= c\varrho$; in pqGH vi $= e\varrho$. Similiter particula z attrahatur vi $=$ A; repellatur a fluido electrico in GHpq vi $= f\varrho$; in pqAB vi $= g\varrho$; in ABCD vi $= h\varrho$; in CDEF vi $= m\varrho$. Particula denique v a totius aggregati maſſa attrahatur vi $= \mathfrak{A}$; repellatur a fluido electrico in pqGH vi $= p\varrho$; in pqAB vi $= q\varrho$; in ABCD vi $= s\varrho$; in CDEF vi $= t\varrho$. Quibus poſitis ob ſtatum intuitu electricitatis naturalem habebitur

pro y	$A-\varrho-b\varrho-c\varrho-e\varrho=0$
pro v	$\mathfrak{A}+p\varrho-q\varrho-s\varrho-t\varrho=0$
pro z	$A-f\varrho-g\varrho-h\varrho-m\varrho=0.$

Attendenti autem facile patebit, litteram b hic eundem, quem ante §. 3. valorem habere eandemque vis repulſiuae, aucta diſtantia, decreſcentis functionem deſignare. Hiſce notatis, perpendatur, abiiſſe

I.) N in N $(1+\Delta)$ adeoque

z in $z(1+\Delta)$; tz in $tz(1+\Delta)$; mz in $mz(1+\Delta)$

II.) $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}(1-\mathfrak{C})$, hincque

bz in $bz(1-\mathfrak{C})$; sz in $sz(1-\mathfrak{C})$; hz in $hz(1-\mathfrak{C})$

III.) kn in $kn(1+\mathfrak{B})$, adeoque

cz in $cz(1+\mathfrak{B})$; gz in $gz(1+\mathfrak{B})$; qz in $qz(1+\mathfrak{B})$

IV.) denique $(1-k)n$ in $(1-k)n(1-\mathfrak{A})$ hincque

ez in $ez(1-\mathfrak{A})$; fz in $fz(1-\mathfrak{A})$; pz in $pz(1-\mathfrak{A})$.

ex quibus colligitur

vis in $y=(\mathfrak{A}e-\mathfrak{B}c+\mathfrak{C}b-\Delta)z$

vis in $v=(-\mathfrak{A}p-\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}s-\Delta t)z$

vis in $z=(\mathfrak{A}f-\mathfrak{B}g+\mathfrak{C}h-\Delta m)z$

quibus viribus fluidi electrici particulae y, v et z versus corpus ABCD attrahuntur.

Pro hisce vero formulis porro notandum est, esse stricto sensu $p=q, p=f$ et $h=b$; deinde licet proprie sit $c>e$; $t>m$; $s>h$; $q>g$ et $f>g$, tamen si laminae impositae GHAB exigua sit crassities, sine omni errori sensibili poni posse

$c=e$; $t=m$; $s=h$; $q=g$; $f=g$,

denique etiam notari opus est, cum fluidum electricum strati ABpq particulam fluidi electrici z, ipsi viciniorem certe fortius repellat; quam particulam y, quae, ceteris omnibus paribus, ab eo est remotior, esse $gz>cz$ adeoque $g>c$.

Atque formulis modo inuentis continetur status Electrophori is, qui obtinet, post quam lamina metallica filis sericis suspensa ipsi est imposita; et ex hisce stabilitis principiis omnia, quae ad phaenomenorum Electrophori explicationem pertinent, repetere licebit, ad quorum potiora exponenda et ad huius theoriae ductum explicanda progredior.

§. 6.

§. 6. Ex Electrophori itaque lamina metallica inferiori, seposita lamina superiori mobili, post sufficientem resinae attritum, eo nondum suffulto (isolé) factum, suspendi duo fila linea, aliquot pollices longa, et globulo ex subere facto instructa, libere pendula, sibi propinqua inuicem et parallela: Quo facto Electrophorum imposui fulcro vitreo, vt, nisi a corporibus per se electricis, nusquam contingeretur. Hoc igitur apparatu ita constituto.

I. *Contingatur lamina metallica corpore quocunque, siue per se siue non per se electrico, suffulto aut non, magnitudinis cuiuscunque: pendula ne tantillum quidem de suo parallelismo deturbantur.*

Cum Electrophorum post resinae liquefactae infusionem et refrigerationem atque ortum inde statum eius, quem vocaui *primitiuum* et *illibatum* §. 3, iam aliorum corporum non per se electricorum contactum subierit, atque etiam nunc durante resinae attritu fuerit non suffultum, adeoque in contactu cum corporibus non per se electricis; euidens est, id, cum imponeretur fulcris vitreis, iam ex statu primitiuo fuisse transgressum in eum statum, quem §. 4. vocaui statum eius *communem*, quo communiter inter manus versatur. Lamina scilicet metallica est quidem, vti theoria docuit, *positiue electrica*, sed nec plus neque minus continet fluidi electrici, quam quidem virium eius attractiuarum et repellentium aequilibrio debetur, quo ipso accumulationis gradu laminae, licet positiue electricae, vis in fluidum electricum aliorum corporum ad nihilum reducitur. Lamina itaque in hoc statu constituta nec ex aliis corporibus ipsi contiguis attrahit in se, neque ex se in ea repellit quidquam fluidi electrici, sed eodem prorsus modo agit, ac si in statu electricitatis naturali esset constituta. Fila itaque, huic licet laminae appensa, sunt in statu naturali; adeoque libere pendula sibi dependent paral-

 lela;

lela; neque cuiuscunque corporis appropinquatione aut contactu, laminae, adeoque nec filorum, status quicquam mutatur.

II. *Imponatur resinae corpus non per se electricum suffultum, v. c. lamina metallica filis sericis suspensa aut manubrio vitreo munita: pendula diuergunt sed parum et quandoque vix sensibiliter.*

Statum, in quo Electrophorum, *lamiua superiori ipsi imposita*, versatur, definiuimus §. 5. vbi pro laminae, tam superioris, quam inferioris, vi electrica sequentes expressiones sunt inuentae; vis scilicet attractiua

laminae superioris $=(\mathfrak{A}f-\mathfrak{B}g+\mathfrak{C}b-\Delta m)\varrho$;

laminae inferioris $=(\mathfrak{A}e-\mathfrak{B}c+\mathfrak{C}b-\Delta)\varrho$;

Cum itaque hic de lamina solum inferiore quaestio sit: notetur, esse $\Delta=\mathfrak{C}b$ §. 4, esse porro, quam diu lamina superior adhuc est intacta, $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, §. 5; ac denique $c>e$ §. 5. Vnde vis laminae inferioris electrica colligitur $=-\mathfrak{B}(c-e)\varrho$; quae ergo est repulsiua et ad aliquam fluidi electrici portionem ex lamina expellendam tendit. Cessat ergo vis laminae esse nulla, et cum ex se expellat aliquid fluidi electrici, filorum ipsi contiguorum vtrumque euadet positiue electricum, binaque haec pendula se repellunt inuicem; exigua tamen erit ista diuergentia, cum et vis laminae repulsiua talis sit, siquidem §. 5. iam notauimus, esse proxime $c=e$.

III. *Contingatur iam corpore non per se electrico v. c. digito lamina superior resinae imposita; scintilla emicat electrica, et pendula laminae inferioris magis diuergunt.*

Modo vidimus, vim attractiuam superficiei huius laminae esse $(\mathfrak{A}f-\mathfrak{B}g+\mathfrak{C}b-\Delta m)\varrho$ in plano autem inter stratum accumulationis et rarefactionis fluidi electrici in hac lamina inter-

intermedio obtinet ſecundum §. 5. vis attractiua
$= (-\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}s - \Delta t)\varrho$.
Admoto itaque huic laminae corpore non per ſe electrico, actualis obtinebit emicante ſcintilla fluidi electrici ex hoc in iſtam influxus et in ea ex parte ſuperiori in inferiorem transfluxus, donec vtraque harum virium fuerit ad nihilum reducta, adeoque, vsque dum fuerit

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{C}(sg - qb) - \Delta(tg - mq)}{pg + qf} = \mathfrak{A}' \text{ et}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C}(sf + pb) - \Delta(tf + pm)}{pg + qf} = \mathfrak{B}'$$

ſiue ob exiguam laminae craſſitiem ſecundum §. 5. $\mathfrak{A}' = 0$ et $\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{C}b - \Delta m}{g} = \frac{\mathfrak{C}b(1-m)}{g}$; ita, ob $1 > m$ contactu hoc tota lamina haec fiat poſitiue electrica. His vero valoribus ipſius $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ in expreſſione vis electricae laminae inferioris, quam nouimus nunc eſſe $= (\mathfrak{A}'e - \mathfrak{B}'c + \mathfrak{C}b - \Delta)\varrho$ ſubſtitutis, prodit vis huius laminae electrica $= -\mathfrak{B}'c\varrho = -\frac{\mathfrak{C}bc}{g}(1-m)\varrho$, quae vis repulſiua cum manifeſto maior ſit ea $-\mathfrak{B}(c-e)\varrho$, quae ante contactum laminae ſuperioris obtinuit, ob $\mathfrak{B}' > \mathfrak{B}$ et $c > c - e$; maioris pendulorum poſt hunc contactum diuergentiae cauſſa euidenter perſpicitur.

IV. *Contactu hoc laminae ſuperioris facto, contingatur ſimiliter lamina inferior; atque etiam ſcintilla percipietur electrica; tumque de nouo ſuperior et dein inferior atque hoc modo alternatim ſuperior et inferior lamina contingatnr; et ex vtraque aliquot alternatim vicibus ſcintilla elicietur electrica, ſubinde tamen magis magisque debilior, donec poſt aliquot eiusmodi alternos contactus nihil amplius in neutra percipiatur.*

Singulari huic Electrophori phaenomeno quam conſentanea ſit theoria modo propoſita, vt dilucide perſpiciatur; alternos iſtos laminarum contactus et virium electricarum ſubnaſcentes inde variationes ſecundum formulas datas calculo proſequamur, quod quo concinnius fieri queat, deſignemus

 vim

vim electricam laminae ſuperioris per V S; eam vero laminae inferioris $= V I$, ita, vt, ſi fluidi electrici quantitas vltra naturalem ſuperabundans ſit in lamina ſuperiore $= \mathfrak{B}$; in inferiore $= \Delta$ habeatur

$$V S = (-\mathfrak{B} g + \mathfrak{C} b - \Delta m)\varrho \text{ et}$$
$$V I = (-\mathfrak{B} c + \mathfrak{C} b - \Delta)\varrho.$$

Primo itaque laminae ſuperioris contactu vis V S ad nihilum eſt redacta, dum $\mathfrak{B}$ abiit in $\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{C} b - \Delta m}{g} = \frac{\mathfrak{C} b (1 - m)}{g}$; at ſubſtituto hoc valore ipſius $\mathfrak{B}$ euadit $V I = \frac{\mathfrak{C} b (g - c) - \Delta (g - c m)}{g} . \varrho$, quae non eſt nulla ſed ob $\Delta = \mathfrak{C} b$ abit, vti iam notauimus, in hanc repulſiuam $- \frac{\mathfrak{C} b c (1 - m)}{g}$. Admoto itaque corpore non per ſe electrico laminae huic: expelletur, emicante ſcintilla, aliquid fluidi electrici, donec haec vis euaneſcat, id eſt, vsque dum abeat Δ in $\Delta' = \mathfrak{C} b . \frac{g - c}{g - c m}$. Hoc ipſo autem inſtanti vis laminae ſuperioris reuiuiſcit, cum enim iam ſit

$$V S = (-\mathfrak{B}' g + \mathfrak{C} b - \Delta' m)\varrho;$$

ſubſtitutis valoribus colligitur $V S = \frac{\mathfrak{C} b . c m (1 - m)}{g - c m}$, quae vis eſt poſitiua adeoque *attractiua*; ita, vt ipſa vis inferioris repulſiuae deſtructio eodem inſtanti vim ſuperiorem reſuſcitet, et attractiuam efficiat Admoto igitur iam denuo laminae ſuperiori corpore non per ſe electrico; ex hoc in illam tranſilict fluidum electricum, vsque dum $\mathfrak{B}'$ abierit in $\mathfrak{B}'' = \frac{\mathfrak{C} b (1 - m)}{g - c m}$, adeoque $V S = 0$. Pro lamina vero inferiore habebitur

$$V I = (-\mathfrak{B}'' c + \mathfrak{C} b - \Delta')\varrho;$$

in qua expreſſione ſi ſubſtituantur valores pro $\mathfrak{B}''$ et Δ' inuenti, prodit $V I = 0$, ita, vt poſt triplicem hanc ſcintillam ex ſuperiore et inferiore lamina alternatim emicantem ſecundum theoriae principia nullam amplius exſpectare liceat. Si igitur accidat, vt poſt tres hos contactus alternos in laminis ſibi iunctis aliqua adhuc vis electrica ſentiatur: id ſine omni dubio circumſtantiae erit adſcribendum, cuius in ſuperiori calculo ratio-

tionem non habuimus, non perfectae scilicet aeris circumflui electricitati originariae, qua quantitates $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et Δ non nihil variari possunt, quas hactenus non nisi a corpore contingente variari assumsimus; ceterum hactenus inuenta ad comprobandum theoriae cum experimentis consensum plene sufficiunt.

Inuentis itaque valoribus $\mathfrak{B}$ et Δ extremis, qui quippe corporis non per se electrici contactu vlterius non variantur, scilicet $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C} b (1 - m)}{g - c m}$; et $\Delta = \frac{\mathfrak{C} b (g - c)}{g - c m}$ assignare possumus vtriusque laminae post ternos hos contactus alternos statum electricum; erit scilicet quantitas fluidi electrici in lamina superiore $= n \left(1 + \frac{\mathfrak{C} b (1 - m)}{g - c n}\right)$; in lamina inferiore $= N \left(1 + \frac{\mathfrak{C} b . (g - c)}{g - c m}\right)$ ita, vt hinc perspiciatur, in lamina vtraque fluidum electricum vltra quantitatem naturalem esse accumulatum, adeoque hoc contactu vtramque factam esse *positiue* electricam; hoc tamen non obstante fluidum electricum aliorum corporum ipsis admotorum nec attrahere nec repellere, adeoque quam diu ita iunctae sunt istae laminae, eas post hos contactus prorsus agere, ac si constitutae essent in statu quoad electricitatem naturali.

V. *Si loco contactuum horum alternatiuorum, vna lamina vno, altera simul altero digito contingatur: commotio electrica percipitur, ei lagenae Lugdunensis perfecte similis, tumque hoc facto laminarum sibi iunctarum neutra amplius sentitur electrica.*

Huius quoque phaenomeni ratio ex praecedentibus immediate perspicitur. Cum ordo sit indifferens, et commotio electrica percipiatur, siue superior siue inferior lamina primum vno, et dein altera altero digito contingatur; ponamus, primum superiorem contingi; atque emicante scintilla et sine commotione euadet, vti in experimento praecedente, $VS = 0$; vis vero repulsiua laminae inferioris VI incrementum capit, quae ad expellendam ex hac lamina fluidi electrici partem tendit. Quodsi igitur ea simul altera digito contingatur, haec

fluidi

fluidi electrici portio ex lamina expellenda in hunc propulſabitur, eo ipſo autem inſtanti, quo hoc fit, reuiuiſcit, vt modo inuenimus, vis laminae ſuperioris attractiua, a qua itaque ſi alter digitus nondum fuerit remotus, fluidum electricum ex inferiore ad ſuperiorem laminam per digitos propulſabitur, idque, quod praecipuum eſt, inſigni celeritate et vehementia, cum ſcilicet *duplici* vi adigatur, vna attractiua a ſuperiori, altera propulſiua ab inferiori lamina; in eiusmodi autem transfluxus fluidi electrici velocitate et vehementia id conſiſtere, cuius perceptio commotio electrica appellatur, in lagenae Lugdunenſis theoria dudum eſt comprobatum.

Quodſi vero inferior lamina primum contingatur, V I ad nihilum reducitur, vis vero laminae ſuperioris attractiua increſcit, quae igitur ſi ſimul altero digito contingatur, fluidum electricum huius attrahet; eo ipſo autem inſtanti vis inferioris repulſiua reuiuiſcit, ita, vt etiam hoc caſu fluidum electricum *duplici* vi adigatur et transfluxus ſui vehementia commotionem electricam producat.

Transfluxus hic durabit, donec vtraque vis V S et V I ad nihilum redierint; quibus nihilo aequatis iidem prodeunt valores extremi litterarum 𝔅 et △, quos in experimenti praecedentis explicatione, ſucceſſiuos Electrophori ſtatus alternis contactibus ortos calculis proſequendo inuenimus; vnde, cur deinceps laminarum ſibi iuncturam neutra vim amplius prodat electricam, per ſe patet.

§. 7. Explicatis itaque ex principiis theoriae propoſitae, omnibus, quae, dum laminarum vtraque reſinae contigua eſt, ſe manifeſtant, phaenomenis, ad ea progrediamur, quae obſeruantur, dum ſuperior lamina ab Electrophoro diducitur.

VI.

VI. *Lamina ſuperiori ad diſtantiam aliquot pollicum ope filorum ſericorum vel manubrii vitrei ab Electrophoro remota: laminarum vtraque viuidam oſtendit vim electricam, admoto corpore non electrico, ſcintillis conſpicuam.*

Vidimus, vtramque laminam eſſe poſitiue electricam, atque

$$VS = (-\mathfrak{B}g + \mathfrak{C}h - \Delta m)\varrho \text{ et } VI = (-\mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b - \Delta)\varrho$$

deſignantibus $\mathfrak{B}$ et Δ valores ſuos extremos §. 6. inuentos, ita ſibi inuicem attemperatos, vt ſit

$$-\mathfrak{B}g + \mathfrak{C}h - \Delta m = 0 \text{ et } -\mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b - \Delta = 0.$$

Nunc vero diducta ab Electrophoro lamina ſuperiore, vt eius viribus haec iam non afficiatur, euidens eſt, poni debere $h = 0$; et $m = 0$; adeoque vis VS non iam erit nulla, ſed $VS = -\mathfrak{B}g\varrho$, adeoque *repulſiua*; et cum nunc nec inferior lamina a viribus ſuperioris afficiatur, erit quoque $c = 0$, adeoque $VI = (\mathfrak{C}b - \Delta)\varrho$ quae vis eſt *attractiua*, cum ſit $\Delta = \mathfrak{C}b\frac{g-c}{g-cm}$ hincque $\mathfrak{C}b - \Delta = \frac{\mathfrak{C}bc(1-m)}{g-cm}$; adeoque $VI = \frac{\mathfrak{C}bc(1-m)}{g-cm}\varrho$; ſimili modo ſubſtituto valore extremo ipſius $\mathfrak{B}$ habebitur $VS = -\frac{\mathfrak{C}bg(1-m)\varrho}{g-cm}$; facile enim patet, etſi, ſeparatis laminis, poſuimus in expreſſione virium $c = 0$, et $m = 0$, ob allegatas rationes, has tamen litteras in expreſſionibus pro quantitate fluidi electrici in vtraque lamina, adhuc Electrophoro iunctis, accumulati et, ſeparatis etiam laminis, non mutati priſtinos ſuos valores retinere. Atque ſic quidem euidenter patet, cur vires harum laminarum, quae laminis ſibi iunctis, ob mutuum earundem aequilibrium quaſi erant ſopitae, laminarum ſeparatione adeoque ſublata reciprocae talis aequilibrationis conditione ſtatim reuiuiſcant quaſi et ſua actiuitate ſe manifeſtent.

VII. *Lamina superiori ab Electrophoro semota, deducatur eius electricitas ope conductoris in lagenam Lugdunensem, quae hoc modo viuida vi electrica eaque positiua oneratur.*

Deducatur simili modo laminae inferioris electricitas in aliam eiusmodi lagenam Lugdunensem, quae hinc vi electrica negatiua imbuitur.

Electricitatem prioris lagenae, laminae superioris ope electrificatae, esse *positiuam* consuetis modis exploraui; eam vero lagenae alterius, per laminam inferiorem electrificatae, esse *negatiuam*, etiam inde perspicitur, quod hae duae lagenae sibi admotae explosione electrica exoneratur, quod fieri non posset, nisi posterior lagena electricitatem possideret ei lagenae prioris contrariam, adeoque *negatiuam*, cum in experimento instituendo opera data sit, vt in vtraque lagena eadem esset vis electricae intensitas.

Duo haec phaenomena adeo perspicue ex proposita theoria consequuntur, vt ea etiam diuinare licuisset, quamuis paradoxon videatur, corpus aliquod in statu naturali positum contactu corporis *positiue* electrici fieri *negatiue* electricum; iam enim inuenimus, etiam inferiorem laminam esse *positiue* electricam. Hoc vero non obstante vidimus, vim laminae inferioris, diducta lamina superiore, euadere *attractiuam*; hincque corpus ipsi admotum, attrahendo in se aliquam fluidi eius electrici partem, non potest non reddere *negatiue* electricum. Neque etiam latet vis eius attractiuae origo; cum enim haec lamina iam contineat fluidi electrici quantitatem $= N\left(1 + \mathfrak{C}\, b\left(\frac{g-c}{g-c\,m}\right)\right)$; ea in se et extra nexum cum corpore resinoso solitarie spectata vtique est *positiue* electrica; et, si ab isto corpore separari posset, corpora ipsi admota redderet positiue electrica. Cum vero ista quantitas $N\left(1 + \mathfrak{C}\, b.\frac{g-c}{g-c\,m}\right)$

minor

minor ſit quantitate Φ, quae aequilibrio virium electricarum in Electrophoro ſine lamine ſuperiori ſpectato debetur, quamque §. 4. inuenimus $N(1 + \mathfrak{C} b)$; euidenter patet, hanc laminam, diducta ſuperiore, ex admotis ipſi corporibus tantum fluidi electrici, quantum huic aequilibrio deficit, in ſe attrahere debere, adeoque eodem modo agere, ac ſi eſſet *negatiue* electrica. Ceterum cum vis laminae ſuperioris prodierit *repulſiua*; per ſe perſpicitur, admota ipſi corpora naturalia fieri debere *poſitiue* electrica.

§. 8. Explicatis itaque omnibus Electrophori *ſuffulti* phaenomenis; iis, quae locum habent, dum Electrophorum *non eſt ſuffultum*, ſed cum corporibus non per ſe electricis cohaeret; vberius non eſt, quod immoremur, cui quippe caſui formulae modo inuentae facillime iam applicantur. Vnum tamen hic allegari meretur, cuius nimirum conſenſus cum theoria hanc non mediocriter confirmare cenſendus eſt.

VIII. *Electrophoro non ſuffulto imponatur lamina ſuperior, eaque contingatur digito, ac emicabit ſcintilla electrica, ſi iam digito hoc non remoto contingatur lamina inferior, nulla percipitur commotio. Si vero hic contactus fiat inuerſo ordine; commotio ſentitur aeque viuida, ac ſi Electrophorum fuerit ſuffultum.*

Dum Electrophorum erat *ſuffultum*, ordo contactuum erat *indifferens*. §. 6. nro. V. et commotionis electricae vtroque caſu productae cauſſam principia expoſita abunde declararunt; ex quibus cum facillime perſpiciatur, vim laminae inferioris repulſiuam, contactu ſuperioris increſcentem, ſtatim deſtrui a corporibus non per ſe electricis in ſtatu Electrophori non ſuffulti ipſi contiguis; vlteriori explicatione id non indiget, cur priori caſu nulla percipiatur commotio electrica. Poſteriori vero caſu fluidum laminae expellendum per digitum ipſi con-

tiguum et contactu laminae superioris eo ipso instanti, quo inferioris vis repulsiua reuiuiscit, aliqua fluidi sui electrici parte vi laminae superioris attractiua orbatum, celeritate et vehementia, commotionis electricae generatrice, vti experimento vidimus, propulsari debere, perspicue intelligitur.

§. 9. Atque hac experimentorum serie, integra absoluitur Electrophori quasi periodus, dum contactu laminarum adhuc iunctarum vis in iis electrica excitatur, eaque electricitate *onerantur* modo Lagenae Lugdunensis consimili; contactu vero laminarum separatarum explosio generatur electrica totumque Electrophorum in eum statum restituitur, quem in praecedentibus *communem* appellauimus, ex quo dein eadem haec experimentorum periodus denuo initium repetit, quamdiu resina intermedia in statu suo electricitatis *negatiuae* perseverat, qua destructa adeoque quantitate 𝔈 ad nihilum reducta, omnes hi effectus euanescunt, cum vires supra inuentae omnes hoc coefficiente sint affectae; intenso autem valore ipsius 𝔈, seu increscente electricitate negatiua resinae omnes quoque intenduntur; id quod praeter resinae attritum sequenti experimento facillime comprobatur:

IX. *Machinam electricam consuetam globo vitreo constantem ita disposui, vt discus metallicus, corio globum atterente inductus, esset perfecte suffultus, id est, vndique corporibus per se electricis cinctus; huic disco annexui catenam, filis sericis suspensam, eiusque alterum extremum imposui Electrophoro, cuius vim omnem ante destruxeram. Rotato tum globo, adeoque catena hoc, vti constat, negatiue electrificata, Electrophorum satis cito pristinum suum vigorem recuperauit.*

X. *Catena hac iam ab Electrophoro sublata eaque cum aliis corporibus non per se electricis coniuncta; aliam catenam con-*

conductori globi vitrei annexui, eiusque extremum alterum Electrophoro suffulto imposui. Rotato globo, viuida ex lamina Electrophori inferiori, emicuit, admoto corpore non per se electrico, scintilla; at postea omnis Electrophori vis penitus destructa deprehendebatur; sicque alternis vicibus Electrophori vim destruere et resuscitare licuit.

Quorum duorum experimentorum ratio cum ex superiori theoria dilucide perspiciatur; de iis plura non addo.

In applicatione calculi mathematici ad disquisitiones electricas, ob incognitas virium electricarum leges speciales, calculorum simplicitati saepius aliquid dandum est. Ita verbi caussa §. 3. ponitur $\alpha = 1$. Fluidi scilicet electrici quantitas in lamina inferiore inaequaliter distributa prodiit

$$N(1 + \lambda \mathfrak{D} - (1 - \lambda) \mathfrak{E});$$

quae, cum ante contactum nihil fluidi electrici in hanc laminam aliunde ingredi supponatur, adhuc erit $= N$; adeoque $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$; posito ergo hactenus tantum ad calculi proxime sequentis commoditatem $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$; erit $\lambda = \frac{1}{2}$; et tum $\alpha = 1$.

Ceterum huius maxime memorabilis inuenti electrici, etsi haud ideam primam, insignem tamen perfectionem ingenio Nobilis Itali, *Alex. Voltae*, deberi, publicis relationibus litterariis constat.

VERA THEORIA REFRACTIONIS ET DISPERSIONIS RADIORVM RATIONIBVS ET EXPERIMENTIS CONFIRMATA.

Auctore

L. EVLERO.

Hypothesis I.

§. 1.

Concipiantur plura media diaphana, quorum densitas continuo ita crescat, vt refractio radiorum, ex quolibet medio in sequens transeuntium, sit vbique eadem, aequalis scilicet refractioni ex primo medio in secundum. Seriem igitur horum mediorum designemus litteris A, A′, A″, A‴, etc. quorum primum A pro aëre vel etiam vacuo accipi poterit; hinc si differentiae inter ista media minimae vel infinite paruae statuantur, in hac serie omnino media diaphana continebuntur, quae a primo A eo magis erunt remota, quo maiorem habeant densitatem, vel quo maiorem refractionem producant, dum radii ex aëre in ea transeunt. Haec autem media perfecte diaphana assumimus, ita vt omnes radios lucis, ratione refractionis vtcunque discrepantes, aeque transmittant.

Hypothesis II.

§. 2. Sit iam $r:1$ ratio refractionis, quam subeunt radii rubri, dum ex medio primo seu aëre A in secundum medium A′ transeunt, atque eadem erit ratio refractionis, dum iidem radii ex medio quocunque nostrae seriei in sequens transmittuntur; Radios

Radios autem rubros hic vocamus eos radios, qui omnium minimam refractionem patiuntur.

Corollarium.

§. 3. Ex natura igitur refractionis manifestum est, si radii rubri ex aëre seu medio A per saltum immediate in medium A'' transeant, rationem refractionis fore $= rr : 1$; ac si immediate ex aëre A in medium A''' transeant, erit ratio refractionis $= r^3 : 1$ et ita porro. Vnde generatim patet, si radii ex aëre in medium quodcunque $A^{(i)}$ transeant, rationem refractionis fore $= r^i : 1$.

Scholion.

§. 4. Si media in nostra serie ratione densitatis infinite parum crescant, tum ratio refractionis $r : 1$ infinite parum rationem aequalitatis superabit; eritque ergo $r = 1 + \omega$, denotante ω fractionem infinite paruam; tum autem, si ex aëre A in aliud medium quantumuis densum, quod sit $A^{(i)}$, progrediamur, exponens i erit numerus infinitus; quae autem circumstantia nihil impedit, quo minus calculus pro omnibus mediis perinde institui possit, ac si nostra series A, A', A'', A''' per differentias finitas procederet.

Hypothesis III.

§. 5. Sit simili modo $v : 1$ ratio refractionis, quam radii violacei ex aëre A in medium A' transeuntes patiuntur; atque eandem refractionem patientur radii, qui ex quocunque alio medio in immediate sequens transibunt. Radios autem violaceos hic vocamus eos, qui omnium maximam refractionem patiuntur.

Corollarium.

§. 6. Hinc igitur vt ante sequitur, si radii violacei ex aëre A immediate in medium A'' transeant, rationem fore vt $vv : 1$: at si immediate in medium A''' transeant, refractionem fore

fore vt $v^{r}:1$ et ita porro. Si ergo generatim radii ex aëre A in medium quodcunque $A^{[i.]}$ transeant, ratio refractionis erit $= v^{i} : 1$; vbi notetur, si differentiae inter nostra media infinite parum crescant, etiam numerum v infinite parum vnitatem esse superaturum.

Problema.

§. 7. Si radii ex aëre in aliud medium quodcunque diaphanum transeant, fueritque radiorum rubrorum refractio vt $R:1$, radiorum autem violaceorum refractio vt $V:1$, definire relationem, quam numeri R et V inter se tenebunt.

Solutio.

§. 8. Designetur medium, de quo hic sermo est, charactere $A^{[i.]}$, et iam vidimus fore refractionem radiorum rubrorum $= r^{i}:1$, violaceorum vero $= v^{i}:1$; vnde sequitur fore $R = r^{i}$ et $V = v^{i}$. Sumendis igitur logarithmis erit $lR = i\,lr$ et $lV = i\,lv$, vnde eliminando numerum i, quo medium propositum continetur, erit $\frac{lR}{lV} = \frac{lr}{lv}$; vbi numeri r et v, vt vidimus, determinatos suos habent valores, non pendentes a natura medii, de quo hic quaestio est, ita vt $\frac{lr}{lv}$ sit quantitas prorsus constans, quae si ponatur $= \alpha$, erit $\frac{lR}{lV} = \alpha$, sicque relatio inter nostros numeros R et V innotescit.

Corollarium 1.

§. 9. Dummodo ergo ista constans α fuerit cognita, ex data refractione radiorum rubrorum $R:1$. statim concludere poterimus rationem refractionis radiorum violaceorum $V:1$. Cum enim sit $lV = \frac{1}{\alpha}.lR$, erit $V = R^{\frac{1}{\alpha}}$; sin autem vicissim constet ratio radiorum violaceorum $R:1$, inde deducetur ratio refractionis radiorum rubrorum $R:1$, cum sit $R = V^{\alpha}$.

Coroll.

Corollarium 2.

§. 10. Quod ſi ergo pro vnico medio diaphano, in quod radii ex aëre transſeant, explorata fuerit ratio refractionis tam radiorum rubrorum, quae ſit R : 1. quam violaceorum, quae ſit vt V : 1, hinc ſtatim concludetur $\alpha = \frac{lR}{lV}$; vbi perinde eſt, ex quonam canone hi logarithmi capiantur, cum logarithmi eorundem numerorum in omni canone eandem inter ſe ſeruent rationem: Statim autem atque ex vnico experimento cognitus fuerit numerus α, is ſimul pro omnibus refractionibus per alia media diaphana locum habebit.

Scholion 1.

§. 11. Si experimenta conſulamus, quae circa refractionem radiorum ex aëre in vitrum cryſtallinum anglicum, ſub nomine *Flintglaſs* cognitum, ſunt inſtituta in Comment. Acad. Reg. Scient. Pariſ. Tomo pro anno 1771 p. 464. comperimus fuiſſe $R = 1,5920$ et $V = 1,6229$; quare cum ſumendis logarithmis vulgaribus ſit $lR = 0,2019431$ et $lV = 0,2102918$, erit valor noſtrae literae $\alpha = \frac{2019431}{2102918}$; hinc igitur erit $l\alpha = 9,9824067$, vnde prodit $\alpha = 0,96030$ et $\frac{1}{\alpha} = 1,04134$, ita vt ſit proxime $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}$, et $\alpha = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$. Iſtud exemplum imprimis idoneum eſt viſum, ex quo valor litterae α determinetur; quia haec vitri ſpecies, vtpote albiſſima, omnes radios liberrime transmittit et ſatis ingens diſcrimen inter refractionem radiorum rubrorum et violaceorum parit; ex quo errores, in huiusmodi experimentis vix euitandi, eo minus ſunt pertimeſcendi. Interim tamen, quia haec experimenta ope lentis ex hoc vitro paratae, interpoſitione fruſtuli vitri ſiue rubri ſiue violacei, in camera obſcura ſunt facta, locum imaginis ſolaris maxime diſtinctae non tam exacte definire licuit; vnde, ſi aliae rationes ſuaſerint hunc valorem litterae α non nihil immutare, haud dubitabimus.

Scholion 2.

§. 12. Quoniam in loco citato etiam experimenta afferuntur, quibus tam refractio radium rubrorum quam violaceorum, ex aëre in aquam distillatam transeuntium, est definita, aqua vero etiam omnes radios liberrime transmittere est censenda, haec quoque experimenta ad calculum nostrum reuocemus, indeque valorem litterae nostrae α deriuemus. Reperitur autem ibi refractio radiorum rubrorum, seu $R = 1,3293$, violaceorum autem $V = 1,3406$; vnde cum sit

$$lR = 0,1236230 \text{ et } lV = 0,1272992 \text{ erit}$$

$$\alpha = \frac{1236230}{1272992} \text{ hincque } l\alpha = 9,9872735$$

vnde prodit $\alpha = 0\,97112$ et $\frac{1}{\alpha} = 1,02974$; vnde proxime sequitur fore $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{34}$ et $\alpha = 1 - \frac{1}{34}$. Discrimen igitur inter hos binos valores litterae α maius videtur, quam vt incertitudini experimentorum tribui possit; verum tamen si perpendamus, in posteriore experimento differentiam refractionis tam fuisse exiguam, vt leuissimus error in obseruatione imaginum haud mediocriter litterae α valorem mutare debuerit, tum vero, (nullae enim circumstantiae huius posterioris experimenti commemorantur) si aqua intra binas meniscos vitreas fuerit inclusa, vti videtur, conclusio inde deducta non exiguae dubitationi obnoxia erit censenda; ita vt littera α notabiliter maior prodire potuisset. Quia vero etiam prius experimentum non ab omni errore immune pronunciare possumus, fortasse a veritate vix aberrabimus, si litterae α valorem aliquanto maiorem quam $\frac{23}{24}$ tribuamus, veluti sumendo $\alpha = \frac{27}{28}$ vel $\frac{26}{27}$. Certe enim hoc discrimen non tanti videtur momenti, vt theoria hic stabilita euerti sit censenda.

Theorema.

§. 13. Si radii lucis ex medio quocunque diaphano M in aliud quodcunque N transmittantur, et ratio refractionis radio-

diorum rubrorum fuerit, vt $\mathfrak{R} : 1$, violaceorum vero vt $\mathfrak{V} : 1$, erit quoque perpetuo $\frac{l\,\mathfrak{R}}{l\,\mathfrak{V}} = \alpha$, denotante α eundem numerum, quem ante assignauimus.

Demonstratio.

§. 14. Statuamus primo radios ex aëre in medium prius M transire, ac tum esse refractionem radiorum rubrorum vt $R : 1$, violaceorum vero vt $V : 1$; tum vero, si radii immediate ex aëre in alterum medium M transeant, sit refractio radiorum rubrorum $= R' : 1$, et violacorum $= V' : 1$; quibus positis erit pro vtroque casu $\frac{l\,R}{l\,V} = \alpha$, et $\frac{l\,R'}{l\,V'} = \alpha$. Nunc igitur, si radii immediate ex medio M in medium N transeant, erit ratio refractionis radiorum rubrorum vt $R' : R$ et violaceorum vt $V' : V$, sicque erit $\mathfrak{R} = \frac{R'}{R}$ et $\mathfrak{V} = \frac{V'}{V}$; hinc fiet

$$l\,\mathfrak{R} = l\,R' - l\,R \text{ et } l\,\mathfrak{V} = l\,V' - l\,V;$$

quia igitur est $l\,R' = \alpha\, l\,V'$ et $l\,R = \alpha\, l\,V$ erit vtique $\frac{l\,\mathfrak{R}}{l\,\mathfrak{V}} = \alpha$.

Problema.

§. 15. Data refractione radiorum mediorum, dum ex medio quocunque diaphano in aliud transeunt, quae sit $= n : 1$, definire refractionem radiorum extremorum, hoc est, rubrorum et violaceorum pro eodem transitu, siue, quod eodem redit, definire dispersionem.

Solutio.

Cum refractio radiorum extremorum tam parum discrepet, vt differentia tanquam infinite parua spectari possit, ponamus refractionem radiorum rubrorum esse $= n - dn : 1$, violaceorum vero vt $n + dn : 1$; ita vt dn id ipsum significet, quod vulgo dispersio radiorum vocari solet. His positis erit, vt ante assumsimus, $\mathfrak{R} = n - dn$ et $\mathfrak{V} = n + dn$, vnde fit

$$l\,\mathfrak{R} = l(n - dn) = l\,n - \frac{dn}{n} \text{ et } l\,\mathfrak{V} = l\,n + \frac{dn}{n};$$

quare cum ſit $l\mathfrak{R} = \alpha l\mathfrak{V}$, erit $ln - \frac{dn}{n} = \alpha ln + \frac{\alpha dn}{n}$, vnde colligitur $dn = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} n l n$; vbi logarithmi hyperbolici ſunt ſumendi; ſin autem logarithmis vulgaribus vti vellemus, coefficiens $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ ſecundum cognitam rationem mutari debet. Cum igitur α habeat valorem fixum, patet diſperſionem dn ſemper proportionalem eſſe formulae nln. Quod ſi ergo fuerit, vt exprimentum prius dederat, $\alpha = \frac{23}{24}$, erit $dn = \frac{1}{47} nln$; ſin autem, vt alterum experimentum dederat, fuerit $\alpha = \frac{33}{34}$, erit $dn = \frac{1}{67} nln$. Ob rationes autem iam allegatas prior determinatio veritati magis conſentanea videtur.

Scholion 1.

§. 16. Summus *Newtonus*, et qui olim refractionem vitri communis accuratius ſunt perſcrutati, aſſignarunt rationem refractionis mediae vt 1, 55 : 1; radiorum autem rubrorum refractionem vt 1, 5367 : 1; violaceorum vero vt 1, 5593 : 1; ita vt poſito $n = 1,5480$ ſit $dn = 0,0113$. Quod ſi ergo hos valores cum ſuperioribus formulis comparemus, reperiemus

$$\alpha = \frac{l(n-dn)}{l(n+dn)} = \frac{l\,1,5367}{l\,1,5593} = \frac{1865891}{2929796}$$

ſiue $\alpha = 1 - \frac{1}{30}$, qui valor iam inter binos praecedentes incidit, vnde ſuſpicio noſtra confirmatur, eſſe $\alpha = \frac{27}{28}$ vel adeo $\frac{29}{30}$; neque enim accuratiorem determinationem per experimenta exſpectare licet parumque refert, ſiue α aliquanto maiorem ſiue minorem habeat valorem, cum ſufficiat noſſe, eum eſſe conſtantem.

Scholion 2.

§. 17. Si experimenta ante allata accuratius perpendamus, rationes non deſunt, nobis perſuadentes, diſcrimen refractionis in vitro cryſtallino anglico nimis magnum eſſe aſſignatum: inde enim ſequeretur, fore diſperſionem vitri coronarii ad diſperſionem iſtius cryſtalli vt 18 : 31 proxime, quam tamen ipſe *Dollondus* non vltra 2 : 3, hoc eſt 18 : 27, deprehendiſſe affirmat; vnde diſperſio ſupra memorata minui deberet in ratione

31:

31 : 27, quo facto loco valoris $\alpha = \frac{23}{24}$ prodiisset $\alpha = \frac{27}{28}$; sicque huic valori satis tuto confidere poterimus. Hinc igitur concludere licet, verum valorem litterae α intra limites $\frac{27}{28}$ et $\frac{32}{33}$ cadere, qui iam sibi sunt tam vicini, vt ab experimentis, quae semper non exiguae incertitudini sunt inuoluta, maior praecisio exspectari nequeat. Verum tamen principium, cui nostrum ratiocinium innititur, accuratius perpendamus, quod manifesto in sequenti hypothesi continetur.

Hypothesis fundamentalis.

§. 18. *Si radii rubri, ex medio diaphano* P *in medium* Q *transeuntes, eandem patiantur refractionem, quam radii itidem rubri ex medio* M *in medium* N *transeuntes, tum etiam radii violacei, ex medio* P *in medium* Q *transeuntes, eandem patientur refractionem, quam iidem radii violacei, ex medio* M *in medium* N *transeuntes.*

Tota ergo quaestio huc redit, vtrum ista hypothesis veritati sit consentanea nec ne; ac primo quidem ingenue fateor, me eius demonstrationem rigorosam exhibere neutiquam posse. Interim tamen nullam video rationem satis firmam, cur eius veritatem in dubium vocare liceat; saltem discrimen, quod hactenus in experimentis allatis deprehendimus, neutiquam sufficere videtur, vt hanc hypothesin repudiemus: nisi ergo grauiores rationes in contrarium afferri queant, hanc hypothesin inter veritates physicas referre non dubitamus; quocirca obiectiones, quae contra hoc ratiocinium, quod iam dudum in medium attuli, sunt factae, exacto examini subiiciemus.

Obiectio 1.

§. 19. Ante omnia autem haec hypothesis oppugnata est experimento notissimo *Dollondi*, quo inuenit: dispersionem radiorum in vitro coronario, dicto *crown-glass*, se habere ad dispersionem in crystallo anglico, *flint-glass* vocato, vti 2 : 3, cum

tamen secundum meas determinationes longe alia ratio subsistere deberet.

Ad hanc obiectionem sequentia respondeo:

§. 20. Primo videatur, quantopere haec ratio 2 : 3 a superiori determinatione dissideat. Hunc in finem consideretur refractio media, quam *Dollondus* pro vitro coronario vt 1,53 : 1, pro crystallo autem anglica vt 1,58 : 1 assignauit; pro priore ergo erat $n = 1,53$, vnde deducimus dispersionem $dn = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} n l n = 0,2825 \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$; pro posteriore autem ob $n = 1,58$ dispersio reperitur $dn = 0,3139 \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$; sicque ratio inter has dispersiones colligitur 2825 : 3139, hoc est proxime vt 28 : 31, quae vtique enormiter discrepat a ratione 2 : 3 et nullo modo incertitudini experimenti tribui potest.

§. 21. Verum si indolem vtriusque vitri diligentius examinemus, prior species coronaria tanto gradu viriditatis est praedita, vt manifesto radiis extremis, rubris scilicet et violaceis, transitum penitus negari debet. Cum igitur in superiori ratiocinio expresse supposuissem, diuersa media radios lucis transmittentia ita perfecte esse pellucida, vt omnibus radiis liberrimus transitus concedatur, istud experimentum nostram opinionem minime infringit, propterea quod vitrum coronarium vtrinque radios extremos, rubros scilicet et violaceos, quasi extinxit, vnde sine dubio multo minor differentia inter radios extremos actu transmissos resultare debuit, cum contra altera species (*flintglass*) vtpote candida omnibus radiis liberum transitum concesserit. Ob qualitatem igitur vitri coronarii, qua id colore subuiridi est tinctum, omnis dubitatio penitus diluitur, atque adeo multo maius discrimen inter vtramque dispersionem produci posset, si vitro magis viridi vti voluerimus; quandoquidem tandem, si hoc vitrum colore viridi satis spisso tingeretur, omnis plane dispersio euanesceret; dum scilicet soli radii virides

rides transmitterentur: neque igitur ex hoc experimento vllum argumentum contra validitatem meae ſententiae peti poteſt.

Obiectio 2.

§. 22. Maximam autem vim ad opinionem meam euertendam ſuppeditat ſine dubio feliciſſimus ſucceſſus, quo idem artifex *Dollondus* tam egregia teleſcopia conſtruxit, quae ab omni confuſione colorum immunia deprehenduntur, ob quam rationem etiam *achromatica* appellari ſolent. Niſi enim aſſumta illa diſperſionis ratio 2 : 3, cui haec teleſcopia ſunt ſuperſtructa, veritati eſſet conſentanea, tam exoptatum effectum producere non potuiſſet. Verum contra hanc obiectionem ſequentia reſpondeo.

§. 23. Primo quidem ſine vlla haeſitatione concedo, per iſta teleſcopia obiecta ſine vllo margine colorato repraeſentari, in quo vtique praecipua eorum proprietas cernitur: neque tamen idcirco omnem confuſionem, quae ex diuerſa radiorum refractione naſcitur, penitus tolli cenſeo. In dioptrica enim luculenter demonſtraui, etiam ope vnius generis vitri eiusmodi inſtrumenta parari poſſe, quae nullum veſtigium marginis colorati pariant, atque adeo oſtendi, quomodo quouis caſu lentes oculares diſponi oporteat, vt apparitio circa marginem obiectorum prorſus euaneſcat. Hic ſcilicet effectus obtinetur, ſi omnes radii extremi, quantumuis colore a ſe inuicem diſcrepent, ſecundum eandem directionem in oculum intromittantur; tum enim hi radii, vtut diuerſi, colorem naturalem exhibebunt, ita vt obiecta bene terminata conſpici queant. Quemadmodum igitur iſte effectus per idoneam lentium ocularium diſpoſitionem obtineri queat, in Dioptrica mea fuſius explicaui, ac pro quouis caſu formulas exhibui, quas tam in teleſcopiis quam microſcopiis obſeruari neceſſe eſt.

§. 24.

§. 24. Totum ſcilicet negotium huc redit, vt vltimae imagines, per quotcunque lentes repraeſentatae, vnde radii in oculum mittuntur, ita disponantur, vt, ſi verbi gratia *v v* exhibeat imaginem a radiis violaceis formatam et *r r* eam, quae a radiis rubris formatur, inter quas, imagines a reliquis coloribus natae, ordine ſe inuicem inſequantur, vt, inquam, radii per extremitates ſingularum imaginum tranſeuntes in ipſo oculo concurrant; tum enim manifeſtum eſt, ob perfectam vnionem radiorum diuerſicolorum extremorum in oculo nullum marginem coloratum generatum iri, ita vt talia teleſcopia etiam pro achromaticis haberi poſſint, etiamſi omnes lentes ex eadem vitri ſpecie fuerint confectae. Quin etiam iam olim talia teleſcopia fuerunt confecta, quae obiecta ſine vllo margine colorato exhibuerunt. Neque vero hoc modo omnis plane confuſio a diuerſa radiorum refractione oriunda tollitur, quae ſine dubio eo maior eſſe debet, quo maiore interuallo extremae imagines *v v* et *r r* a ſe inuicem fuerint remotae; quoniam hoc modo ſingula obiecti puncta in fundo oculi non amplius per puncta ſed per exiguos circellos exprimentur, qui quo fuerint maiores, eo maiorem confuſionem gignere debent, etiamſi a margine colorato penitus ſunt liberati.

§. 25. Quanquam igitur celeberrimo *Dollondo* lubens largior, in eius tubis achromaticis nullum plane marginem coloratum conſpici, hunc tamen eximium effectum non tam lenti obiectiuae ex diuerſo vitro formatae, quam idoneae diſpoſitioni lentium ocularium potiſſimum, tribuendum eſſe arbitror, in qua ſententia eo magis confirmor, quod, etiamſi lens obiectiua omnibus numeris eſſet perfecta, tamen lentes oculares, niſi rite inter ſe fuerint diſpoſitae, ſemper marginem coloratum producere deberent; atque haec ſine dubio eſt ratio, cur ipſe *Dollondus* plerumque numerum lentium ocularium ad quinarium vsque augeat, quia ſine dubio paucioribus hunc ſcopum

obtineri

obtineri non posse putat, cum tamen, vti ostendi, tres lentes sufficere potuissent.

§. 26. Totius ergo huius controuersiae cardo in hac quaestione vertitur, vtrum lentes obiectiuae siue dupplicatae siue triplicatae, quibus *Dollondus* vtitur, nullam plane confusionem pariant? circa quam quaestionem ante omnia obseruo, omnino necessarium esse, vt confusio ab apertura lentium oriunda prorsus e medio tollatur; quod cum per lentes ex eadem vitri specie paratas perinde praestari possit, ac diuersas species adhibendo, primo quidem agnosco, artificem hunc sollertissimum istam confusionem optimo cum successu e medio sustulisse; ratione autem alterius confusionis speciei plus ipsi concedendum non arbitror, quam per idoneam lentium ocularium dispositionem vitium marginis colorati feliciter esse euitatum, neutiquam vero hanc confusionem prorsus esse remotam, idque ob hanc ipsam rationem, quod dispersio radiorum, quam supponit, a veritate non mediocriter aberrat. Interim tamen istae lentes obiectiuae multo certe minorem confusionem parere debent, quam si ex vnica vitri specie essent paratae; atque his rationibus inductus affirmare non dubito, istas lentes obiectiuas ad multo maiorem perfectionis gradum euehi posse, si verae dispersionis rationi, quam formula supra allata ostendit, superstruantur. Verum quia haec ratio dispersionis multo minor est, quam a *Dollondo* assumitur, si ea vti vellemus, lentes obiectiuae multo minorem aperturam essent admissurae, ita vt inde nobis neutiquam eum effectum polliceri possemus, quem expectamus; quoniam pro data multiplicatione multo longioribus tubis esset opus; vnde omnino operae pretium erit accuratius inuestigare, quantum lentes obiectiuae triplicatae a *Dollondo* paratae, atque etiam eae, quas egomet ex eadem dispersionis ratione nimis magna construere docui, iis antecellant, quae pro eadem distantia focali et eadem apertura ex vnica vitri specie parari possent, quod examen hic subiicio:

EXAMEN
Lentium triplicatarum, ex duplici vitro paratarum, vbi ratio disperſionis minis magna aſſumitur.

§. 27. Quo igitur huiusmodi lentes facilius diiudicare queamus, primo ſimilem lentem compoſitam, ex eadem vitri ſpecie paratam, contemplemur, quae eandem aperturam pro data diſtantia focali $= k$ admittat ſimulque nullam plane confuſionem, ex apertura oriundam, producat; ac ſi ratio refractionis pro hac vitri ſpecie ponatur vt $n : 1$, ob $dn = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} n l n$ (vbi breuitatis gratia loco $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ ſcribamus δ, ita vt ſecundum experimentum *Newtoni* ſit $\delta = \frac{1}{26}$, et ex cryſtallo anglica ſecundum Cel. *Iaurat* $\delta = \frac{1}{21\frac{1}{2}}$, vnde ingenere ſtatui poſſe videtur $\delta = \frac{1}{23}$) erit $dn = \delta n l n$; tum ſpatium, per quod imago diffunditur, ſequenti modo colligetur. Quia hoc ſpatium ſemper idem prodit, quotcunque lentes adhibeantur, ponamus vnicam lentem vſurpari, cuius diſtantia media ſit $= p$, eritque $p = k$; tum vero haec lens ſit vtrinque aeque conuexa, radio conuenitatis exiſtente $= f$, erit $f = 2(n-1)p = 2(n-1)k$. Quare cum pro radiis diuerſae indolis quantitas f maneat eadem, dum litterae n et k variantur, erit $dk = -\frac{dn}{n-1}. k$, quod eſt dimidium ſpatium, per quod imago diffundetur; vnde ob $dn = \delta n l n$ erit totum ſpatium $= 2\delta \frac{n l n}{n-1} k$. Hinc igitur ſumto $n = 1,55$ erit $ln = 0,1903317$, qui per $\frac{n}{n-1} = \frac{31}{11}$ multiplicatus dat $\frac{n l n}{n-1} = 0,53638$ hincque ſpatium diffuſionis erit $= 1,07276. \delta k$.

§. 28. Conſideremus nunc lentem triplicatam, ex duplici vitro paratam, quae itidem nullam plane confuſionem ob aperturam pariat, cuius diſtantia focalis media quoque ſit $= k$; tum vero primae lentis conuexae diſtantia focalis media ſit $= p$; mediae lentis, concauae, diſtantia focalis $= -q$, at tertiae lentis iterum conuexae diſtantia focalis $= r$, eritque, ſiquidem interualla inter has ternas lentes negligantur,

$\frac{1}{k} =$

$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Porro assumamus primam ac tertiam lentem ex tali vitro parari, cuius refractio media sit $= m : 1$, pro media autem lente refractio $= n : 1$. His positis, quia nunc tantum ad rationem dispersionis respicimus, perinde erit quaenam figura lentibus tribuatur, dummodo eandem distantiam focalem seruant; singulas igitur vtrinque aequales statuamus (etiamsi reuera tales non fuerint) sitque radius vtriusque faciei pro prima lente $= f$, pro secunda $= -g$ et pro tertia $= h$, eritque ob rationem refractionis datam

$$f = 2(m-1)p$$
$$g = 2(n-1)q \text{ et}$$
$$h = 2(m-1)r$$

vnde fit

$$\frac{1}{p} = \frac{2(m-1)}{f}; \quad \frac{1}{q} = \frac{2(n-1)}{g}; \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{2(m-1)}{h};$$

quibus valoribus substitutis nostra aequatio erit

$$\frac{1}{k} = \frac{2(m-1)}{f} - \frac{2(n-1)}{g} + \frac{2(m-1)}{h} = 2(m-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) - \frac{2(n-1)}{g},$$

vbi quantitates f, g et h sunt constantes, dum ob diuersam radiorum indolem tam numeri m et n quam distantia k variantur. Differentietur igitur nostra aequatio, et ob $dm = \delta m l m$ et $dn = \delta n l n$ erit $-\frac{dk}{kk} = 2\delta m l m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) - \frac{2\delta n l n}{g}$, vbi iam dk denotat dimidium spatium diffusionis, quod igitur euanesceret, si esset $m l m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) = \frac{n l n}{g}$.

§. 29. Ponamus autem nunc rationem dispersionis suppositam esse vt $\mu : \nu$, ita vt fuerit $\mu\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) = \frac{\nu}{g}$; ex hac scilicet aequatione determinatam esse relationem inter quantititates f, g et h, seu potius inter distantias focales p, q et r. Cum igitur hinc sit $\frac{1}{f} + \frac{1}{h} = \frac{\nu}{\mu g}$, si hunc valorem in expressione confusionis substituamus, habebimus

$$-\frac{dk}{kk} = \frac{2\nu\delta m l m}{\mu g} - \frac{2\delta g l n}{g} = \frac{2\delta}{g}\left(\frac{\nu m l m}{\mu} - n l n\right)$$

vnde colligimus $dk = \frac{2\delta kk}{g}(nln - \frac{\nu}{\mu}mlm)$ ficque totum fpatium diffufionis erit $= \frac{4\delta kk}{g}(nln - \frac{\nu}{\mu}mlm)$, quod nifi fuerit notabiliter minus quam $1,07276.k$, lentes iftae ex duplici vitro paratae neutiquam fimilibus lentibus ex eodem vitro paratis praeftare funt cenfendae.

§. 30. Secundum hanc formulam igitur primum examinemus eas lentes triplicatas, quibus in fuperiori volumine commentariorum pro perficiendis telefcopiis et microfcopiis fumus vfi, vbi erat pro vitro coronario (*crownglafs*) $m = 1,53$ et pro cryftallo anglica (*flintglafs*) $n = 1,58$, tum vero affumferam $\mu : \nu = 3:4$. Ex his igitur valoribus fit $nln = 0,31388$ et $mlm = 0,28258$; vnde ob $\frac{\nu}{\mu} = \frac{4}{3}$ fpatium diffufionis erit

$$- \frac{4\delta kk}{g}.0,06289 \text{ fiue } = 0,25156.\frac{\delta kk}{g}.$$

Erat autem ibi circiter $g = \frac{3}{10}k$, vnde ifta confufio cenfenda erit $= 0,83854.\delta k$, quae ergo non multo minor eft quam $1,07276\delta k$. hoc eft quam fi lentem triplicatam ex eodem vitro pararemus.

§. 31. Examinemus eodem modo lentem illam triplicatam, quam loco citato fub finem commemorauimus, vbi erit $m = 1,53$; tum vero $n = 1,60$ et $\frac{\nu}{\mu} = 1,53$. Pro hoc igitur cafu erit vt ante $mlm = 0,28238$, at $nln = 0,32659$ vnde colligitur fpatium diffufionis $= -\frac{4\delta kk}{g}.0,14978$; vbi fignum nihil turbat, quoniam etiam cafu eiusdem vitri valor pro dk negatiuus prodiit, et hic tota quaeftio circa abfolutam quantitatem fpatii diffufionis verfatur; ibi autem erat circiter $g = \frac{11}{20}k$, vnde fpatium hoc erit $= 1,0893.\delta k$. Hoc ergo fpatium omnino aequalis eft cenfendum illo, quod ex vnica vitri fpecie nafcitur, ita vt geminum vitrum vix vllam praerogatiuam mereri videatur, et egregius ille effectus, qui iftis lentibus tribuitur, vnice inde veniat, quod primo nullam confufionem ab apertura oriundam pariant; deinde vero potiffimum, quod lentes ocula-

oculares ita ſint ordinatae, vt apparitio marginis colorati ad nihilum fuerit perducta.

§. 32. Tota autem haec controuerſia vnico experimento facile dirimi poterit in camera obſcura, dum lentis triplicatae, qualem conſtruere docui, diſtantia focalis tam pro radiis rubris quam violaceis exploratur. Si enim hac duae diſtantiae aequales deprehenduntur, ſententia *Dollondi*, circa directam diſperſionem radiorum, in vtraque vitri ſpecie, penitus erit confirmata, et fateri coactus ero, meam theoriam funditus eſſe euerſam; ſin autem inter binas illas diſtantias focales diſcrimen reperiatur, quod pro lentibus triplicatis fuerit vel $0,838\,\delta k = 0,036\,k = \frac{1}{28}k$, vel pro poſteriore genere $1,09\,\delta k = 0,047\,k = \frac{1}{21}k$, denotante k diſtantiam focalem mediam: hoc certum erit ſignum, meam theoriam veritati eſſe conſentaneam. Haec concluſio etiam valebit, ſi interualla iſta aliquanto minora inueniantur; quoniam huiusmodi lentes obiectiuae ob viriditatem radios extremos non transmittunt. Simul vero etiam, ſi hoc eueniat, certi erimus, talem diffuſionem imaginum, viſioni diſtinctae non multum nocere, dummodo lentes oculares ita fuerint diſpoſitae, vt margo coloratus penitus deſtruatur.





DE FIGVRA QVAM VENTVS FLVIDO STAGNANTI INDVCERE VALET.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quam diu tam ſuperficies fluidi quam directio venti perfecte eſt horizontalis, nullum eſt dubium, quin fluidum in hoc ſtatu perſiſtere queat; quando autem a vi quacunque de hoc ſtatu fuerit perturbatum, vtique fieri poterit, vt fluidum etiam extra ſtatum libellae a vento in aequilibrio conſeruari poſſit. Cuiusmodi igitur figura his caſibus fluido a vento induci debeat, hic definire conſtitui.

Tab. II. Fig. 4. §. 2. Repraeſentet igitur ſuper axe horizontali OB curua AYB figuram, in qua fluidum ab actione venti, ſecundum directionem horizontalem VY impingentis, in quiete perſiſtere poſſit, atque ſuper recta verticali AO capiatur abſciſſa $AX = x$, cui reſpondeat applicata $XY = y$ et arcus $AY = s$ ſitque punctum A in ſuperficie fluidi maxime eleuatum; vnde, quia fluidum in aequilibrio conſiſtere aſſumitur, eius preſſio in elementum $Yy = ds$ debita erit altitudini $AX = x$, ipſa vero preſſionis quantitas $= x\,ds$, ſiue aequabitur ponderi, quod habitura eſſet columna eiusdem fluidi baſi ds inſiſtentis, cuius altitudo foret $= x$; huius vero preſſionis directio erit recta Yu normalis ad ipſam curuam in puncto Y.

§. 3. Ponatur nunc venti celeritas $= c$, ita vt c ſit ſpatium, quod ventus ſingulis minutis ſecundis percurrat, cuius ergo

ergo directio V Y in elementum $Yy = ds$ incidit ſub angulo VYy, cuius ſinus eſt $= \frac{dx}{ds}$. Quod ſi iam g denotet altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, iſta venti celeritas debita erit altitudini $\frac{cc}{4g}$. Vnde ſi ventus directe in elementum Yy impingeret, eius vis aequalis foret ponderi columnae aëreae, cuius baſis $= ds$, altitudo vero $= \frac{cc}{4g}$; quare ſi grauitas ſpecifica fluidi fuerit ad aërem vt n ad 1, pondus iſtius columnae, ad maſſam fluidi reductum, erit $= \frac{cc\,ds}{4ng}$.

§. 4. Hoc modo ſe res haberet ſi ventus perpendiculariter incideret; quia autem ſub angulo, cuius ſinus $= \frac{dx}{ds}$, incidit, ſecundum opinionem vulgo receptam iſta vis diminui debet in ratione quadrati ſinus anguli incidentiae, ita vt tota vis venti futura eſſet $\frac{cc\,ds}{4ng} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = \frac{cc\,dx^2}{4ng\,ds}$, cuius directio erit recta Y N, pariter ad curuam normalis, ſed intus directa; ex quo iam manifeſtum eſt, fluidum in aequilibrio conſiſtere poſſe, ſi iſta vis aequalis fuerit vi ante definitae, extrorſum ſecundum Yn ſollicitanti; quam ob rem hinc oritur iſta aequatio: $x\,ds = \frac{cc\,dx^2}{4ng\,ds}$; hacque aequatione determinabitur natura curuae A Y B, in qua fluidum ab actione venti conſeruari poterit.

§. 5. Hinc igitur facile deducitur aequatio inter abſciſſam $AX = x$ et arcum $AY = s$, cum ſit

$$x\,ds^2 = \frac{cc\,dx^2}{4ng} \text{ hincque } ds = \frac{c\,dx}{2\sqrt{ngx}}$$

ideoque integrando $t = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{ng}}$, ita vt arcus A Y proportionalis ſit radici quadratae ex abſciſſa; vnde patet, curuam hanc fore *cycloidem*. Sin autem applicatam $XY = y$ in calculum introducere velimus, ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$ habebimus hanc aequationem: $dy = dx\sqrt{\frac{cc}{4ngx} - 1}$. Ponatur hic $\frac{cc}{4ng} = 2a$, vt fiat $dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, ſiue $dy = \frac{dx(2a-x)}{\sqrt{2ax-xx}}$,

cuius

cuius integrale est

$$y = \sqrt{2ax - xx} + \int \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}} \text{ siue}$$

$$y = \sqrt{2ax - xx} + a\,\text{A fin.}\frac{\sqrt{2ax - xx}}{a}$$

quae est notissima cycloidis proprietas.

§. 6. Quoniam hic littera a exprimit radium circuli genitoris istius cycloidis, eius tota altitudo erit $= 2a$. Quia igitur posuimus $2a = \frac{cc}{4ng}$, tota altitudo istius cycloidis erit $\frac{cc}{4ng}$; vnde, vt exemplum contemplemur, si celeritas venti singulis minutis secundis fuerit 32 pedum, existente $g = 16$ ped. et pro aqua capiatur $n = 800$, altitudo huius cycloidis erit $\frac{1}{50}$. Hic autem probe tenendum est, aquam in hoc situ consistere non posse, nisi a pariete firmo AO coërceatur, ne diffluere possit.

§. 7. Cum autem per experimenta nuper instituta compertum sit, actionem fluidorum eo magis a ratione dupplicata sinus anguli incidentiae recedere, quo minor fuerit iste angulus, ac tandem pro minimis angulis ad rationem simplicem proxime accedere, consideremus etiam hanc hypothesin, qua impulsio venti secundum YN sit $= \frac{ccdx}{4ngds}$, vnde nascitur ista aequatio: $nds = \frac{ccdx}{4ng}$, siue $ds\frac{ccdx}{4ngx}$, ita vt $\frac{xds}{dx} = \frac{cc}{4ng}$, hoc est quantitas constans.

§. 8. Pro hac iam curua cognoscenda, per summitatem fluidi A ducatur horizontalis AD, ad quam ex Y agatur tangens YV, hincque ad XY perpendiculum TU et ex Y perpendiculum Yu, atque ob triangula TYA et Yyu similia erit ipsa tangens $YT = \frac{xds}{dx}$, quae ergo, cum aequetur quantitati constanti, indicat, hanc curuam esse *tractoriam*, quae oritur, si fili TY, cuius longituodo $= \frac{cc}{4ng}$, alter terminus T per horizontalem DA producitur, dum alteri termino Y alligatum est corpusculum, quod tardissime super plano protrahatur.

tur. Vnde patet, ipsum punctum summum A in infinitum sinistrorsum remoueri; initium ergo huius curuae erit B, vbi tangens BD est verticalis $= \frac{cc}{4ng}$.

§. 9. Quod si iam pro hac curua loco ds scribamus $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, aequatio prodit $x\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{cc}{4ng} dx = b\,dx$ posito $\frac{cc}{4ng} = b$, ita vt b exhibeat longitudinem fili protracti; vnde deducitur $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{bb - xx}$, quae aequatio, posito $\sqrt{bb - xx} = z$, vt sit $xx = bb - zz$ et $\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{bb - zz}$, abit in hanc: $dy = -\frac{zzdz}{bb - zz} = dz - \frac{bbdz}{bb - zz}$, ergo integrando $y = z - \frac{1}{2} b\,l\frac{b + z}{b - z}$ consequenter

$$y = C + \sqrt{bb - xx} - \frac{1}{2} b\,l\frac{b + \sqrt{bb - xx}}{b - \sqrt{bb - xx}}.$$

Vnde patet, sumto $x = 0$, fore $y = C + b\,l\,\infty$, vnde intelligitur, punctum A sinistrorsum in infinitum elongari.

§. 10. Combinemus iam istas duas hypotheses ita, vt forsitan ad veritatem satis prope accedamus; posito nimirum angulo incidentiae $= \Phi$, statuamus impulsionem venti proportionalem esse huic formulae: $(1 - \alpha)\,\text{sin.}\,\Phi^2 + \alpha\,\text{sin.}\,\Phi$, vbi α sit fractio satis parua. Hinc enim, quando angulus Φ parum a recto discrepat, vt sit sin. $\Phi = 1$, haec formula dabit 1. Sin autem angulus Φ fuerit valde paruus, vt sin. Φ^2 quasi euanescat prae sin. Φ, impulsio sequetur rationem simplicem α sin. Φ. Quare cum nostro casu sit sin. $\Phi = \frac{dx}{ds}$, vis a vento orta erit $\left(\frac{ccds}{4ng}(1 - \alpha)\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{\alpha dx}{ds}\right) = x\,ds$, vnde posito $\frac{cc}{4ng} = 2a$, aequatio nostra erit $\frac{xds}{2a} = (1 - \alpha)\frac{dx^2}{ds} + \alpha\,dx$, ideoque $\frac{xds^2}{2a} = (1 - \alpha)\,dx^2 + \alpha\,dx\,ds$, quae posito $ds = r\,dx$ abit in hanc: $\frac{xrr}{2a} = 1 - \alpha + \alpha r$, vnde deducitur $x = \frac{2a(1 - \alpha + \alpha r)}{rr}$. Quare cum sit $s = \int r\,dx = rx - \int x\,dr$, hinc habebimus $\int x\,dr = -2(1 - \alpha)\frac{a}{r} + 2\alpha a\,l\,r$, sicque abscissa x definitur per nouam variabilem r, per quam etiam arcus s ita exprimitur, vt sit $s = 2a\alpha + \frac{4a(1 - \alpha)}{r} - 2a\alpha\,l\,r$.

 §. 11.

§. 11. Sin autem aequationem inter coordinatas x et y desideremus, ponamus $dy = p\,dx$ et ob $ds = dx\sqrt{1+pp}$ aequatio nostra erit $\frac{x(1+pp)}{2a} = 1 - \alpha + \alpha\sqrt{1+pp}$; vnde colligitur $x = \frac{2a(1-\alpha)}{1+pp} + \frac{2a\alpha}{\sqrt{1+pp}}$; tum vero erit

$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp$. Cum igitur sit

$\int x\,dp = C + 2a(1-\alpha)\,\mathrm{A\,tag.}\,p + 2a\alpha\,l\,p + \sqrt{1+pp}$, patet vtramque coordinatam x et y per eandem tertiam variabilem p exprimi.

§. 12. Ex praecedentibus autem patet, si fuerit $\alpha = 0$, curuam fore *Cycloidem*; sin autem $\alpha = 1$, tum prodire *Tractoriam*, ita vt curua, quam hic sumus adepti, medium quodpiam teneat inter Cycloidem et Tractoriam, cuius punctum summum erit vbi $p = \infty$; tum autem erit $x = 0$ et $y = -\infty$, quo ergo respectu nostra curua naturam tractoriae sequetur. At vero punctum imum ibi reperietur, vbi $p = 0$, quo casu fit $x = 2a = \frac{cc}{4ng}$ et $y = C$. Sicque haec curua omnino non multum abludet ab natura Tractoriae, statim atque α nihilo maiorem accipit valorem. Videtur autem huic litterae α eiusmodi valorem tribui posse, vt a veritate vix quicquam aberretur. Experimenta enim, quae hunc in finem sunt instituta docent, valorem ipsius α haud multum ab $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{5}$ discrepare. Quanquam autem hic ab omni motu animum abstrahimus, tamen hinc haud obscure intelligitur, quomodo a vento aqua vltra libellam eleuari possit. Interim tamen vix sperandum videtur, vt ista Theoria insuper ad motum fluidi vnquam promoueri queat.

PHYSI-

PHYSICA.



DE NATRO RVTHENICO OBSERVATIONES.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. 1.

Omnes Minerographi vno ore affirmant: Salia et Salinas quaslibet fubftantias, quales v. gr. Gypfum eft, ftratis montanorum tractum colliumque horizontalibus ortum debere. Quumque Imperium Ruthenicum catenae montium vbique vel percurrant, vel limites eiusdem conftituant, maximas quoque in promontoriis ftratificatis (*Flötze*) falium divitias obtinet. Montes faxofi ab occidente maris glacialis per Fennoniam imminentes inde ad Vralenfe iugum deprimitur quidem, nullaque ad boreali parte ftrata horizontalia neque falia prodit. Secundum fitum vero borealia illa promontoria ftrata fua plana in Oceanum glacialem demittere videntur. Cumque hoc ipfa re et per analogiam cum natura fundi aliorum marium verofimillimum euadat, poffit inde forte non minus bene, quam per alias hypothefes, falfa natura Pelagi explicari. Colles ftratificati Waldaiici meridiem verfus a montibus fennicis producti, occidentalia porro ftrata Vralenfis iugi in planitiem fe explicantis, Caucafique et Carpathicae catenae verfus feptentrionem explanata, quae regionem circa mare nigrum, Tanain et Iftrum occupant, tandemque iuga et praeruptae ripae circa Wolgenfes fluuios falibus in genere abundant; quorum pars per Stararuffienfes, Solykamienfes

 atque

atque Totmenses officinas halurgicas, Lacusque planitiei australis, sal solis ardore deponentes, in vsum vertitur. Multo ditissima est salibus Russiae australis pars asiatica, vltra Wolgam inferiorem, circa iugum *Obstschei Syrt* appellatum, totumque per desertum Tataricum vltra *Rhymnum*, vsque ad *Sarasu* fluuium et montes *Auru-Uruk* appellatos; quae immensa planities collibus a iugis finitimis sensim deminutis quasi vndosa redditur, salibusque vt ita dicam inundata est. Per Sibiriam tractus salini insignes crepidinem quasi legunt iugi Vralensis, et maximas montium catenae variis sub appellationibus Sibiriae fines australes constituentis. Dauuria et regiones omnes versus Mongoliam et circa iugum a malis cognominatum (*Iablonoi Chrebet*) sitae in campis interalpinis salibus superabundant, quae etiam variorum fluminum v. gr. Angarae, Ilimi, Lenae &c. in ripis per fontes muriaticos sese produnt.

§. 2. *Muriatici salis*, cuius maxime abundantiam praecedenti paragrapho exposui, multifariae quoque intra regni fines occurrunt varietates; habemus sal culinare marinum, et lacustre, et fontinale, et gemmeum seu montanum, omniumque aeque fere magna est copia. Deinde sal mirabile Glauberianum et Neutrum acidulare Wallerii, praesertim prius, in eisdem passim regionibus (§. 1.) partim purum, partim sale muriatico mixtum offendimus; et quidem haec cum sale culinari omnium frequentissime sese offerunt. Porro Vitriolum et Alumen in matrice schistosa, pyritosa, terreave, Humus Nitro diues imo Nitrum natiuum plurimis in locis, per nuperrimos maxime Itineratores, magnaque saepe in copia detectum est. Sal Ammoniacum circa vulcanos montes Kamtschatcae atque Insularum oceani Pacifici generari, nondum equidem certis obseruationibus constat, verosimillimum tamen est; vt et hanc salis modificationem inter inquilinas recensere possimus, et certe olim e montibus versus Indiam tendentibus,

qui

qui cum noſtratibus iugis cohaerent, per Bucharos et Calmuccos adferebatur, vti celeb. *Model* in *Tract. de Ammoniaco natiuo p.* 17. affirmat; imo *Gmelinus* quoquo ſenior Ammoniaci ad Chatangam in Sibiria reperti mentionem fecit. Si Borax vllibi datur natiua talis certe apud nos nondum detecta eſt, licet e Tibetanis Sibiriae iugo continuis fere montibus, ſola hucusque cognita Boracis patria, vulgo adferatur (*Act. Holm. Vol.* 33. *p.* 322). Si vero tanquam artis humanae productum Boracem conſideramus, quod de maiori eius parte dici poſſe ſatis videtur, tum quidem principalem eius baſin, Natrum dico ſeu Alcali minerale natiuum non vulgari copia apud nos reperiri certum eſt. Quandoquidem vero idipſum Natrum in Europa parciſſime, rarisque in locis offenditur, opere praetium eſſe credidi, vt de eo paulo fuſius hic agerem, praeſertim quum poſt primam eius inuentionem per *Gmelinum* ſeniorem in Dauuria factam (*Itinerar. Vol.* 2. *p.* 6. *Flor. Sibir. Praef. p.* 48.), licet Itineribus recentioribus multis in locis cum aliis ſalibus mixtum indicetur, nemo tamen ex profeſſo de illo egerit, neque Itineratorum obſeruationes in vſum traxerit.

§. 3. In calidis auſtralibus terris, v. gr. Orientali India, Tranquebaria, Aegypto, Africa copioſum quidem et antiquitus notum eſt Natrum. Secundum ea, quae ſcriptores antiqui, *Plinius* (Lib. 5. 6. 67.) *Ariſtoteles*, *Tacitus*, *Dioſcorides*, aliique de Natro, quod et Nitrum, Aphronatron, Halonatron, Agrium, Baurach, Nitrum calcareum, Halmirhaga, et aliis forte nominibus appellarunt, habent, concludendum eſt: Natrum veterum, quod ad depurandas veſtes, ad ſaponem parandum, ad vitrarias officinas adhibebant, maximam partem Alcali fuiſſe naturale. Nominibus vero atque deſcriptionibus, vt et loco natali atque vſu, videntur antiquiores cum vero Natro confudiſſe Halonatrum ſiue Sal murarium, Nitrum crudum, Sal terreum e muriatico corruptum,

Sele-

Selenitem, Ammoniacum natiuum, Sal mirabile natiuum, aliaque forte producta terrae Salina, ita vt etiam ad condiendos cibos, ad saliendas carnes, cet. adhitum fuisse prodiderint.

Id ipsum, et quod Itineratores varii ex oriente, sub nominibus istis admodum diuersa Salia, raroque verum Natron retulerunt, Chemicos in dubitationem tantam circa Natron veterum coniecerat, vt plerique illud negarent, praesertim quia alcali omne igne generari autumabant. Tandem per principia chemica Salium natura distingui coepit, apparuitque per analyses celebrium virorum, Alcali salis muriatici et Natron persicum &c. vera esse alcalia, non terras salinas. (Conf. *Marggraf Opusc. Chem. de alcali salis culinaris. Model in Opuscula subseciu. chem. de Sale persico*, aliorumque). Hodie Mineralogi omnes *Natron* eiusque varietates, secundum affinitatem characterum, inter alcalina Salia, ipso illo nomine, recensent. Secundum hanc itaque stabilitam significationem Natron in Imperio Russico aeque fere copiose reperiri constat, atque in India; quo quidem, si prius innotuisset et accuratius cognitum fuisset, omnis de Natro antiquorum lis iam dudum dirimi potuisset.

§. 4. *Natrum*, praeterquam quod in Sale muriatico (§. 1.) vbique existit, basin quoque alcalicam Salis mirabilis natiui constituit, quod in omnibus facile lacubus salitis et subsalsis deserti Tatarici atque Sibirici, vt sunt Bogdensis atque Eltoniensis ad Wolgam, Inderiensis ad Iaikum, Iamyschewensis aliique in deserto Barabensi, Tustukul ad Ieniseam, Borsensis ad Ononem, cet. maximeque in Lacubus amaris Glauberiano Sale praesertim scatentibus reperiri iam certum est; quales praeprimis sunt Astrachanenses lacus Sal purgans officinale suppeditantes, Tartschiraniensis atque Urunsciensis Baicali vicini, aliique minus memorabiles.

§. 5.

§. 5. *Natrum liberum* siue acidis istorum salium haud saturatum fontes medicati etiam apud nos passim produnt, v. gr. scaturigines salinae ad Wolgam circa coloniam Sarpensem detectae, fons in Lacum Tustu ditionis Krasnojarensis defluens, saluberrima scaturigo ad Udam Dauuriae, de quibus omnibus in *Itinerario* suo egit celeberrimus noster *Pallas*, itemque balneum aquae calidae ad occidentalem ripam Baikalis scaturiens, quod in *Itinerario* proprio *p.* 76. descripsi; vt alias taceam aquas, quae Natron exigua licet proportione in se continet. Lacus quoque in Sibiria detecti sunt, quibus Natron acido haud saturatum continetur, tanta subinde copia, vt aqua cum acidis efferuescat strenue; vti lacunae quaedam deserti Cumani atque Calmuccici in vicinia maris Caspii, lacus aliqui prouinciae Isetensis, insignisque regionis transbaikalensis vltra Udam fl. Lacus Zizanensis cum aliis, quos videsis in *Itinerario Pallassiani Vol.* 3. *p.* 176. 178. 183. 216. 223. 254. Multo vero maior est abundantia Natri in locis depressis sale culinari atque Glauberiano copiosius efflorescentibus, quorum in desertis Tatariae atque Sibiriae magna est copia. Sal horum terrestre collectum saepe quartam, imo dimidiam et vltra partem Natri liberi, nec quidquam saturati largitur. Talesque conualles salibus floridae circa omnes fere lacus salsos occurrunt.

§. 6. Datur in multis huius naturae locis Natrum fere purum, vel cum parcissima Salis medii mixtura efflorescens. Eiusmodi repertum fuit versus mare Caspium ab vtraque parte Wolgensis aluei, maxime ad Orientem eius: vnde in parte australiore deserti Kirgisici itidem dari concluserim, quod omnibus momentis Calmuccorum deserto simillimum est. Non minus diuites eo sunt campi Miaesum et Tobolin fluuios interiacentes. Maxime purum inueni Natrum in australiore ripa Lacus sic dicti diuini (*Alla kul*) triginta stadiis rusticis a Miaeskaja fortalicio, quindecim a Miaso fluuio distantis; multoque

toque adhuc copiosius circa pagum *Ptitschie* dictum, 90 stadiis a fortalicio Miaeskaja, septuaginta ab oppidulo Kurtamysch distantem, vbi planities arundinosa in circumferentiam fere 10 stadiorum, ad occidentem colliculosae regionis extensa, innumeris locis Natro, ad instar niuis, obtecta albet. Datur deinde ad ipsum riuum Kurtamysch Tobolio aquas mittentem, in regione pagi *Motschalowa*, circa lacum riuo vicinum, 15 fere stadiis infra oppidum Kurtamysch; et ad Tobolem ipsum prope *Zarew kurgan*, in vtraque ripa; pluribusque locis. Aliis salibus varia proportione admixtum Natrum in australioribus deserti Barabensis, in campis a riuo Alei denominatis, inque planis Dauriae circa Selengam, Ononem et Argunum prostat. Natrum purum, quod Celeberrimo *Model* pro analysi seruibat, non solum e Persia, sed et Astrachania et e frigido quoque solo Ochotensis portus adlatum fuerat, referente ipso in *Opuscul. chem. subseciuis.* Si locos requiras, vbi inter neutrorum salium efflorescentias parua quantitate emicat Natron, tum quidem vix non vbique in campis salsis Maeoticis, Caspicis, Sibiricis illud offendas, quorum salsugo plerumque aliquam alcalescentiam prodit, maximeque talis fauet plantarum salis amantium prouentui.

§. 7. Videmus Natrum semper Salibus neutris, muriatico et Glauberiano comitem esse, imo et Glauberianum raro absque muriatico solum occurrit. Plerumque Natrum alterutro horum salium vel ambobus admixtum exstat, et purissimum quoque semper in vicinia Salis muriatici residet. Et vero hoc (per §. 1.) semper strata horizontalia pro matrice agnoscit, eorumque decliuibus maxime in locis, vbi in planitiem excurrunt, reperitur. Strata horizontalia calce et argilla constare, et in vicinia maxime Salinarum gypsum vel alabastrum prodere saepe solent, quemadmodum ad Kamam, Tschussowajam, circa Lacus deserti varios, Bogdensem, Inderiensem

ad

ad fodinas ſalis Ilezkienſes ab Itineratoribus noſtris obſeruatum eſt. Cuius vero regulae exceptionem hucusque faciunt Salinae in regione elata inter Wolgam et Dwinam, circa Totmam et Solgalizkaja obuiae, itemque ad Balachna, et circa Angaram, vbi ne in ripis praeruptis quidem vlla gypſeae naturae ſubſtantia inueniri potuit. At multo rarius eſt in vicinia regionum, quae Sale diuites ſunt, Schiſtum carbonarium et Carbones fosſiles reperire. Waldaiici colles quidem, qui Staroruſſenſibus ſalinis finitimi ſunt, et regio Angarae, carbonarios Schiſtos in ſe continent, ſed ſexaginta ad mininum ſtadia diſtantes, adeoque vix pro ſcaturiginum ſalſarum focis agnoſcendos. Contra in tota deſertorum Sale ſcatentium planitie nihil eiusmodi occurrit, et montes circa Kusnezk, Carbone foſſili abundantes, Sal nusquam produnt.

§. 8. *Natrum* apud nos, vt in India, plurimum et puriſſimum in locis Sale efflorefcentibus, quae Ruſſis *Solonzi*, Tataris *Aſi* dicuntur, inueniri. dictum eſt. Sunt talia loca vel ripae lacuum Sale imbutorum, vel lacunae parum depresſae, variae magnitudinis. Quemadmodum in ripis ab euaporatione aquae lacuum ſalſae relinquitur, ſic in depreſſis lacunis vel a ſudore ſalſo terrae, ſcaturiginum latentium Sale, vel confluxu aquae pluuiae terras ſalſas elutrientis coaceruatur. Videntur et ſolis calore flores ſalino - natroſi e terra elici poſſe, quod in ripis humoſis fluuiorum paſſim obſeruare eſt. Variis locis deſerti Calmuccici et camporum Iletenſium ad aliquod Orgyas fodiendo et terebrando inquiſiui in naturam ſoli lacunarum Sale albentium. Superficies in eiusmodi regionibus, vt et fundus lacuum ſalſorum, qui profundi nunquam ſunt, vulgo argilla, vel luteſcente, vel coeruleſcente, raro alba, ſaepiusque calcareae naturae participe conſtare ſolet, cuius ſummum arena, motu ſuperinducta, mixtum ſemper eſt. Interdum qnoque ex Humo nigra effloreſcunt Sales,

 dum

dum locus depressus sit. Ad profunditatem vnius pedis solum salsum est, vix tamen e libra plus duabus drachmis Salis largitur; profundior minus et minus Salis habet; et intra bipedalem profunditatem Salis iam nihil inest. Vbi Natron adest, in ipsa illud superficie haeret; infra Sal muriaticus est. Post $1\frac{1}{2}$ vel 2 pedum stratum, sequirur glarea argilla infecta, mixtaque vel lapillis, vel (in deserto Caspio) concharum fragmentis; et glaream denuo excipit argilla vel purior, vel calcarea, quam perfodere non potui. Stratum glareosum, nisi in lacunis salsis circa Tobolium, quae argillam albam profunde substratam habent, nusquam abest Interdum gypseis particulis, praeter argillam miscetur; quod praesertim in solo natroso ad pagum *Ptischie* (§. 6.) vidi; ad *Allakul* (§. 6.) autem, pauperioremque lacum amarum *Iarle* dictum, arena vbique miculis seleniticis copiose mixta fuit, ita vt tertiam vel quartam partem Selenites constituere videretur.

§. 9. Secundum varium puritatis gradum, locorum quibus efflorescit, scaturiginumque naturam et tempestates coeli, varia sub forma occurrit Natron: modo pruinae instar, praesertim in humosis locis; modo niuis instar leuidensae efflorescens; plerumque in forma pulueris impurioris vel in moleculas coacti, quo terra a digiti ad duorum pollicum altitudinem tegitur; post pluuias interdum crystallinam formam induit. Si maiori quantitati Salis muriatici vel mirabilis mixtum est, tum vel eadem, vel saepius crystallina forma, praesertim in ripis lacuum atque lacunis profundioribus reperitur. Quum natura sua Natron aëri expositum in puluerem fatiscat, non sine impuritatibus et terrae mixtura colligi potest, quam etiam inquinationem pluuiae et venti, puluerem agitantes, augent. In locis vbi abundat, cum cura verrendo solum non purius obtineri potest, quam vt dimidium ponderis depuratione amittat.

§. 10.

§. 10. *Natron* hoc modo collectum, non depuratum, virtute ad depuratum eodem gradu accedit, quo minus inquinatum est, sed alcalinam naturam semper prodit, vnde natrosae lacunae facile ab iis quae salibus neutris roridae sunt, distinguuntur. Solutione in aqua atque filtratione ab omni terreo squalore facile depuratur. Reses in filtro limus tum vel arena, micaceis saepe particulis nigris remixta, simulque argilla cinerea vel alba, interdum et humus esse deprehenditur. Semper quoque accedit portio calcareae vel gypseae materiae, saepissime vtriusque, proportione secundum locum, salisque neutri, quod Natron comitatur, naturam. Vbi muriatico sali adiunctum est, plus calcis, vbi Glauberiano Sali, plus gypseae impuritatis adest, quae interdum octauam, imo sextam totius ponderis efficit partem. Natron ipsum paulo plus aquae pro solutione requirit, quam Sal mirabilis, multoque plus quam Sal muriaticus; ideoque cauta et lenta crystallisatione ab admixtis hisce salibus satis depurari potest; dum primo Sal mirabilis, deinde Natrum, denique Sal muriaticus in crystallos coëunt, relicto lixiuio Sale imperfecto graui (Mutterlauge). Maxime Sal muriaticus hac via purissime secedit. Quum regiones nostrae Natro maxime abundent, ad vsus oeconomicos sufficiet, si eodem modo, ac in Sale cathartico Astrachanensi et Sibirico fieri solet, in depuratione Natri terrei maxime impuri, Natrum primae crystallisationis, in puriore, primae atque secundae, in vsus secernatur; reliquum omne in lacunas salsas ad nouum Natri incrementum refundatur. Vt accuratius determinetur proportio Natri salibus terreis cuiusdam regionis eliciendi, omnino quidem ad Chemiae sublimioris processus recurrendum est. Adeoque, inter alias vias acidum Vitriolicum secernendi a residuo crystallisationis, sulphurificatio cum carbonum puluere, saturatio per acetum, eiusque expulsio per destillationem vel calcinationem; pro segregando acido Salis, translatio Natri, per

 aci-

acidum nitri, in Nitrum cubicum (Methodo Marggrafiana), acidique nitrosi per deflagrationem expulsio praecipue tentari debent, vt, in productis atque deperditis, residui ingredientia ad calculum euocari possint. Non solum hoc scopo, sed etiam ad oeconomicos vsus praeuia vstio, non admodum violenta, perquam vtilis est, qua impuritates vegetabiles, quibus crystalli alias tinguntur, comburi possint, acida minus tenaciter Natro vnita expelluntur, partesque seleniticae ad faciliorem secessum disponuntur.

§. 11. Mihi hoc loco plenam analysin chemicam Alcali mineralis dare non est scopus; imo superflua ea foret, posteaquam per labores Celeberr. Virorum, *Modeli* in analysi Salis persici (Conf. *Ej. de Borace natiua tract.* et *Opusc. Chem.*), *Marcgrafii* in *diss. de Alcali Salis muriatici* (*Ej. Opusc. Chem. Part I. pag.* 34. *seq.*) et de Lapide Serpentino dicto (*Ib. P.* 2. *p.* 1. *seq.*) deinde *Pottii*, *Baronii*, *Neumanni* aliorumque qui Sal culinare et Boracem tractarunt, multo minus quoad Natri cognitionem chemicam desiderari possit, quam in aliis permultis subiectis nobis superest. Quae hic tradam, tantummodo tendunt eo, vt Natrum nostrum vel Alcali terrestre naturale, cum Natro veterum et recentiorum, vbicumque in rerum natura et apud auctores occurrit, comparabile sistam.

§. 12. *Natrum* nostras *naturale*, *nondum depuratum*, qualicunque demum colore, forma et mixtura occurrat (§. 8. 9. 10.), plerumque in odorum est, interdum vero volatilem, pungentem et fere suffocantem odorem spargit, qualem etiam in Sale Ochotensi *Modelius* notauit. Ortum is plerumque debet acido Salis, continuo e neutro connubio se extricanti, rarius putredini immixtorum vermiculorum, similiumque; quo in casu accidentalis est, semperque satis cito, citissimeque per vstionem eradicatur. Vbi solum Natro efflorescit, aestate nunquam absunt loca eiusmodi odorem spargentia.

Depu-

Depuratum contra *Natrum odore* caret. *Gustum* habet alcalinum, minus acrem alcali vegetabili, cuius caeterum plerasque proprietates possidet. Soluitur in triplo, aliquando in duplo fere pondere aquae, facileque *generat crystallos*, quorum pars secundum parietes supra solutionis superficiem adscendit. *Crystalli* oriuntur pelluciditatis aqueae, formae plerumque prismatico-multangulae, extremitate oblique truncatae, aliquando sub rhombeae; interdum aciculas et radios quasi referunt. Haec diuersitas non solum in Natro purissimo variarum regionum notatur, sed etiam in eodem tractu localis est. Quaedam crystalli natrosae in humido aëre humefiunt, et pondere augentur, sed nunquam liquescunt. Plerumque aëre temperato in puluerem sensim fatiscunt, subtilissimum, abbissimum, cretae farinaceae similem, simulque paulo plus septima parte ponderis amittunt. Si denuo aqua soluatur Natrum in puluerem resolutum, pauxillum terrae calcareae in fundo remanet; iterata tum crystallisatione, prioris formae prodeunt crystalli et tantundem aquae, quantum fatiscendo amiserant, retinent. In tigillo seu ad ignem lampadis non spumescit, vti Borax, neque liquefit, nisi postquam igne rubuit. Humido aëri post talem calcinationem expositum denuo humore resorbto pondus suum auget, attamen non magis, quam prius, liquescit, sed post aliquod tempus item in pulverem dilabitur.

§. 13. *Natrum purissimum* aqua solutum, e solutione alcali vegetabilis sedimentum nullum praecipitat, neque turbidum reddit liquorem; crystallos vero proprias mutat, quae euaporatione instituta turbidas atque imperfectas se sistunt; attamen si alcali vegetabilis non plus quam quarta pars ponderis, admixtum sit, in aëre non liquefiunt, neque vero in puluerem fatiscunt.

E Natro, quod sale neutro muriatico inquinatum est, et e natro fontano, scaturiginis medicatae prope Sareptam, vel ex

ex ipso forte euaporatione obtinendo, vel in efflorescentia natrosa soli huic fonti vicini obuio, per affusionem Alcali vegetabilis multo plus Natri terrei praecipitatur, quam residuum lixiuium Salis muriatici terrei, cuius proportio in his per exigua est, praebere posse videtur. Terreum hocce praecipitatum, quod verosimillime Natron plurium regionum per experimenta dabit, quodque Sales mirabiles natiui nostri puri, natro non permisti aeque copiose largiuntur, simillimum est *Margnesiae* e Sale Seidschüzensi aliisque ad finibus obtentae, itidemque per experimenta *Pottio* aliisque Chemicis debita, alternatim sub forma terrea et Salina sisti potest.

§. 14. Cum *acido vitrioli* Natrum nostrum natiuum praebet Salem Glauberianum solitum. Post saturationem plenam non solum Natri, sed et alcali vegetabilis insigne quantum superaddi potest, et nihilo secius omne in Crystallos Salis mirabilis coit, qui nullam alcali praedominatis signum praebent. *Alumini* additum, terram eiusdem propriam praecipitem dat, et in Salem glauberiannm abit. Cum *acido nitri* generat Nitrum cubicam, omnibus notis perfectum, licet vix dimidinm eius crystallorum formam cubicam assumat. Cum *acido Salis*, aceti et Crystallis Tartari, aeque ac Soda depurata, efficit sal commune regeneratum, Terram foliatam tartari siccam, crystallinam et Sal polychrestum Seignettae dictum. Ex *Ammoniaco Sale* volatilem alcalinum spiritum pellit, et sal commune regeneratum constituit. Sed nullo horum acidorum e Natro nostro, vel Caspico vel Sibirico, qualecumque vestigium Salis Sedatiui Hombergeri obtinui potuit neque apparuit terra illa caerulea, quam *Henkelius* in Soda detexit, quaeque notante Cel. *Model* (*Opusc. Chem.* P. 1. *p.* 302) in solutione feruida Natri crudi quaeri debuisset, vbi forte ad phlogistica principia referenda sit.

§. 15. Cum *Sulphure* liquatum Natron nostrum Hepar sulphuris constituit, quod Alcali vegetabili non mutatur. Cum

omni

omni *pinguedine* animali vel vegetabili saponem efficit, quem tamen per se solidum reddere non solet; si vero calce acuatur, tum aequale pondus Natri et pinguedinis praesertim si sebum more huiatium adhibeatur, citissime coit in saponem solidum, efficacissimum, nequaquam acrem, verbo optimum.

§. 16. *Natrum* quotidiana fere naturae operatione generari vel perfici, permultis obseruationibus et experimentis supra citatorum Chemiatrorum constat. Etiam natiuum apud nos per omnes perfectionis gradus, a terra salina ad purissimum Natrum, reperitur; vnde diuersitas illa oritur, quae non solum inter Magnesiam seu terram salinam (§. 13.) ipsumque Natrum, sed etiam in ipso Natro depurato, non quidem insignis et essentialis, sed tamen quoad solubilitatem, chrystallisationem, plus minus copiosam, acidorum absorptionem, fusibilitatem (§. 12.) notabilis est. Copia vero Natri, in desertis salsis, circaque lacus et in ipsa eorum muria praesens, non a sola eius generatione primitiua deduci debet; quum vbique, per obseruationes constet illud *separatione* vel liberatione a salibus neutris muriatico et Glauberiano produci et multiplicari. Iam dudum perspexerunt Chemici caloris vi partem acidi salium neutrorum dissipari. *Rores salsi*, quos in desertis nostris Natri adspergine ditibus vulgus obseruauit, confirmarunt Peregrinatores ab Ill. Academia in regiones istas missi, ab acido horum salium, volatili facto, videtur oriri. In locis vbi salia efflorescunt, per odorem se prodit acidum salis, partim per calorem, partim mutua actione diuersorum inter se salium, praesertim Vitriolici acidi in Glauberiano sale et argilla contenti, volatile factum. Accedit, quod Natrum maxime in australioribus desertis detur, eo copiosius puriusque, quo magis calori expositum est solum, quo parciora et magis dispersa Salia habent, quoque minus depressa sunt loca. Accedit, quod efflorescentiae salinae aestate magis natrosam

indolem produnt et ripae lacuum, qui interno margine, totoque alueo tantum Salem muriaticum vel Glauberianum continent, externo margine natrosae solent esse; nullam aliam certe ob causam, quam quod sales ibi longius in statu sicco Solis calori expositi fuerunt. Sed et experimento de liberatione Natri a connubio acidi neutros sales constituentis plane conuictus fui. In deserto Calmuccico, vbi primum Sal natrosum inueni, et priores obseruationes nondum callebam, Libras duas seu ℥xxxii eiusdem ab impuritatibus terreis mundaueram; ex his vnam libram crebro aqua humefactam, inque asserculo extensam pluribus diebus Soli, et quum hiems ingrueret, calori hypocausti exponebam. Notabilis erat acidi salini continuo euolantis odor. Postquam hoc vigesies circiter iterassem, ex vtraque libra separatim Natron crystallisatione secreui, atque sic ex illa Salis libra, quam siccam seruaueram, ℥viiiß, ex altera vero (cuius post crebras humectationes tantum ℥xiiiß supererant) paulo supra ℥x, cum ℥ß Selenitidis accepi. Exoticis quoque obseruationibus haec Natri separatio confirmatur. In Aegypto v. gr. Natrum muriaticum in limo Nilotico contentum, in fossis exponitur Solis ardori (Conf. *Bomare Mineral.* P. 1. *p.* 314); idemque ab obtinendum copiosius Natrum e Sale marino ad Promontorium Bonae spei fieri solet, docente *Kolbio* (*Beschreib. des Kaap*). Plantae salsae, quae Sodam largiuntur, vt Salicornia, Salsolarum species variae, in recenti succo maximam partem Sal neutrum muriaticum, et Natri perparum continent; vnde patet etiam Sodam ex his plantis praecipue dissipatione acidi Salis, per combustionem et calcinationem, effici.

§. 17. Hucusque Natrum, quod inexhausta paene copia intra Imperii fines occurrit (§. 4. 5. 6.), quodque dissipatione acidorum, quae partem eius in Sal mirabile et commune mutatam retinent, pro lubitu liberari, atque perfici

potest

poteſt (§. 16.), perquam exiguum vſum publice praeſtitit. Buraetica gens et Mongoli theam, quam ſibi incoctis Chinenſibus foliis et inquilinis quoque plantis, cum lacte et butyro parant, Sale mirabili natroſo condire ſolent, adeo largiter, vt vix omne illud Sal terreum, quod *Chudshir* ipſi vocant, in decocto illo pingui et fere ſaponaceo, ſolutum retineri queat. Tatari aſtrachanenſes e plantis ſalſis comburendo ſodam parant; non vero diſtinguere plantas norunt, quamquam non omnes plantae in ſolo ſalſo prouenientes Sodam vel Natrum vegetabile, ſed multae alcali vegetabile praebeant. Colligunt illas promiscue autumno iam emarcidas, ſiccant penitus, tumque in foſſis terrae argilloſae lente comburunt, productos cineres deinde in ollis igne torrent, vt in maſſam coalescant, quae ſodae verae quartam circiter partem, ab hispanica nullo modo diuerſae continent. Attamen huius nunquam vltra centum pondo Ruſſica quotannis ibi parabatur; hodie vero etiam minus; et ne Pharmacopaeis quidem, multo minus mechanicis operis, inquilina ſufficit ſoda.

Ad ferruminanda varia metalla Natrum noſtrum locum Boracis ſuppiere poterit, licet non omnino virtutem huius aequat, minusque potens eſt fuſibilitatis auxilium. Apud fabricas argentarias Nertſchinenſes conſtitutus Metallurgus (*Bergprobirer*) Princeps *Kuguſchef* Natrum muriatico et Glauberiano Sale inquinatum, quod ad Urun, prope Soloneſchnaja colligitur, triplici ſolutione in aqua pura, et deinde duplici per aquam calcis depurabat, et cuiusuis cryſtalliſationis primum productum retinebat; quodque poſt quintam cryſtalliſationem obtinetur, lacte dulci ſoluebat. Prodit hinc vix octaua pars primi ponderis (vid. *Itinerar. propr. p.* 396.), ſed adeo nobilitatum Natrum, vt ad metallurgicas operationes omnem Boracis vſum praeſtet. Proceſſus iſte e China, Tibetho, aliaue orientis regione acceptus videtur; praeſertim

 quum

quum adeo consentaneum sit, quod de vera Borace nouimus; cuius matrix s. Tincal dictum pinguinositate sua, ipse Borax indole, quam inter chemica experimenta prodit, saponacea, phlegma ab eiusdem destillatione saponaceum, solubilitas in Spiritu vini, aliaque obseruata Chemicorum atque Mineralogorum, similem ortum subindicare videbuntur. Et omnino si sit verum, quod et *Beaumé* (in *Chym. experim.*) docet, Boracem apud Indos e Natro cum pinguibus variis in fossis argillaceis diu subacto parari, pulcherrima foret apud nos occasio Boracem conficiendi, quod vlterioribus experimentis dignissimum vtique esset.

Sed quamuis eo vsque progredi non liceat, tamen Natrum nostrum ad plerosque mechanicos vsus, loco cinerum clauellatorum, qui tantas syluarum strages postulant, adhiberi cum emolumento potest. Possumus illa, exemplo alienigenarum, vti in vitrariis officinis, ad tinctorios vsus, ad Saponem conficiendum, ad dealbandas telas lineas vel gossypinas (quibus Natrum propter minorem acredinem, magis quam alcali vegetabile conducit), tandemque in Pharmacopoliis loco sodae purae, ad parandum Sal Seignettae, Terram foliatam tartari siccam, sapones medicos, aliaque composita; imo in officinis metallariis Natrum terrenum loco fluoris non inutile erit. Si in natali loco depuraretur, vectigariae expensae minui possent, lixiuiaque salina, a depuratione reliqua, ad ditandas terras nitrosas vsum praestare poterunt.

LEDVM

LEDVM BVXIFOLIVM,

NOVA EX AMERICA SEPTENTRIONALI ALLATA PLANTAE SPECIES;

QVAM DESCRIPTIONE ATQVE ICONE ILLVSTRAVIT

PETRVS IONAS BERGIVS.

Excubantibus noſtra aetate quoquo verſus eruditorum quamplurimis pro contemplatione Naturae, atque ſic etiam ſpeciatim pro perficienda re herbaria, vix quidquam iucundius accidere ſolet, quam cum offeruntur ſtirpes quaedam nouae, nemini Botanicorum prius viſae. Ego proinde me non peccaturum ſpero, ſi ſtirpem Americanam, ita vt dictum eſt comparatam, coram illuſtriſſima Academia Imperiali exhibeam, licet fortaſſis a reprehenſione temeritatis non abſim, quod cum tam puſillo munere prodire auſim. Verum quandoquidem inter plantas Americae ſeptentrionalis et Sibiriae exſtans ſaepius deprehenſa eſt ſimilitudo et cognatio, puto non incongruum fore, vt cum inuentis nuper in Sibiria plurimis ſtirpibus nouis haec mea ante conferatur, quam cum publico communicetur. Caeterum eo ſaltem nomine ſeſe commendat dicta haecce ſtirps, quod augmentum conciliat Ledi generi, hactenus perquam inopi, vtpote cuius vnica duntaxat in hunc diem nota fuit ſpecies. Habitus Americanae huius Ledi ſpeciei generatim ſatis conuenit cum habitu noſtrae Europaeae, ſed dum haec folia habet linearia, illa eadem gerit ouata. Reliquae differentiae fuſius adumbrantur tam in ſubiuncta mea deſcriptione, quam in adiecta icone, quae ad ſpecimen ſiccum, e ſolo natali allatum, exacte adornata eſt:

Tab. III. Fig. 2.

LEDVM (buxifolium) *foliis ouatis.*

Habitat in Noua Ierſea Americes, ſolo ſterili, arenoſo.

DESCR. *Frutex* paruus, vix pedalis. *Caulis* erectus, teretiusculus, cicatricibus ſcaber, cineraſcens, determinate ramoſus. *Rami* ad interſtitia ſtata, ſubuerticillata folioſi vel cicatriſati; ſinguli pariter ramuloſi, erecti. *Folia* Buxi, ſparſa, frequentia, breuiter petiolata, oualia, obtuſa, duas vel tres lineas longa, ſuperne ſubrugoſa, ſubtus laeuia, punctata, vtrinque nitida, margine vndique reclinato. *Corymbi* florum terminales, ſimplices, pedunculis vnifloris, pubeſcentibus. *Bracteae* oblongae, obtuſae, ſubimbricatae, patentes, in receptaculo proprio ſitae, vnde pedunculi exeunt.

CALYX: *Perianthium* monophyllum, glabrum, baſi intruſa, quinquangulari, quinquepartitum; laciniis lanceolatis, acutis, erectis. COROLLA alba; *Petala* quinque ouata, obtuſa, calyce longiora, ſeſſilia, patentia. STAMINA: *Filamenta* decem ſubulata, corolla longiora, erecto-patentia alba. *Antherae* purpureae, ouatae, paruae, hinc planiuſculae, inde didymae, biſulcatae, incumbenti-erectae. PISTILLVM: *Germen* ſuperum, ſubrotundum, vndique ſulcatum, ſcabridum; *Stylus* cylindricus, erectus, longitudine ſtaminum; *Stigma* ſimplex, ſubemarginatum, truncatum. CAPSVLA ouata, acuta, ſubrugoſa, trilocularis, triualuis: valuulis latere interiore longitudinaliter dehiſcentibus. SEMINA plurima, parua, ouata, ſcobe interſtincta.

DIGI-

DIGITALES HYBRIDAE,

Auctore

I. T. KOELREVTER.

A.) *Species hybrida.*

EXPERIMENTVM I.

Digital. lutea. ♀. }
Digital. purpur. ♂. } Tab. IV. Fig. I. et II.

Vid. Exp. inuerſ. VI.

Experimentum hoc An. 1768. d. 4. Iul. in tribus floribus Digitalis luteae (*a*), puluere antherarum Digitalis purpureae *Lin.* conſperſis primum factum eſt, dein An. 1772. d. 9. Iul. in tredecim aliis repetitum, felici ſemper ſucceſſu.

Plantae, An. 1769. et ſeq. inde prognatae ſunt plurimae, ſiue ſpecioſam ipſarum magnitudinem, ſummam caulium luxuriam, tenacemque radicum vitam ſpectes, ſiue floreſcentiae diuturnitatem eximiamque florum pulchritudinem, quos altero demum anno ſub initium Iunii plerumque explicare incipiunt, inter hybridas, a me hucusque procreatas, loco certe haud infimo ponendae.

Deſcriptio.

RADIX perennis; cum ♂ tantum biennis ſit, ac ♀ ſaepe vix longius perdurare ſoleat. Eaedem enim ☿, quarum prouentum annus 1769. ſuppeditauerat, praeſenti hoc anno 1776. iam ſeptima vice floruere, ac in hunc vsque diem vegetes adhuc perſiſtunt ipſarum radices.

Caulis

(*a*) LINN. Sp. Pl. p. 867. n. 2. HALL. Hiſt. ſtirp. Tom. I. p. 143. n. 332.

CAVLIS altior, quam ♀ et ♂; vtpote qui in altitudinem 8'. 6 – 8'' non raro excrefcit; itemque tam prima fub florefcentia, quam fuccedentibus annis plures longe (duodecim interdum numeraui) ex vna eademque radice, praefertim annofa, quam ♀ vel ♂; craffior quoque idem, quam ♀, aft minus craffus quam ♂.

FOLIA latius lanceolata, laetius virentia, rigidiufcula, crebrioribus ac profundioribus denticulis oblique incifa fiue ferrata, magisque pubefcentia ac rugofa, quam ♀, quae denticulata tantum rarius, anguftius lanceolata, obfcure viridia, rigida ac glaberrima; ♂ autem rotundioribus crenis incifa, ex ouato lanceolata, laete viridia, rugofa, villofa ac mollia funt. Folia *ima* ☿ fere petiolata dixeris, cum ♀ omnia feffilia, ♂ autem vere petiolata habeat. *Coloris* purpurafcentis tam in caulibus quam foliorum neruis vix aliquid in ☿; in ♀ eius plane nihil, in ♂ caulibus, petiolis foliorumque neruis potioribus vero maxime confpicuus. *Foliola* minora, quam ♀, aft longe maiora, quam ♂.

SPICA *florum* ad vnum latus conuerfa, minus denfe arcteque imbricata, quam ♀, multoque magis congefta, quam ♂. Eadem ab initio, ♀ inftar, parum nutat.

PEDVNCVLI longiores, quam ♀, aft breuiores, quam ♂.

FLORES inter ♀ et ♂ mediae magnitudinis ac conformationis.

CALYX: *laciniae* ouato-lanceolatae, maiores, patentiores, latiores, minusque acuminatae, quam ♀, fed minores, minus patentes, anguftiores et acutiores, quam ♂. *Calyx* poft corollae defluuium conniuens; ♀ claufus, ♂ vero patulus.

COROLLA amoene rubella, cum aliquali flauedinis mixtura, intus *maculis* ac *punctis* nonnullis purpureis, albo circum

fufis

fuſis notata; in ♀ ex albido flaueſcens, immaculata; in ♂ purpurea, maculisque concoloribus in fundo albo longe lateque diſperſis variegata. *Lacinia* corollae *ſuperior* emarginata, obtuſe parabolica, laterales duae ouales, inferior ouata. In ♀ vero ſuperior acute bifida, laterales triangulares, inferior oblonga, et in ♂ laciniae corollae omnes rotundiores: ſuperior integerrima, retuſa quaſi ac lata valde, laterales ſemicirculares, inferior parabolica.

STAMINA ſuperne ſitu inter ſe fere parallela, rictumque ſiue laciniarum corollae diuiſionem vix attingentia; in ♀ ſatis diuergentia, longiorumque pari ſupra laciniae ſuperioris lateraliumque baſin emergentia; in ♂ ſuperne conuergentia, retroque floris rictum perſiſtentia. *Filamenta* inter ♀ et ♂ mediae longitudinis et craſſitiei. *Antherae* punctis purpureis rarioribus adſperſae; in ♀ immaculatae, et in ♀ punctis purpureis crebrioribus variae. Eaedem, magnitudinis reſpectu, infra vtriusque parentis antheras, ob *pollinis* boni ac copioſi defectum, perſiſtunt. *Moleculae* eius maximam partem effoetae, collapſae, paruulae, formaeque minus regularis, longeque pauciores, quam in parentibus; pauciſſimae tantum earum melioris notae, ſuccique maſculi portione oleoſa ſcatentes. Hae quoque ſolum in aqua ſubrotundam induunt formam, cum effoetae iſtae ſuam haud vel mutent, vel notabiliter intumeſcant. Moleculae pulueris antherarum ♀ et ♂ omnes ellipticae, inter ſe inuicem aequales, maſculoque ſemine oleoſo turgidae.

PISTILLVM mediae inter ♀ et ♂ magnitudinis ac formae: *Germen* oblongum, infra ſtyli baſin ſacculum quaſi efformans, ac laete virens. *Stylus* modice incuruus, ſummitati germinis ſuperiori parum oblique inſertus. *Stigma*

 pro-

profundius bilobum ac obtusiusculum. Germen ♀ ouato acutum ac obscure virens. Stylus incuruus valde, summitatem germinis aequalem recta excipiens. Stigma minus profunde bifidum et acutius. Germen ♀ ouatum, subincurvum, apicem versus stylo in duas partes inaequales diuisum ac pallide virens. Stylus fere rectus, stigma versus crassior ac purpura leviter tinctus, inferne quasi infractus, germinisque summitati oblique deorsum immersus. Stigma profunde bilobum, obtusum.

PERICARP. *Capsula* ouata, leuiter acuminata, ac ob *seminum* defectum hinc et inde collapsa. Capsula ♀ ouato-acuminata et ♂ ouato-conica.

SEMINA bona vtplurimum nulla; partim spurio tantum modo, partim plane non impraegnata. Semen vnum alterumue ad sensum bonum in capsula hac vel illa rarissimum.

Not. Quamuis in hoc experimento ad impraegnandam ♀, puluere antherarum, de floribus ♂, intensius rubentibus, semper deprompto vsus fuerim: indiuidua tamen plantae huius hybridae non omnia vno eodemque florum colore praedita erant; plurima equidem inter ♀ et ♂ medium, qualem scilicet supra notaui, prae se ferebant; sed praeter haec etiam non pauca aderant 1.) floribus dilutius rubentibus exterius, interius pallide luteolis, vt et paucissima alia 2.) floribus albis paulloque maioribus, naturae ♂, cultura mutatae ac facile aberrantis vitio adscribenda, ac varietatum nomine nuncupanda.

EXPERIMENTVM II.

Digital. lutea. ♀.

Digital. Thapsi. ♂.

An. 1769. d. 9. Iul. in Flor. 20.

Vid. Exp. inuers. VII.

In

In vniuerſum plantae, hoc experimento An. 1770 et 1771. magno numero enatae, cum iſtis Exp. I. plane conueniebant. Flores equidem plerorumque huius Hybridae indiuiduorum, ex natura ♂, anguſtiores, quam Digital. {lut. ♀. purpur. ♂.: exceptis duobus exemplaribus, quorum flores huic amplitudine fere aequales erant: e quo momento Digitalis Thapſi naturam ſub climate noſtro frigidiori in iſtam Digitalis purpureae facile transgredi, quodammodo elucet. Hoc tamen non obſtante, inferior corollae lacinia fere in omnibus longior adhuc mihi viſa eſt, quam in Digit. {lut. ♀. purpur. ♂. floribus.

Floreſcentia harum plantarum a medio Iunii in Septembrem vsque durauit.

EXPERIMENTVM III.

Digital. ferrugin. ♀.
Digital. ambigua. ♂. (*b.*)

An. 1767.	d. 6.	Aug.	Flor.	3.	
—— 1772.	d. 3.	——	——	12.	
ib. poſtea.	d. 8.	Aug.	——	plur.	

Deſcriptio.

Tota planta minus glabra., quam ♀, magis vero, quam ♂.

CAVLIS tenuior atque flexilis magis, quam ♀, craſſior ac rigidior, quam ♂.

FOLIA lanceolata, vixque denticulata vel obiter tantum: latiora, breuiora, acutiora, teneriora laetiusque viridia, quam ♀, ſed anguſtiora, longiora, obtuſiora, rigidiora

(*b.*) HALL. Hiſt. ſtirp. Tom. I. p. 143. n. 331. it. MVRRAY in Hort. Goettigenſi.

ra ac obſcurius virentia, quam ♂. Folia ♀ vero lineari lanceolata, integerrima, ac ♂ ouato lanceolata, denticulata ſ. ſerrulata.

PEDVNCVLI longiores, quam ♀, aſt breuiores, quam ♂.

FLORES maiores, laxius diſpoſiti, nec ſitu omni ita aequales, ac ♀, aſt minores, denſiusque ſtipati, quam ♂, nec adeo ſecundi, ſed circum omnem paene caulis ambitum aequaliter fere prodeuntes.

CALYX: *laciniae* anguſtiores, longiores et acutiores, quam ♀, latiores, breuiores ac obtuſiores, quam ♂.

COROLLAE *color* inter ferrugineum ♀ et luteum ♂ quaſi medius, venis pallidioribus, quam ♀, aſt obſcurioribus picta, quam ♂. *Venter* corollae minus quidem vrceoli formam exhibens, quam ♀, profundior tamen, quam ♂. *Lacinia* corollae *ſuperior* ſat breuis, obtuſa cum acumine: in ♀ prominula, in ♂ valde obtuſa ac reuoluta. Laciniae *laterales* acutae, triangulares. Lacinia *inferior* oualis, elongata; quae in ♀ oblonga ac valde porrecta, in ♂ vero obtuſe triangula ac reflexa eſt.

STAMINA longiora ac rectiora, quam ♀, breuiora ac flexuoſiora, quam ♂. *Puluis* antherarum aeque corruptus, ac in plantis Exp. I. et II. *Stylus* longior, nec ita hamatus, vel aduncus, vt in ♀, ſed breuior, magisque incuruus, quam in ♂.

CAPSVLA oblongo conica; in ♀ conica, in ♂ oblonga.

Capſulae maturae minores, quam ♀ et ♂. ac ob ſeminum defectum hinc inde collapſae, vacuae, ſeminibusque bonis vel plane carentes, vel vno alteroue tantum, vt videtur, rarius donatae.

Plan-

Plantae hybridae, anno 1773 e ſeminibus denuo enatae, praeterita huius anni 1776 aeſtate iam tertia vice floruerunt, et adhuc vigent; prior autem, anno 1768. iam producta, caſu nuper admodum periit.

B.) *Varietas hybrida.*

EXPERIMENTVM IV.
Digital. purpur. ♀.
Digital. Thapſi. ♂.
An. 1769. d. 16. Iun. in Flor. 8.
—— 1770. d. 26. —— —— ——
Vid. Exp. inuerſ. V.

Deſcriptio.

Tam CAVLES, quam *rami* primarii harum plantarum aliquantum breuiores, multo tenuiores atque flexiliores, pluribusque etiam atque longioribus ramulis praediti, quam ♀; at longiores, notabiliter craſſiores, rigidiores, paucioribusque ac breuioribus ramulis obſiti, quam ♂.

FOLIA obſcurius virentia, ac propter lanuginem adhaerentem incana magis, quam ♀, ſed minus, ac ♂. Longiora etiam eadem, ſeſſilia magis et pro modo anguſtiora, magisque acuminata, crenis acutioribus, quam ♀; aſt non adeo longa, ſeſſilia et anguſta, crenisque obtuſioribus inciſa ſunt, quam ♂.

PEDVNCVLI longiores, quam ♀, breuiores, quam ♂.

FLORES inter ſe disjuncti magis, nec adeo ſecundi, quam ♀; aſt proximiores ſibi, magisque vno verſu diſpoſiti, quam ♂. Magnitudo eorundem inter maiores ♀, ac minores ♂ media, atque numerus minor, quam ♀, maior vero, quam ♂.

CALYCIS laciniae anguſtiores, quam ♀, aſt latiores, quam ♂.

COROLLA obſcuriore purpura tincta, quam ♀, ſed paullo magis diluta, quam ♂. *Laciniae* quoque *inferiori*, ad modum ♂, quae eo praecipue notata eſt, flaueſcentis aliquid coloris admixtum erat, breui tamen euanidi. *Maculae* etiam atque puncta obſcure purpurea, quibus interiora huius labii variegata ſunt, minora, quam ♀, maiora autem, quam ♂. Lacinia *ſuperior* minus emarginata, quam ♀, aſt profundius multo, quam ♂, quae integerrimam non raro (*c.*) habet. Lacinia *inferior* longior, quam ♀, aſt breuior, quam ♂.

Omnes autem hae plantae, quod probe notandum, in ſummo gradu foecundae, non minus ac ♀ et ♂, totidemque, quot vtriusque parentis vnquam, optimae notae ſeminibus repletae erant maturae ipſarum capſulae. Semina obſcurioris coloris, quam ♀, pallidioris, quam ♂.

EXPERIMENTVM V.
Digital. Thapſi. ♀.
Digital. purpur. ♂.
An. 1770. d. 26. Iun. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. IV.

Plantae, inuerſo hoc experimento an. 1771 et 1772 enatae, iſtis Exp. IV. ſimillimae erant; id quod in copula tam ſpecierum quam varietatum hybrida ſemper fieri aſſolet, niſi v. g. degeneratio aliqua vnius vel alterius, vel vtriusque earum accidentalis diuerſitati inde interdum oriundae leuiori anſam forte dederit. Foecunditate ſumma plantarum tam Exp. IV. quam Exp. V. Digitalem Thapſi a Botanicis celeberrimis pro diuerſa ac diſtincta ſpecie male venditari, nec filiam D. purpu-

(*c.*) Ill. LINNAEVS labium ſuperius ſubbilobum vidit. Mant. II. p. 567.

pureae e Verbaſco Thapſo eſſe, euictum eſt. Vnam potius alterius eſſe varietatem, illamque faciem ſuam hiſpanicam, licet proprio ſemper antherarum puluere de induſtria impraegnetur, poſt quartam quintamue generationem ſub climate noſtro frigidiori cum germanica ſponte ſenſim commutare ac in purpuream tandem penitus conuerti, autopſia etiam me vltro docuit. Plantarum, copula hybrida productarum, animaliumue ſumma foecunditas - varietatis, ſterilitas vel ſumma, vel foecunditas, infra vtriusque parentis modum ac proportionem, plus minusue manca ac ſuppreſſa - ſpeciei indicium eſt omnium longe certiſſimum.

Copulationes Digitalium aliae fruſtra hucusque tentatae.

EXPERIMENTVM VI.

Digital. purpur. ♀.
Digital. lutea. ♂.

An. 1765. d. 25. Iun. Flor. 3.
— 1766. d. 8. — — 10.
— 1770. d. 1. Iul. — 29.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. I.

EXPERIMENTVM VII.

Digital. Thapſi. ♀.
Digital. lutea. ♂.

An. 1769. d. 9. Iul. Flor. 4.

Conceptio inanis vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. II.

EXPERIMENTVM VIII.

Digital. lut. ♀. / purp. ♂. } ♀.
Digital. Thapſ. ♂.

An. 1770. d. 28. Iun. Flor. 8.

Con-

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Semina rariſſime medulloſa.

EXPERIMENTVM IX.

Digital. lut. ♀. purp. ♂. } ♀.

Digital. purp. ♂.

An. 1770. d. 29. Iun. Flor. plurimi.

Conceptio et ſemina, vt in Exp. VIII.

EXPERIMENTVM X.

Digital. lut. ♀. purp. ♂. } ♀.

Digital. lut. ♂.

An. 1770. d. 12. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

EXPERIMENTVM XI.

Digital. purpur. ♀.

Digital. ambig. ♂.

An. 1772. d. 21. Iun. Flor. 10.

Conceptio nulla, vel inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XII.

EXPERIMENTVM XII.

Digital. ambig. ♀.

Digital. purpur. ♂.

An. 1772. d. 21. Iun. Flor. 4.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capſulae maturae ♀ magnitudine quidem fere naturalium, ſemina autem caſſa omnia.

Not. Licet ♀ et ♂ pluribus multo quam Digital. lut. ♀. et purp. ♂. Exp. I. propinquitatis vinculis ſibi inuicem coniunctae ſint, copulae tamen vtriusque euentus plane diſpar affinitati minime reſpondet.

Vid. Exp. inuerſ. XI.

EX-

EXPERIMENTVM XIII.

Digitalis ambigua. ♀.
Digitalis Thapſi. ♂.
An. 1772. d. 8. Iul. Flor. 3.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capſulae maturae et ſemina, vt in Exp. XII.

EXPERIMENTVM XIV.

Digitalis ambigua. ♀.
Digitalis lutea. ♂.
An. 1772. d. 28. Iun. Flor. 8.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capſulae maturae ♀ magnitudine quidem fere naturalium, ſemina autem plurima caſſa; pauca medulloſa mihi viſa, ſed germinatio ſatorum 1778. vt plurimorum aliorum, fruſtra exſpectata.

Vid. Exp. inuerſ. XV.

EXPERIMENTVM XV.

Digitalis lutea. ♀.
Digitalis ambigua. ♂.
An. 1772. d. 3. Iul. Flor. 19.

Conceptio inanis vel adhuc dubia. Capſulae et ſemina, vt Exp. inuerſ. XIV.

Not. Copulatio mutua infructuoſa, quo in plantis veram ſpecierum imaginem agnoſcere poſſis, lapis lydius eſt. Hac certe infinitae Botanicorum diſcordiae citius longe atque melius, quam verbis ac coniecturis, diiudicantur. Recte hinc feciſſe Cel. MVRRAY, qui Digitalem luteam, magno flore C. B. in *Hort. Goett.* ſub ambiguae cognomine diſtinctam ſpeciem declarauit, infructuoſo vtriusque huius XVI. et XV. Experimenti euentu ſolide confirmatur.

EXPERIMENTVM XVI.

Digitalis lutea. ♀.
Digitalis ferruginea. ♂.
An. 1772. d. 27. Iul. Flor. 21.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capſulae maturae ♀ magnitudine circiter naturalium, ſemina autem caſſa facile omnia mihi viſa.

Vid. Exp. inuerſ. XVII.

EXPERIMENTVM. XVII.

Digitalis ferruginea. ♀.
Digitalis lutea. ♂.
An. 1772. d. 4. Aug. Flor. 24.

Conceptio, capſulae maturae ac ſemina, vt in Exp. inverſo XVI.

Exp. XVIII.

Digitalis purpurea. ♀.
Digitalis ferruginea. ♂.
An. 1772. d. Iul. Flor. 7.
Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM XIX.

Digitalis ambigua. ♀.
Digitalis ferruginea. ♂.
An. 1772. d. 29. Iul. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. III.

Not. Nonne ouulorum ♀ paruitas hic iterum in cauſa, cur foecundatio inuerſa in Exp. VI. VII. et XIX. non ſuccedat?

EXPERIMENTVM XX.

Digitalis ferruginea. ♀.
Digitalis Thapſi. ♂.
An. 1772. d. 3. Aug. Flor. 28.
—— —— d. 8. —— —— plures.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capſulae maturae ♀ ſat magnae.

EXPERIMENTVM XXI.

Digitalis { ferrug. ♀. / ambig. ♂. }
An. 1772. d. 5. Iul. Flor. 4
proprio puluere conſperſi.
Conceptio vtplurimum inanis; rariſſime vera.

EXPERIMENTVM XXII.

Digitalis ferruginea. ♀.
Digitalis { ferrug. ♀. / ambig. ♂. } ♂.
An. 1772. d. 26. Iul. Flor. 12.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXIII.

EXPERIMENTVM XXIII.

Digitalis { ferrug. ♀. / ambig. ♂. } ♀.
Digitalis ferruginea ♂.
An. 1772. d. 3. Iul. Flor. 15.
—— —— d. 18. —— —— 18.
—— —— d. 26. —— —— 4.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXII.

EXPERIMENTVM XXIV.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♀.

An. 1769. d. 27. Iun. Flor. 14.
— 1770. d. 19. Iul. — 29.
— 1772. d. 6. — — 20.

Conceptio nulla, vel ſaltem inanis. Capſulae maturae ♀ ſat magnae.

Vid. Exp. inuerſ. XXV.

EXPERIMENTVM XXV.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♀.

Digital. lutea. ♂.

An. 1769. d. 9. et 29. Iul. Flor. plur.
— 1770. d. 20. — — — —
— 1772. d. 28. Iun. — — 8.

Conceptio inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXIV.

EXPERIMENTVM XXVI.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♂.

An. 1769. d. 27. Iun. Flor. 10.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XXVII.

EXPERIMENTVM XXVII.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig ♂.} ♀.

Digitalis purpurea. ♂.

An. 1769. d. 15. Iul. Flor. plurimi.
— 1772. d. 21. Iun. — 7.

Conceptio nulla vel ſaltem inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXVI.

EX-

EXPERIMENTVM XXVIII.

Digitalis Thapſi. ♀.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♂.

An. 1772. d. 12. Iul. Flor. 3.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XXIX.

EXPERIMENTVM XXIX.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♀.

Digitalis Thapſi. ♂.

An. 1769. d. 11. – 13. Iul. Flor. plur.

— 1772. d. 29. Iun. Flor. 20.

Conceptio nulla vel ſaltem inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXVIII.

EXPERIMENTVM XXX.

Digitalis ambigua. ♀.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♂.

An. 1772. d. 29. Iun. Flor. 21.

— — d. 10. Iul. — 3.

Conceptio inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXX.

EXPERIMENTVM XXXI.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♀.

Digitalis ambigua. ♂.

An. 1772. d. 29. Iun. Flor. 17.

— — d. 19. Iul. — 9.

Conceptio inanis vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. XXX.

EXPERIMENTVM XXXII.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis obſcura. ♂.

An. 1766. d. 25. Iun. Flor. 17.

— 1768. d. 8. — — plur.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XXXIII.

EXPERIMENTVM XXXIII.

Digitalis obſcura. ♀.

Digitalis purpurea. ♂.

An. 1766. d. 9. Iun. Flor. 10.

Conceptio nulla, vel ſaltem inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXXII.

EXPERIMENTVM XXXIV.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis obſcura. ♂.

An. 1766. d. 9. Iun. Flor. 10.

— — d. 11. Iul. — 6.

Conceptio nulla, vel ſaltem inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXXV.

EXPERIMENTVM XXXV.

Digitalis obſcura. ♀.

Digitalis lutea. ♂.

An. 1766. d. 12. Iun. Flor. 10.

— — d. 8. Iul. — 3.

Conceptio nulla, vel ſaltem inanis.

Vid. Exp. inuerſ. XXXIV.

EXPERIMENTVM XXXVI.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis canarienſis. ♂.

An. 1773. d. 8. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel fortaſſis etiam vera.

Not. Plantulae an. 1774. e ſeminibus enatae ſunt duae, quae hybridam faciem haud ambigue referebant, ante perfectionis ſtatum, quod doleo, infortunio deperditae. Experimentum repetitione digniſſimum.

Vid. Exp. inuerſ. XXXVII.

EXPERIMENTVM XXXVII.

Digitalis canarienſis. ♀.
Digitalis purpurea. ♂.
An. 1773. d. 10. Iul. Flor. 4.
Conceptio inanis, vel fortaſſis etiam vera.

Not. Plantulae nonnullae ex his quoque ſeminibus an. 1774. progerminauerant, ſed breui poſt irrigationis nimiae vitio periere omnes, antequam de vera ipſarum natura certiorem me fecerint. Experimentum repetitione digniſſimum.

Vid. Exp. inuerſ. XXXVI.

EXPERIMENTVM XXXVIII.

Digitalis lutea. ♀.
Digitalis purpurea. ♂.
An. 1773. d. 8. Iul. Flor. plurimi.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. XXXIX.

EXPERIMENTVM XXXIX.

Digitalis canarienſis. ♀.
Digitalis lutea. ♂.
An. 1773. d. 9. Iul. Flor. 2.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerſ. XXXVIII.

EX-

EXPERIMENTVM XL.

Digitalis ambigua. ♀.
Digitalis canarienſi. ♂.
An. 1773. d. 8. Iul. Flor. plurimi.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLI.

EXPERIMENTVM XLI.

Digitalis canarienſis. ♀.
Digitalis ambigua. ♂.
An. 1773. d. 16. Iul. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XL.

EXPERIMENTVM XLII.

Digitalis ferruginea. ♀.
Digitalis canarienſis. ♂.
An. 1773. d. 21. Iul. Flor. plurimi.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLIII.

EXPERIMENTVM XLIII.

Digitalis canarienſis. ♀.
Digitalis ferruginea. ♂.
An. 1773. d. 19. Iul. Flor. 2.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XLII.

EXPERIMENTVM XLIV.

Digitalis {ferrug. ♀. / ambig. ♂.} ♀.
Digitalis canarienſis. ♂.
An. 1773. d. 21. Iul. Flor. plurimi.
Conceptio nulla.

Not.

Not. Experimenta huius Catalogi plurima, praesertim vero VI. XV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XL. XLI. XLII. digna sunt, vt a Naturae curiosis studiose repetantur.

ICONVM EXPLICATIO.

Tab. IV. Fig. I. Spica florum Digit. { *lut.* ♀. / *purp.* ♂. } Exper. I.

Fig. II. *A.* Flos adhuc clausus.

B. C. D. Flores positione diuersa delineati.

E. Calycis laciniae.

F. Flos secundum longitudinem dissectus.

G. Stamina: *a.* minus. *b.* maius.

H. Pistillum.

DE ORIFICIO
VENAE CORONARIAE MAGNAE.

Auctore
C. F. WOLFF.

Vena coronaria magna, eiusque, quo in ſinum dextrum cordis hiat, orificium GALENO iam nota fuerunt. Valuulam autem, orificio huic praefixam, niſi quis prior, EVSTACHIVS cognouit; qui in Tabularum ſuarum decima ſexta, tum et in octaua hanc particulam, quamuis male, manifeſto tamen, expreſſit. In vtroque horum autem, in oſtio et in valuula, conditiones varias obſeruaui, quae eo magis notatu mihi dignae viſae ſunt, quo minus peculiari ſuo vſu in functione venae carent, qua ſanguis in ſinum cordis effunditur.

Truncus venae coronariae, vbi propinquus eſt ſuo orificio, quo terminatur, ab exterioribus verſus interiora penetrat, et craſſum faſciculum muſculoſum (Tab. V. fig. I. 47. 48. 49.) offendit, qui totus quidem ad auriculam pertinet, ſed notabilem partem contribuit ad efficiendum orificium venoſum ventriculi dextri. Membrana enim interna auriculae, vbi ſuper hunc muſculum deſcendit, continuo inde abit in valuulam huius orificii annularem, (26. 27. 28.) cuius laminam internam ipſa conſtituit. Adeoque pars poſterior laeuis orificii venoſi ab hoc muſculo formatur, ex quo pleraeque ſimul fibrae auriculae (60. 62. 64.) originem ducunt. Hunc muſculum ergo annularem in parte poſteriori et ſiniſteriori (49.) prope orificium venae cauae inferioris perforat venae coronariae

Tab. V. Fig. I.

trun-

truncus, adeo, vt eum in duas fibras craſſas, fere teretes diuidat, longe ſeparatas a ſe inuicem, inter quas ipſe truncus extremus cum ſuo orificio comprehenditur. In aliis autem corporibus inter dictum faſciculum, qui orificium venoſum ventriculi efficit, integrum (49.) et peculiarem fibram muſcularem (81.), ſatis craſſam, faſciculo additam, hanc trunci extremitatem comprehenſam eſſe reperi. Tumque fibra a papilla quadam (78.) oriri ſolet, quae faſciculo adhaeret.

Siue vero fibra ſit addita faſciculo, ſiue inter duas fiſſi faſciculi partes truncus extremus contineatur, hae faſciculi partes, vel faſciculus integer et fibra addita, ſemper oram efficiunt, ſeu limbum, quo orificium cingitur, et cuius alteram partem ſuperiorem et poſteriorem, quae a fibra formatur (81.), diſtinguere licet a parte inferiori, quae a faſciculo efficitur (49.). Illa communis eſt inter orificium venae coronariae magnae et orificium venae cauae inferioris. Haec ſimiliter oram communem efficit inter venae coronariae orificium et orificium venoſum ventriculi dextri. Proinde ſedes orificii venae coronariae magnae accuratius nunc determinari poteſt. Aperitur haec vena inter ipſa duo maxima, quae in ſinum dextrum hiant, orificia, inter orificium venae cauae inferioris et orificium venoſum ventriculi dextri, eamque in ſpecie huius partem, cui valuula ſepti (28.) reſpondet.

Deinde illa ora communis inter orificium venae coronariae et venae cauae inferioris ideo quoque notari meretur, quod valuula Euſtachii extremitate ſua anteriori (90.) eidem orae adhaeret. In foetu, vbi haec valuula maior eſt, extremitas eius anterior ſuper totam limbi longitudinem decurrit, et in arcum vsque adſcendit, quo orificium venae cauae inferioris dextrum ſuperius cingi-

 tur

tur (93. 94. 95.). In adulto autem, vbi valuula Eustachii continuo retrahitur et imminuitur, ad mediam quasi limbi partem, vel etiam ad initium arcus vsque (96.), qui nunc pars superior annuli oualis est, vltima valuulae extremitas seu cornu anterius (90.) sese extendere solet.

Multa autem praeter haec alia in venae coronariae orificio occurrunt singularia, nec magis ab anatomicis, quantum scio, notata. Quod orificium immediate in sinum dextrum hiat (87.), in eoque primum apparet, quod ipsum etiam munitum est valuula (84. 85. 86.), id diuersum est ab orificio proprio venae coronariae magnae. Dicam illud commune, cum communem venae coronariae magnae et alii cordis venae exitum praebeat. Hoc proprium vocari poterit.

Commune margine libero mobili valuulae (85. 86.) efficitur partim, partimque ora (87.) foueae cuiusdam peculiaris (87. fig. 2. *k. l.*), quam seorsim nunc describere oportet. Ea ipsa haec est, quam, trunci extremi nomine hactenus, comprehensam esse dixi inter duas partes fissi fasciculi musculosi, vel inter fasciculum hunc integrum et fibram muscularem, ei accedentem. Fouea satis profunda est, et larga, figurae oualis, oblongae, et transuersim in sinu posita. Atrium quasi exhibet venae coronariae magnae, seu lacum largiorem, in quem sanguis, priusquam sinum cordis ipsum adeat, tanquam ex riuo angustiori excuti possit. Latus eius superius et posterius, vel ora, a limbo illo carneo (fig. 2. *c.*), quem communem esse dixi inter venae coronariae et venae cauae inferioris orificium, efficitur; inferior autem ora et anterior ab illo, quem esse retuli inter venam coronariam et venosum orificium ventriculi dextri (*a.*). Extremitas altera sinistra (*k.* fig. 1. 87.) leuior est et obtusa, subrotunda, altera

dextra

dextra autem (fig. 2. *l.*), quae fundum quasi foueae vel lacus refert, multo profundior et magis acuta (*).

Super hanc nunc foueam valuula extensa est subplana (fig. I. 84. 85. 86.), adeo tamen, vt dimidiam tantum eius partem dextram (fig. 2. *l.*) tegat, sinisterior (fig. 2. *k.* fig. I. 87.) aperta maneat. Figura valuula fere similis est foueae. Fundo gaudet plerumque acuto (84.), foueae fundo, seu extremitati dextrae incumbente, et lateribus semper duobus, quibus foueae oris lateralibus adhaeret, denique margine quoque constanter libero et mobili, exciso (85. 86.), quo foueae extremitati sinistrae (87.) obtusae et subrotundae respondet. Sic valuula vna cum foueae parte dextra profundiori sacculum efficit, seu speluncam, fundo gaudentem acuto; margine suo mobili autem et exciso, qui foueae fini sinistro similiter obtuso respondet, orificium ouale, pulchre determinatum, quod apertura sacculi, simulque extremum orificium commune est venae coronariae magnae et alterius venae cordis, cuius mentionem iam feci.

In media foueae parte, quam ipse margo mobilis valuulae tegit, orificium aliud apparet (88. fig. 2. *n.*), si valuula remouetur, satis magnum et spectabile, licet minus, quam illud commune. Hoc est orificium proprium venae coronariae magnae. Figuram illud habet subrotundam,

(*) In plerisque hominibus structura huic descriptioni conformis est. In hoc corde praeter foueam venae coronariae maior cauitas oualis (fig. I. 82. 83. fig. 2. *h. i.*) obseruabatur, in qua fouea illa exsculpta erat (fig. 2. *k. l.*). Si haec structura obtinet, cauitatem oualem a fouea distinguere oportet, et cauitas potius, quam fouea, ea est, quae dictis oris, fibra carnea (*c.*) et annulo carneo, (*a.*) cingitur.

dam, ſed directionem, communis directioni oppoſitam. Commune oblique ſiniſtrorſum ſpectat, quo ſanguis proſiliat in apicem auriculae, radici aortae incumbentem. Proprium hiat recta verſus fundum ſacculi, ſeu foueae extremitatem dextram, vt ſanguinem oporteat primum impellere in fundum ſacculi, eumque replere, deinde revertendo exire per orificium commune.

Denique in ipſo ſacculi fundo tertium apparet orificium (fig. 2. *m.*), venae, cuius iam ſaepius memini, et quam Perill. L. B. de Haller venam cordis mediam vocat. Hoc minimum eſt inter ea, quae recenſui, maximum autem inter haec, quae praeterea dantur, venarum cordis orificia. Valuula id tegitur ſimiliter ac proprium venae coronariae magnae. Commune autem ambarum venarum orificium, quamuis haud perfecte tegatur valuula, defendi tamen ea poteſt contra regreſſum ſanguinis, quemadmodum in ſequentibus dicam.

Valuula caeterum in plerisque corporibus tenuis eſt, pellucida et viſu pulcherrima; quin multis haud nunquam, vt in ipſo, cuius iconem deſcriptioni huic addidi, corde apparet, foraminulis minimis ob teneritatem perrupta. Pinxi foraminula iſta vera magnitudine, ſede et numero. Vnum ex iis imprimis notabile mihi viſum eſt, caeteris quod maius eſt et in ipſo valuulae fundo exiſtit (84.). In alio autem craſſiorem hanc valuulam reperi, magisque carnoſam et ſolo margine mobili extremo tenuem, longam et anguſtam, lateribus parallelis et fundo obtuſo, in caeteris deſcriptae ſtructurae ſimilem.

Sed in vnico indiuiduo fabricam miratus ſum in omnibus ab ea, quam deſcripſi, diuerſam. Neque munitum erat

erat valuula orificium venae coronariae propria, neque contentum inter duos, quos dixi, musculos, neque in ea, quam discripsi, sede situm. Positum autem erat vltra valvulam Eustachii, solito in hoc corpore latiorem, inter eius extremitatem anteriorem et summum lumen venae cauae inferioris, ea ratione, vt, si valuula versus venam cavam pelleretur, coronariae orificium longe lateque tegeretur.

Haec tamen structura, quamuis a descripta longe diversa, minime mihi dubium reddidit solitae, quam dixi, fabricae vsum; quin potius confirmauit, multoque luculentius explicuit. Ad venam cauam relegandum esse coronariae orificium intelligebam, nisi musculis id comprehenderetur valuulaque munitum esset propria, aut ea, quam descripsi, positione gauderet. Proinde necessarias esse has conditiones omnes, quandoquidem in sinum cordis vena coronaria aperiretur.

Mirum est, quanta sapientia in fabrica corporis humani vbique eluceat; dummodo recte intelligatur. Vel in hoc tanto parui ostioli apparatu quis non facile sentit finem magni ARCHITECTI? QVEM *non difficilius est in minima nostri corporis particula cognoscere quam in immenso systemate mundi.* Verum est, redire omnia ad hoc vnum, vt sanguinis regressus in venam coronariam prohibeatur. Sed id vnum, nisi efficitur, tanti est, vt vitae periculum immineat. Dicam ostioli primum functionem, deinde huius functionis necessitatem monstrabo.

Valuula, cum plana simulque longior et angustior sit, quam valuulae esse solent semilunares, non quidem reflecti a foueae, quam tegit, pariete, sed eo facilius certiusque et eleuari ab eodem iterumque ad eum applicari et apprimi, proinde in casu priori sacculum et orificium

com-

commune aperire, in posteriori claudere potest. Sanguis autem venae coronariae, vt omnium reliquarum venarum, nonnisi tempore diastoles in sinum ingreditur, quo tempore hic vacuus est, et omnem sanguinem, vel minima vi pulsum, facile in se admittit; cum tempore systoles contra suum, quem continet, potius expellat, vi longe maiori ea, qua venae instructae sunt. Diastole ergo sanguis venae coronariae ipse progrediendo valuulam eleuat, sacculum dilatat, ostiumque commune aperit, et patente via in sinum ingreditur. Systole autem, cum sinus se contrahit contentumque sanguinem quaquauersum in sui parietes, ergo in valuulam quoque, pellit, valuula hoc sanguine porro ad parietem foueae apprimitur, sacculus obturatur, orificia venae coronariae tam proprium, quam commune, clauduntur. Sic valuula sanguini ex vena in sinum ituro patulam viam offert, redituro ex sinu in venam negat.

Si valuula semilunaris esset, qualis ab omnibus, ni fallor, anatomicis, qui valuulae nomen illi attribuunt, esse dicitur, si latior esset et breuior, laxiorque, vt semilunares solent, a sanguine sinus vrgente reflecti aeque et aperiri ac comprimi posset et claudi. Adeoque plane inutilis esset.

Semilunarem autem non esse, figura non modo oblonga et angusta, manifesto a semilunari diuersa, sed actio quoque demonstrat. Valuulae semilunares aeque ac annulares vel tubulosae viam aperiunt, dum ad parietes suorum vasorum applicantur, claudunt autem, dum ab iisdem remouentur et extenduntur, vt recte Meritissimus WINSLOWVS monuerat. Haec applicata foueae parieti viam claudit, et aperit, dum ab illo remouetur et extenditur.

Proinde hanc valuulam natura et vsu diuersam esse patet a semilunaribus aeque ac annularibus, vel tubulosis, aut

aut ſemitubuloſis, qualis valuula eſt ſinus ſiniſtri in foetu. Et veram tamen valuulam eſſe, quamuis Illuſtris TREWIVS negauerit, ſola eius functio ſatis docet. Quae enim particula exituro ex aliquo canale fluido viam aperit, rediturو in illum claudit, ea ſane valuula vocari meretur, quaecunque ei figura ſit aut forma. Valuula ergo ſui generis eſt, et cuius ſecundum exemplum in corpore humano nondum innotuit.

Neque cauſa, cur nec annularis nec ſemilunaris valvula hic applicari potuerat, latet, et cur ſingulare valuulae genus, membranula nempe ſimplex, cuiuscunque figurae, plana, ſuper foueam extenſa, quae eleuari ſimpliciter et apprimi poſſet, requirebatur. In venis ſanguis rediturus ſecundum axin canalis progreditur, cui tum valvula ſemilunaris expanſa recte reſiſtit. At ſanguis auriculae, a vena coronaria retinendus, in latus canalis irruit, oblique in ſinum inſerti, vbi valuula ſemilunaris aut applicanda nequaquam, aut inutiliter applicata, fuiſſet, nec alius contra, quam ſimplex membranula plana, apparatus aptior vllus excogitari potuiſſet. Immo etiamſi vena coronaria perpendiculariter in ſinum hiaret, qua poſitione orificium valuula ſemilunari contegi potuiſſet, valuula tamen vim auriculae et ſanguinis eius prementis minime ſuſtinuiſſet, quemadmodum valuulae venarum communes ſolum ſui ſanguinis pondus facile ferunt. Dum valuula autem parieti foueae apprimitur, vis omnis auriculae in hunc parietem transfertur, valuula ipſa nequidquam patitur. *Quocunque ergo reſpicis, naturam ſapientem eſſe vides*; et multo anatomicis doctiorem, qui ne tum quidem, quando valuulam, qualis eſſe debet, inſtructam vident, quomodo eſſe debeat, intelligunt.

Aliud autem artificium, quo ſanguis auriculae a vena coronaria arceatur, in muſculis poſitum eſt, quibus orificium commune cingitur. Hi enim, cum ſinus muſculi ſint, vna cum toto ſinu agunt. Adeoque ſe contrahunt, dum ſinus in ſyſtole eſt, relaxantur ſub eius diaſtole. Et conſtringunt ergo venae orificium ſyſtoles tempore, quo ipſo periculum eſt, ne ſanguis in venam redeat; patefaciunt autem viam diaſtoles, quo ſolo ſanguis ex vena in ſinum intrare poteſt. *Si intellectu et anima rationali praeditae eſſent hae fibrae muſculares, non poſſent ſane accuratius ſuo munere fungi, quam quidem diuino hoc mechanismo funguntur.*

Denique tertium contra regreſſum ſanguinis praeſidium poſitio ſuppeditat orificii proprii, contraria directioni communis. Hac efficitur, vt, ſi quid forte ſanguinis ſub valvula per orificium commune in ſacculum elaberetur, id tamen non integra ſua vi in venam coronariam ilico eiusque orificium proprium, ſed potius in fundum ſacculi, impelleret, vbi, vi maxima fracta, parum noxiae orificio huic proprio inferre poteſt.

In deſcriptione valuulae annotaui, eam, imprimis in fundo, multis foraminulis, in eo, cuius iconem adiunxi, corde perruptam fuiſſe, et cauſa facile apparet, cur id notabile videatur. PERILL. L. B. DE HALLER ſimiliter cordis meminit, in quo valuulam hanc reticulatam eſſe vidit. (Elem. Phyſiol. Tom. I. pag. 376.) Euſtachii autem valuulam ſolitum fere eſt perruptam inuenire foraminulis, aut laceratam variis modis, et ſaepe egregie reticulatam, qualem admiramur in pulcherrima Iconum anatomicarum, faſcul. IV. Tab. - octaua figura. VIR PERILL. monet, hunc ſemper effectum eſſe vis, valuulae illatae,

et

et nihil eo certius eſt. Eo magis autem hic idem effectus in valuula venae coronariae attribuendus erit ſanguini, ex ſinu ſub eius ſyſtole in ſacculum elapſo, cum peculiarem Prouidentia contra noxiam huius caſus medelam parauerit. Sed diſcimus inde quoque quanta ſit vis auriculae, qua, dum ſe contrahit, ſanguinem ſuum in ſui parietes vrget, et nullum certe argumentum inuenire poſſem aptius, quo, quod ſupra dixi, periculum fore, probarem, ne valuula rumperetur, ſi ſolito modo ſemilunaris orificio, perpendiculariter in ſinum hianti, praefixa fuiſſet. Si paucae enim guttulae huius ſanguinis ſinus elapſae valuulam perforare poſſunt, quidne ingens faceret riuus, plena vi in orificium eiusque valuulam irrumpens, nullo fulcro donatam, vt quidem haec plana foueae parieti innititur.

Maxime autem admirabile in hac re mihi hoc eſſe videtur, quod, etiamſi caſu accidit, vt valuula, ſicut in hoc exemplo, perforetur, id tamen minime vſui valuulae officiat, quin faciliorem potius illum reddat multoque certiorem. Quid aliud enim fiet, poſteaquam ſacculus in fundo apertus eſt, niſi vt ſanguis, per orificium commune in ſacculum elapſus, preſſus vi ipſa auriculae, per fundum iterum exeat, eoque minus penetret in orificium venae proprium. Valuula interim ſui parte media et ſiniſteriori orificium proprium largiter tueri perget. Nec magis ſanguis auriculae per fundum intrabit in foueam quam per magnum orificium commune.

Hanc tantam prouidentiam ad arcendum ſanguinem ſinus a vena coronaria non temere adhibitam eſſe, facile ſuſpicari licet. Si ſanguini auriculae haec via pateret, varices continuo, mox ſacci enormes, cruore referti, in trunco huius venae nudo, in numeroſisque eius ramis,

 per

per cordis ſuperficiem diſtributis, producerentur. Nec longius abeſſet, quin ruptis venis cruor pericardium impleret, cor comprimeret, eiusque motum ſiſtendo vitae finem faceret.

Ante aliquot annos, cum leonem ſecarem, eius pericardium plenum mirabar ſanguine et ita diſtentum, vt horrenda magnitudine totam cauitatem thoracis occuparet, preſſumque digito veſicae inflatae inſtar reniteret, ventriculis et ſinubus cordis ſanguine vacuis. (Nou. Comment. Tom. XVI. pag. 471.) Cauſam miri huius effectus detegere non poteram. Ipſum tamen cauſam mortis fuiſſe, eo certius eſt, cum conſtaret, animal repentine fuiſſe exſtinctum. Proinde hoc ſaltim vides, quales effectus ſanguis poſſit efficere in pericardium effuſus. Si tantis praeſidiis natura muniuit orificium venae coronariae magnae, cur id factu fuerit opus, intelligis. Et ſi tamen in illo homine ſupra memorato plerisque his munimentis vena priuata fuit, cur et ne hoc quidem mirum, perſpicis; cum valuula non modo Euſtachii orificium tectum, ſed poſitum quoque in cauitate venae cauae procul ab omni periculo fuerit, a vi auriculae imminente.

EXPLICATIO TABVLAE V.

Fig. 1.

Ventriculus cordis dexter cum ſinu dextro apertus.

a. Pars cordis ventriculum ſiniſtrum continens.
b. Vena coronaria. Arteria coronaria ſiniſtra, arctius circa baſin arteriae pulmonalis flexa, propius ſepto (*Q*; *Q*;) et profundius ſub adipe latens deſcendit.

c. Apex

c. Apex carnis ventriculi ſiniſtri.

d. d. Pars baſis ventriculi ſiniſtri prominens, adipoſa, baſin arteriae pulmonalis cingens.

e. Interſtitium inter hanc cordis partem et arteriam pulmonalem cordi inſertam.

f. Foſſa, qua extus ventriculi diſtinguuntur.

g. Caro ventriculi dextri, apicem fingens, ſolida, attamen ſpongioſa, ſanguinemque intra poros admittens.

h. Caro ſimilis, partem inferiorem marginis acuti effingens.

i. Apex cauitatis ventriculi.

k. Arteria aorta.

l. Orificium reſectae arteriae coronariae dextrae.

m. Continuatio huius arteriae circa baſin ventriculi dextri.

n. Arteria pulmonalis.

o. Eius ramus dexter retro aortam procedens.

p. Eius ramus ſiniſter breuior.

q. Vena caua ſuperior.

r. Hucusque inciſa.

s. Pars ſinus poſterioris; eius angulus ſuperior dexter, cui vena pulmonalis dextra inſeritur.

t. Auricula dextra, cum pariete cordis et ſinus dextrorſum et ſurſum reflexa.

v. x. Regio, quo vsque membrana interna ſinus carni ſuae adhaeret, et vbi incipit fluitantem valuulam formare.

y. z. Sectio columnae carneae parietalis magnae (vid. ad no. 14. 15. 16. 17. 18. 19.)

y. A. Parietis ventriculi dextri pars ſuperior, ſub arteria pulmonali reſecta a (*z. B.*). Sic

A. C. illis *B D.* et *C. E.* illis *D. E.* reſpondet.

F. G. H. I. K. L. P. Q. X. Septum cordis.

F. G. H. I. Varii fasciculi longitudinales, qui septum efficiunt, in aliisque subiectis magis in aliis minus a se inuicem distincti apparent.

K. Pars septi inferior irregulariter reticulata.

L. Pars summa septi laeuis prope valuulas semilunares.

M. Summa pars parietis ventriculi, a qua reliquus paries resectus.

N. Basis arteriae pulmonalis.

O. O. Bases valuularum semilunarium; quarum altera septo soli incumbit, altera dexterior est et anterior; tertia sub parte (*M.*) latet.

P. Pyramidalis finis columnae carneae sinistrae (vid. ad no. 14. 15. 16. 17. 18. 19.) quo in fasciculos septi (*G.* et *H.*) continuat.

Q. Q. Fasciculi breuissimi, quibus parietis ventriculi pars sinisterior et anterior septo adnectitur.

R. S. T. V. Fasciculi filamentorum sine papillis ex variis locis septi orti, valuulaeque septi et valuulae anteriori inserti. Haec filamenta minus constantia sunt. Plura nunc, nunc pauciora reperiuntur. Saepe paruae papillulae sunt, ex quibus fasciculi oriuntur.

S. Fasciculus insignis, qui in pluribus corporibus ex papilla oritur, quam superiorem vocare licet. Pars horum filamentorum in valuulam septi (44.); pars alia (46.) in valuulam anteriorem (31.) inseritur, a qua filamenta resecta sunt.

X. Y. Z. Finis inferior praecipuae partis septi, ab hoc distinctus.

Y. Z. Duo, in quos ille diuiditur, fasciculi, continuati in ramos (12. 13.) papillae magnae anterioris (11.) quae inde resecta est.

1. 2. Fibrae ex septo in parietis ventriculi partem posteriorem transeuntes. Eiusmodi fibrae, quales etiam

etiam sunt (5. 6. 8. 9.) in omnibus corporibus dantur, quibus parietis ventriculi pars posterior septo adnectitur; variant autem numero, figura et magnitudine.

3. 4. Papillae posteriores. Duae sunt in hoc corde vti in illo, cuius foramen ouale (Tom. XX. Comment.) exhibui. Frequentior tamen vna esse videtur; collocatae sunt inter partem posteriorem parietis ventriculi et septum Annectuntur variis fibris veluti (1. 2. 5. 6.) septo, aliisque (8. 9.) parieti. Filamenta sua imprimis in valuulam posteriorem et in marginem posteriorem valuulae septi mittunt.

5. 6. Fibrae, quibus paries ventriculi in parte posteriori ad septum annectitur.

7. Locus, vbi papilla magna anterior (11.) tertia sua radice firmata fuit.

8. 9. Fibrae quibus papillae posteriores (3. 4.) a pariete dependent.

10. Similis eiusmodi fibra, qua papilla (4.) parieti adnectitur.

11. Papilla anterior. Haec maxima inter reliquas et constantissima est. Oritur ex angulo anteriori inter septum et parietem ventriculi, vel ex septi parte anteriori variis radicibus et inseritur filamentis suis in interstitium inter valuulam anteriorem et posteriorem.

12. 13. Duae eius vel tres, quatuorue radices resectae a fasciculis (7. *T. Z.*).

14. 15. 16. 17. 18. 19. Columna magna carnea parieti ventriculi multis fibris annexa, satis tamen ab eodem distincta et separata. Oritur superius parte (P.), a qua resecta est, ex septo, inde recuruata iuxta

valuu-

valuulam anteriorem antrorſum et deorſum, in pariete ventriculi deſcendit, in variasque partes diſpergitur. Eius actio eſt, ventriculum breuiorem reddere. Haec *columna ſiniſterior* eſt, quae in ſitu ſuo naturali ſepti parti mediae (*G.*) incumbit.

14. Huius columnae pars ſuperior, vbi in ipſa curuatura ſectio (*y. Z.*) facta.

15. Faſciculus a columna ſecedens.

16. Pars praecipua et craſſiſſima deſcendentis columnae.

17. Eius pars vbi latior, ſed et planior, euadit diſpergique incipit.

18. 19. Partes in quas diſpergitur.

20. *Columna* ſecunda, priori parallela, eique *dexterior*, ſimilique modo parieti annexa. Haec oritur ante annulum valuularem, vt prior ſiniſterius iuxta eundem, ex ipſo interſtitio inter parietem et membranam valuularem, incumbens in ſitu ſuo naturali ſepti faſciculis dexterioribus (*H. I.*).

21. Interſtitium profundum inter has columnas.

22. 23. Duae radices, quibus dexterior columna in dicto interſtitio oritur. Actio huius ſimiliter eſt ventriculum breuiorem reddere, et eleuare verſus orificium venoſum (47. 48.).

24. 24. 24. Alii et debiliores et breuiores columnae, quae omnes ſucceſſiue retro annulum valuularem oriuntur et in parietem ventriculi inſeruntur.

25. Pars parietis ventriculi, columnis ſiniſterior, parti ſepti ſiniſteriori (*F.*) incumbens. Haec leuior tenuiorque et faſciculis reticulatis inſtructa adeo planis, vt vix a pariete ipſo diſtinguantur.

26. 27. 28. Annulus valuularis.

26. Valuula, ſeu lobus valuulae, anterior. Perill. L. B. de HALLER vocat ſuperiorem.

27.

27. Valuula posterior, in hoc corde bipartita, alias integra.
28. Valuula septi.
29. 30. Lobi minores, in quos lobus (27.) diuisus.
31. Filamenta valuulae anterioris sinistra, resecta a fasciculo filamentorum (46.). Alias a singulari papillula, quam *superiorem* dixi, oriuntur.
32. Pars valuulae media.
33. 33. Filamenta a papilla anteriori (11.) quorum pars altera dat filamenta dextra valuulae anterioris, altera sinistra valuulae posterioris.
34. Pars media lobi (29.).
35. Filamenta sinistra lobuli (29.) dextraque lobuli (30.) a papilla posteriori (4.) orta.
36. Pars media lobuli (30.).
37. Filamenta sinistra lobi (30.) a papilla posteriori (3.) orta.
38. Filamenta dextra valuulae septi.
39. Pars media valuulae septi.
40. 41. 42. 43. 44. 45. Varii fasciculi filamentorum quae omnia, orta ex septo, sinistra sunt valuulae septi.
46. Filamenta sinistra valuulae anterioris a quibus resecta sunt illa (31.).
47. 48. 49 50. 51. Annulus lacuis tumidus, quo cauitas sinus et auriculae a cauitate ventriculi distinguitur. Hic orificium venosum ventriculi constituit, efficiturque crasso fasciculo carneo, quem ipsum truncus venae coronariae perforat.
47. *Annuli carnei* pars latior, *auricularis*, ex qua fibrae auriculae ortum ducunt.
48. Alia eiusdem pars latior et notabilis, in quam ingrediuntur fibrae, quae cauitatem auriculae a sini-

 steriori

ſteriori parte atrii, regione venae cauae inferioris, diſtinguunt.

49. Pars annuli anguſtiſſima, quae ſepto et regioni venae cauae inferioris intereſt.

50. et 51. Pars annuli anterior.

52. Regio venae cauae ſuperioris.

53. Pars reflexa 54. orificium venae in ſinum inſertae.

55. Cauitas baſis auriculae, quae dextrorſum in ſitu naturali reſpicit et inflata exterius apparere ſolet a ſanguine coagulato.

56. Ora ſuperior cauitatis baſis auriculae, qui craſſus faſciculus muſcularis eſt.

57. 58. 59. Tres eius rami, quorum.

57. Medius, continuatio orae ſuperioris eſt, quo cauitas auricularis a regione orificii venae cauae inferioris diſtinguitur.

58. In cauitatem baſis auriculae deſcendit, cum fibris eius commixta.

59. autem in regionem orificii venae cauae inferioris tranſit, in plures ramos (77. &c.) diuiſa, quae peculiarem partem huius orificii efficiunt.

60. Continuatio orae, in ſitu naturali poſterioris cauitatis auriculae, bifurcata.

61. Ora huius cauitatis in ſitu naturali anterior.

62. Truncus omnium fere fibrarum, quibus cauitas auriculae repletur, ortus a parte latiori (47.) annuli carnei, qui orificium venoſum efficit. Saepius tamen pleraeque fibrarum auriculae imediate ex hac parte latiori oriuntur ſine trunco.

63. 63. 63. Rami a trunco (62.) orti in cauitatem auriculae ad apicem vsque diſperſi.

64. Papilla ex parte (47.) orta, quae ramos in cauitatem auriculae dat, cum prioribus coniunctos.

65.

65. Dicti rami papillae (64.).
66. 67. Rami ex apice trunci orti, arcui (56.) seu orae superiori cauitatis auriculae annexi.
68. 69. 70. Rami ex arcu (58.) orti, in truncum (62.) inserti, ad fibras auriculae pertinentes.
71. Ramus ex continuatione orae superioris cauitatis auriculae (57.) ortus in annulum carneum (47. 48.) insertus, ad fibras auriculae pertinens.
72. 72. 72. Foueae, seu interstitia inter fibras reticulatas et varios ramos relicta.
73. 74. 75. Peculiares foueae reticulatae.
76. Continuatio orae (57. 60.) bifurcata et inserta in annulum carneum (48. 49.) qua cauitas auriculae a regione venae cauae inferioris distinguitur.
77. 77. 77. Rami musculosi, orti a ramo (59.) orae (56.), qui pennatim fere exserti, peculiarem partem, quam musculosam dixeris, regionis venae cauae inferioris efficiunt.

Vt totum atrium in auriculam et sinum, sinus autem porro in regionem venae cauae superioris et inferioris; ita haec tandem in quatuor partes diuidi potest: 1) muscularem, quae proxima cauitati auriculari, ab eadem per limbum eminentem (57. 60.) distincta est. 2) Cutaneam (79. 79. 80.) quae inter muscularem et valuulam Eustachii est 3) regionem venae coronariae (81 – 89.) et 4) orificium venae cauae inferioris ipsum, quod valuulam Eustachii et fossam oualem parietesque venae cauae inferioris in se comprehendit.

78. Papilla, quae annulo carneo orificii venosi insidet, fibramque producit (81.), quae vna cum annulo carneo (49.) truncum extremum venae coronariae comprehendit.

 79.

79. 79. 80. Pars cutanea regionis venae cauae inferioris, quae ex simplicibus sinus membranis, externa et interna, constat, nec nisi debilissimas rarasque fibras in se dispersas habet, et pellucida est.

80. Fouea in hac parte cutanea retro oram venae coronariae (81.).

81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. Regio venae coronariae.

81. Fibra muscularis annulo carneo orificii venosi, in specie eius parti (49.), addita, quibus orificium venae coronariae continetur. In aliis corporibus hoc in ipso illo annulo, in duas partes fisso, contineri obseruatur.

82. 83. Cauitas oualis, a fibra (81.) et annulo carneo (49.) formata, interque has partes contenta. In hac cauitate fouea porro excauata est (fig. 2. *k. l.*) qua orificium commune venae coronariae efficitur. In aliis corporibus tota haec cauitas vna cum fovea a valuula tegitur.

82. Fundus huius cauitatis, seu extremitas profundior.

83. Altera eius extremitas leuior.

84. 85. 86. Valuula venae coronariae magnae.

84. Fundus valuulae et sacculi, a valuula et fouea formati.

84. Eodem numero indicatur et foraminulum in fundo sacculi huius seu valuulae, satis notabile, de quo in Dissert. praemissa dictum.

85. 86. Margo valuulae excisus mobilis.

85. Eius Extremitas superior, qua fibrae (81.) seu orae foueae superiori adhaeret vna cum extremitate sinistra valuulae Eustachii. His fibrae pars magna tegitur, quae sub extremitate cauitatis oualis anteriori (83.) cum annulo carneo (49.) coniungitur.

86.

86. Extremitas marginis valuulae inferior quae annulo carneo adhaeret. Sic latera quoque valuulae, numeris non indicata, superius atque inferius, facile apparent, quorum illud fibrae (81.) hoc annulo (49.) adhaeret. Similiter foraminula exigua circa latus inferius.

87. Extremitas sinistra leuior foueae, cuius pars dimidia dextra valuula tegitur, et quae, valuula remota, tota apparet (figura 2 *k. l.*). Hac foueae ora sinistra et valuulae margine exciso (86.) *orificium commune* venae coronariae magnae formatur.

88. Pars orificii proprii venae coronariae magnae (fig. 2. *n.*).

89. Orificium venulae in cauitate ouali apertum.

90. 91. 92. Valuula Eustachii, non expansa, sed qualis naturaliter in hoc partium situ se offert.

90. Eius Extremitas sinistra et anterior, ad partem sinistram annuli oualis vltimo fine, parte dexteriori ad fibram (81.) qua orificium venae coronariae formatur, applicata.

91. Extremitas eiusdem dextra et posterior, qua in foetu arcui, seu annuli oualis parti superiori (94.), adhaeret, in adulto autem ab eo remota est vi impellentis sanguinis, et in filamenta plerumque disrupta, quorum duae paruulae in hoc exemplo ad hunc numerum (91.) apparent.

92. Eius pars media latior eademque margo conuexus, quo parti cutaneae sinus (79. 80.) adhaeret. Eius margo mobilis facile apparet.

93. 94. 95. 96. 97. Annuli oualis pars superior. Haec in foetu tanquam singularis arcus existit, quem arcum ideo in foetu vocamus siue isthmum Vieussenii. Eius cruribus (94.) et (96.) valuula Eustachii suis

 extre-

extremitatibus adhaeret, cum eoque orificium dextrum venae cauae inferioris efficit.

93. Eius pars suprema crassissima distinctissimaque omni aetate.

94. Crus arcus dextrum, cui in foetu extremitas dextra et posterior valuulae Eustachii applicata est. Nunc ab eo remota existit vi irruentis sanguinis, cuius pars magna olim per orificium sinistrum in sinum sinistrum intrabat, intacta valuula Eustachii, nunc vero omnis, conuersus in partem dextram, eo maiori vi in valuulam Eustachii, eiusque imprimis in extremitatem posteriorem impellit, eamque disrumpit partim, partimque remouet a pariete sinistro. Perill. L. B. de HALLER columnam dextram vocauit.

95. Crus sinistrum arcus siue columna sinistra, quae paulo tenuior esse solet reliquo arcu.

96. Lenior inflexio in hac regione, constantissima, quae maior autem in vitulo et in cane nec non in plerisque caeteris animalibus, vnde figura foraminis et fossae oualis figura angulata et coniunctis duabus palpebris similis efficitur.

97. Pars infima cruris sinistri, quae in adulto et in foetu extremitate sinistra valuulae Eustachii tegitur, sub qua in coniunctum cum fibra (81.) annulum carneum (49.) illum crus continuat.

98. 99. 99. 99. Annuli oualis pars inferior, quae apparet, si paries sinus sinister, in quo fossa oualis est, sursum, regio vero venae coronariae cum valvula Eustachii deorsum paulo trahuntur. In foetu, aperto sinu, integra vena caua inferiori, nihil de hac parte apparet, dum profundius in hac vena latet. Tumque limbus est, quo basis valuulae orificii sinistri cingitur et a venae pariete distinguitur.

98.

98. Hic ſe recipit ſub extremitatem valuulae Euſtachii et ſub partem cruris (97.) in quam non continuat. Adhaeret autem cruri celluloſae ope et tunicae venae internae.

99. 99. 99. Foramina ſatis profunda ſed caeca a ſola membrana interna tenui alba producta et interſtitia inter ligamentula ab eadem tenui membrana producta. Stylus immitti poteſt, quo ligamentula (100. 101. 102.) eleuantur.

100. 101. 102. Sunt quaſi ligamentula a tenui membrana, qua vena interne et foſſa oualis obducuntur, facta. Membrana a parietibus ſuis ſeparata eſt in his locis, vt admiſſo ſtylo eleuari poſſit. Caeterum duplicaturae ſunt membranae internae, quamuis tenuia ſint, vt facile intelligitur. Ligamentula autem dico, cum area oualis (105.) quae olim valuula fuit, his particulis tenſis ad annuli partem inferiorem attrahitur ea ratione, vt plicae inde in hac parte (103. 102.) oriantur, quas nonniſi diſſectis his ligamentulis explicare poſſis. Exiſtunt iam, haec non minus quam foramina caeca, in foetu, et ſunt eadem, quae ad diſſ. de for. oual. (Nou. Comm. Tom. XX. Tab. VII. fig. 4. *v.*) delineaui.

100. Horum ligamentulorum maximum et latiſſimum eſt.

101. et 102. Eius quaſi rami.

103. 104. Plicae ſeu rugulae, quas ligamentula producunt, dum, quaſi iuſto breuiora, aream oualem (105.) ad partem annuli inferiorem attrahunt.

105. *Area oualis.* In foetu valuula orificii ſiniſtri venae cauae inferioris.

106. Apertura relicta, qua penna anſerina mediocris in ſinum ſiniſtrum immitti poteſt.

107. 108. Paries poſterior venae cauae inferioris.

107. Eius pars inferior prope hepar resecta.
108. Pars suprema vbi fouea esse solet in adulto, qua venae paries in paruo hoc interstitio inter extremitatem posteriorem valuulae Eustachii et dextram arcus extremitatem a sinu distinguitur.

Fig. 2.

Regio venae coronariae, vbi valuula orificii remota, vt fouea venae coronariae et orificium proprium appareant.

a. Pars annuli carnei, quae septo cordis et regioni venae cauae inferioris interest (fig. 1. 49.).
b. Papilla (fig. 1. 78.).
c. Fibra carnea, quae cum annulo carneo (*a.*) oram cauitatis (*g. h*) efficit.
d. Pars valuulae Eustachii.
e. Pars annuli oualis (fig. 1. 98.).
f. Pars annuli oualis, in quam fibra carnea (*c.*) et annulus carneus orificii venosi ventriculi (*a.*) continuant (fig. 1. 97.).
g. h. Cauitas oualis in qua foueola venae coronariae est (fig. 1. 82. 83.).
i. Orificium venulae.
k. l. Foueola venae coronariae integra, quae apparet, postquam valuula remota est.
k. Eius pars sinisterior, qua orificium commune efficitur (fig. 1. 87.).
l. Ea eius pars dexterior, quae vna cum valuula sacculum efficit.
m. Orificium venae cordis mediae, in ipso sacculi fundo situm.
n. Orificium proprium venae coronariae magnae.

PHOCA

PHOCARVM SPECIES DESCRIPTAE.

Ab

I. LEPECHIN.

Phocarum greges quamuis vbique terrarum non modo per maria, verum etiam in aquis dulcibus inueniantur; hiſtoriam tamen earum mancam atque ambiguam eſſe, docent nos non modo ſyſtematicorum ſcripta, verum etiam peregrinatorum relata. Illuſtris enim *Linnaeus*, ſyſtematicorum facile princeps vnicam modo ſpeciem phocae proprie ſic dictae ſtatuit. Indefeſſus *Stellerus*, qui varias ſpecies phocarum vidit, omnes eas pro varietatibus agnoſcere videtur: dicit enim (*a*).

„Eſt autem res cum animalibus marinis ita, quam „cum terreſtribus comparata: quaedam vbiuis locorum ha- „bentur, pro climatis alimentorumque diuerſitate vel ſo- „lam magnitudinem, vel colorem, vel pilorum molliciem „aut prolixitatem et per conſuetudinem longam ſpeciem „mutant, translata in aliud clima longo interuallo ſpecifi- „cam differentiam rurſus exuunt et ad primam redeunt. „*Idem* pag. ſequenti. „

„Inter animalia marina ſola phoca eſt quae non „tantum vbiuis terrarum in Oceano, verum in Mari Bal- „thico, Caſpio et lacubus Baikal et Oron quouis tempore „in-

(*a*) Nouor. Comment. A. S. Petropolitanae Tom. II. pag. 287.

„ inuenitur, intercedit nihilo tamen minus haec [illegible]eren-
„ tia vt phoca oceanica communiſſima a reliquis omnibus
„ ſpecifice colore diſtincta ſit, gaudet nempe pilo luteſcente
„ ac in poſteriori corporis medietate maculam maximam ca-
„ ſtaneas colore aemulantem obtinet, quae tertiam partem
„ corii occupat. „

„ Diſtinguo autem phocas ratione magnitudinis in tres
„ ſpecies, in maximam, quae magnitudine taurum ſuperat,
„ ac incolis Kamtſchaticis *Lachtac* vocatur; mediae magni-
„ tidinis, quae omnes tigridum inſtar multis exiguis ma-
„ culis variae ſunt; infimae magnidinis, vt oceanica, quae
„ tum in mari Balthico, quam circa portum St. Archangeli,
„ in Suecia, Noruegia, America et Kamtſchatca capitur,
„ et lacaſtris dulcium aquarum monochroa ſeu vnicolor,
„ vt Baikali, ea coloris argentei.

His omnibus collatis pronum eſt concludere beatum *Stellerum*, omnes quas vidit phocarum greges pro varietatibus, non vero pro veris ſpeciebus, agnoſcere.

Aſt dantur alii, qui multas variasque phocarum ſpecies recenſent; Cranzius V. ſpecies earum exhibet (*a*) Olafſens variarum phocarum mentionem facit (*b*). Pontopidanus IV. ſpecies in medium profert (*c*). *Hallenius* totidem ſpecies ſiſtit (*d*) *Parſonius* in quatuor ſpecies phocas diſtinguit (*e*), vt reliquos taceam.

Huic

(*a*) Hiſtoria Groenlandiae p. 161. et ſeq.
(*b*) In itinere Islandico paſſim et praecipue part. §. 651. et 652.
(*c*) Hiſtor. Norueg. Tom. II. pag. 237.
(*d*) Hiſtor. Natural. Tom. I. pag. 529.
(*e*) Philoſophicar. Transact. no. 469. pag. 838.

Huic Auctorum diſſentioni vt aliquam medelam afferre et hiatum in hiſtoria phorarum adimplere poſſem, ea nunc in medium proferam, quae mihi occaſio per mare Album peregrinanti obtulit. Hoc enim tanquam inſignis Oceani glacialis ſinus, crebris inſulis, aut praeruptis montibus, vel denique ſat eleuata continenti vndique clauſum, minus procellis exponitur, et plurimam anni partem glacie natante refertum, piſcibusque varii generis abundans quietum atque lautum praebet domicilium phocis marinis. Earum quaedam quouis anni tempore conſpiciuntur, vt phoca vitulina Lin. quaedam non niſi per hyemem hoſpitantur, vt phoca Ruſſis *Krylatca* (крылатка) dicta, quaedam denique modo tempore aeſtiuo cum fluxu flumina aſcendunt, cum refluxu vero iterum deſcendunt, vt eo facilius ſaginentur. Haec phocarum ſpecies Ruſſis Lepus marinus (морской заяцЪ) audit.

Non ne liceat hic ſtatim in limine ex diuerſis anni temporibus, quibus diuerſi modo dicti phocarum greges in vno eodemque mari conſpiciundi, diuerſas earum familias, atque adeo ſpecies conſtituere? quod quidem ex ſubnexa deſcriptione clarius patebit.

PHOCA OCEANICA.

Крылатка Ruſſis dicta.

Dimenſio partium externarum ad ſcalam Anglicanam.

	Ped.	Poll.	Lin.
Ab apice roſtri ad exortum pedum anterior.	2	1	-
—— —— —— ad extremum pinnarum poſter.	6	7	6
—— —— —— ad caudae exortum - -	5	7	-
Cauda longa - - - - -	-	5	3
—— lata - - - - - -	-	2	-

	Ped.	Poll.	Lin.
Pes pinnatus poſterior longus - -	1	3	6
Pinna poſterioris pedis ad exortum lata -	-	7	2
Ab exortu pedis poſterioris ad vnguium radices - - - - -	1	1	-
Vnguis primi digiti, longus - - -	-	1	7
—— —— —— latus - - -	-	-	5
Pinna ipſa poſteriorum pedum expanſis extremitatibus lata - - -	1	2	5
Pedes anteriores longi - - -	-	8	3
—— —— ad exortum pinnae lati -	-	4	3
Pinna pedum anterior. expanſa - -	-	7	8
—— —— —— ad vnguium radices lata	-	6	8
Vnguis maximus, quantum prominet - -	-	1	8
Diſtantia ab apice labii ſuperioris ad nares	-	1	5
Columnarium lata - - -	-	1	4
Ab apice labii ſuperioris vsque ad oculi canthum maiorem - - -	-	4	8
Ab oculi cantho maiori ad minorem - -	-	1	2
Ab apice labii ſuperioris vsque ad auricularum radices - - - -	-	8	4
Setae miſtacum longiſſimae - - -	-	3	-
Craſſities capitis ad oculos - - -	1	8	4
—— —— —— pone aures - -	2	-	5
—— colli medii - - - - -	2	5	3
—— corporis ante pedes anteriores -	4	1	5
—— —— pone pedes anteriores - -	4	8	-
—— —— ad exortum pinn. poſterior. -	1	9	6

De-

Deſcriptio.

Marinum hoc animal habitu ſuo phocam communem, vel, vt cum ſyſtematicis loquar, phocam vitulinam ex amuſſim refert, et non niſi corporis mole, qua multum ſuperat, atque coloribus pilorum ab ipſa diſtinguatur. Tab. VI.

Caput rotundatum, ore prominulo, obtuſo. Labium ſuperius tumidum, craſſum medio ſulco diſtinctum, longius inferiori: labium inferius magis acuminatum. Apertura oris, pro mole corporis, parua; circumferentia enim rictus ſecundum labium inferius dimenſa aequalis $5'' - 2'''$, ſecundum ſuperius vero $6'' - 5'''$.

Dentium numerus ſequens eſt: In maxilla ſuperiori inciſores IV. conici acuti, medii minores, proximi caninis validiores. In maxilla inferiori inciſores modo IV. ſunt, minusque acuti. Iuxta inciſores vtrinque tam in maxilla ſuperiori, quam inferiori caninus vnus, validior atque acutior, $5'''$ longus ad fauces recuruatus. Molares vtrinque VI. tricuſpidati, cuſpide media longiore validiore. Ceterum dentes ita diſpoſiti ſunt, vt, dum animal apprimit dentes, nullum interſtitium relinquatur vacuum, cuſpidesque maiores dentium ſuperiorum reſpondeant cuſpidibus minoribus dentium inferiorum; hoc modo prehenſae praedae infliguntur vno ictu vulnera profunda, neque vllo modo elabi valet.

Lingua extremo bifida, papillis aſperis ad fauces retroflexis inſtructa.

Vibriſſae inſtructae ſunt ſetis decem ordinum, quarum poſteriores et inferiores reliquis longiores albidae, compreſſae, anteriores vero ſuperioresque multo breuiores et teneriores, nigerrimae.

Oculi ſat magni, prominuli, iride nigra, pupilla lucida; ruga cutanea firma nuda palpebrarum loco inſeruit;

 in

in cantho oculi anteriori ſita eſt memrbana nictitans, ſat firma, quam animal pro lubitu ſuo ad auertendas iniurias externas expandere et oculum obducere poteſt. Setae duae ſat firmae ſupra canthum maiorem oculi ſitae, eidem vſui inſeruiunt.

Auricula nulla, apertura auris ouata, rugoſa cuti clauſilis eſt.

Collum craſſum, coni truncati figura, minime tamen diſtinctum.

Brachia cuti pectoris inuoluta; palmae membrana pilis tecta coadunatae, extrema V. digitorum, minus diſtinctorum, armantur validis vnguibus nigris; quorum anterior latior, ſecundus longior eſt, reliqui magnitudine decreſcunt. In genere tamen multo validiores ſunt illis, quibus plantae inſtruuntur.

Foemora ad exortum caudae coalita, magis tamen prae brachiis longa, plantis pentadactylis, digitis membrana firma nuda inter ſe iunctis; horum extimi multo longiores ſunt, medius minimus, vnde plantae lunulatae apparent; vngues nigri, teneriores, attamen acutiores quam in plantis; mammae duae retractiles, quibus vnicum foetum nutriunt.

Cutis ſat firma, craſſa, pilis curtis tenaciter inhaerentibus inſtructa eſt; color vero eorum in diuerſis partibus diuerſus eſt. Capitis color obſcure caſtaneus et magis ad nigredinem inclinatur, qui ſuperne retro aperturam aurium excurrit, inferne vero coarctatur. Reliquum corpus ſordide album, ventre tamen magis albicante. In dorſo ad humeros conſpicitur macula capiti concolor, quae ſtatim bifurca euadit et ſecundum vtrumque latus vsque ad regionem, vbi emittitur penis, excurrit lunae dimidiatae forma, quae ſemper conſtans eſt, accedentibus interim aliis eiusdem coloris maculis irregularibus.

Ita

Ita se habet mas iam adultus; iuniores autem non modo ratione magnitudinis, verum etiam coloris multum a parentibus distant. Primo enim anno superne cineriae ac lucidae sunt, inferne magis albidae, adspersae vndique maculis rarioribus nigricantibus modo rotundatis, oblongis modo, incolisque tunc licet improprie (бѣльки) *phocae albicantes*, audiunt (*a*). Ab altero anno cinereus color diluitur albedine, maculae euadunt maiores et euidentiores et hinc (сѣрки) *phocae maculatae*, vocantur. Hunc colorem foemellae immutatum, nisi incrementum corporis, numerum atque figuram macularum velis, seruant, sub eodemque nomine semper manent: mares vero aetate prouecti subeunt mutationem colorum, vt supra descripsimus, et ob maculas obscure castaneas, latera occupantes Крылатки (quasi alatae) appellantur.

Phoca nunc descripta frigidiores maris plagas amat; hinc nonnisi hyeme cum ipsa glacie in mari albo apparet, et sub finem Aprilis enixo et enutrito foetu iterum cum glacie in spatiosum Oceanum glacialem abit, relictis modo catulis, qui eo vsque permanent, donec glacies cum littoribus cohaerens soluatur, tunque et illi vestigia parentum praemunt. Circa insulam vero Noua Zemlia dictam, vbi glacies frequens est, omni anni tempore, vt piscatores referunt, conspicitur. Porro illam eandem esse, quam Cranzius in itinere suo Grönlandico Tom. I. pag. 165. no. 2. describit; ex ipsius verbis luculentissime patet: dicit enim „Phoca, Attersoak Grönlandis, habet caput pro„minulum, corpus crassum, copiosiorem et melioris no„tae pinguedinem, aetateque matura IV. vlnas longa, co„lore cano, excepto clypeo dorsali, quem duae maculae „semi-

(*a*) Huiusmodi phocam iuniorem sistit Tab. VII. quae 2. pedes et 11. pollices longa est. Tab. VII.

„ femilunares formant, nigricante. Nulla autem phoca-
„ rum fpecies tantam mutationem colorum fubit, vti haec;
„ recens enim nata albiffima et lanuginofa eft, primoque
„ anno ex giluo albicat, altero vero cinerea eft, tertio
„ lituris pingitur, quarto adfpergitur maculis, quinto anno
„ iam aetatem maturam attingit, et macula illa clypei-
„ formi inftruitur."

Mutationes colorum, quas phocam grönlandicam ratione aetatis fubire ait Cranzius, minime dubium mouere debet illam effe a noftra diuerfam. Confundit ille, fine dubio. duas phocarum fpecies, Phocam oceanicam fcilicet, et phocam leporem marinum, de qua mox dicturus fum; huius enim catuli recens nati albiffimi funt et villofi, oceanicae vero foetus ex vtero exemtus femper cinereus eft et lituris nigricantibus infignitur.

Phocam denique noftram effe phocam oceanicam beati Steleri (*a*) et phocam tertiam beati Krafcheninnicouii (*b*) ex locis collatis vberrime patet.

Phoca Oceanica capitur ob corium et pinguedinem; coria animalium adultorum adhibentur ad obducenda fcrinia, iuniorum vero, in infula Solovki dicta, fubiguntur ad ocreas conficiendas; haec enim coria rite parata ob tenacitatem fuam magis humiditatem arcere folent, quam coria fubacta vitulorum: pinguedo ititem coriariis inferuit.

PHOCA LEPORINA.

Tab. VIII. Phocam Leporinam tempore modo aeftino in mari albo comparere et flumina in eum fe exonerantia afcedere et defcendere, antea monuimus; hincque eam diuerfam effe a *Phoca Oceanica* conclufionem fecimus. Nunc vero quaenam fint notae diftinctiuae eam a phoca Oceanica fegregantes proponendum eft. Dimer-

(*a*) Noua Commentaria A. S. Petropolit. Tom II. pag. 290.
(*b*) Defcript. Kamtfchatkae Tom. I. pag. 262.

Dimenſio.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius animalis ab apice roſtri ad caudae extremum - - -	6	6	-
—— ad exortum pinnae poſterioris - -	6	2	-
—— ad brachia - - - -	2	-	-
Ab apice labri ſuperoris ad canthum oculi maior.	-	5	2
Ab oculi cantho maiori ad minorem - -	-	1	2
Ab apice labri ſuper. ad aricularum radices	-	8	6
—— —— —— —— ad nares - -	-	1	8
Cauda longa eſt - - -	-	4	2
—— lata ad radicem - - -	-	2	1
Pes pinnatus poſterior longus - -	-	11	4
Pinna poſterioris pedis ad exortum lata -	-	6	-
Ab exortu pedis poſterioris ad vnguium radices	-	8	10
Vnguis maximus primi digiti longus -	-	-	9
—— idem latus - - -	-	-	5
Pinna ipſa poſteriorum pedum extremitatibus expenſis lata - - -	1	1	-
Pedes pinnati anteriores longi - -	-	6	3
—— —— ad exortum vnguium - -	-	4	-
Vnguis maximus quantum prominet longus	-	1	2
—— —— latus - - - -	-	-	6
Setae miſtae. longiſſimae - - -	-	5	-
Apertura rictus per labrum ſperius demenſi -	-	9	5
—— —— —— —— inferius - -	-	7	11
Craſſitudo roſtri . - - -	1	-	5
—— capitis linea per oculos ducta -	1	4	5
—— —— per aures - - -	1	7	6
—— corporis ante brachia - -	4	2	-
—— —— pone brachia - -	5	1	-
—— —— ad exortum pedum poſterior -	2	1	-

Deſcriptio.

Phoca nunc deſcribenda ratione habitus corporis ac magnitudinis, vt ex dimenſionibus patet, phocam Oceanicam omnino

 refert;

refert; ſunt tamen quaedam huic ſpeciei propria. Color enim totius ſordide albus, admixta pauca flauedine, neque vnquam maculata conſpicitur. Pili ſunt ploxiores, non appreſſi, ſed erecti, praeſertim vero in iunioribus prolixitate mollitie atque albedine pilos leporinos imitantur; vnde ratio denominationis facile patet (*a*).

Caput non tam magnum, prouti in phoca Oceanica, ſed elongatum eſt; labrum ſuperius magis tumidum et inſtar vitulini craſſum. Oculi coeruleſcentes, pupilla nigra, dentes numero et ordine omnino ſunt vt in phoca Oceanica; multo tamen validiores; aſt vibriſſae alio modo ſeſe habent; conſtant enim quindecim ordinibus ſetarum, quae craſſae validaeque ſunt et anteriorem partem labri ſuperioris vndique obſident, hinc phoca haec quaſi barbata apparet.

Brachia multo debiliora ſunt, palmae breues coarctatae et quaſi abruptae. Membrana plantarum digitos vniens minime lunulata, ſed vndique aequalis eſt; cauda breuior, craſſior tamen.

Euidentiſſima autem diſtinctionis nota conſiſtit in ipſo corio, quod quadruplo craſſius eſt; corio phocae Oceanicae, et animali recens occiſo detractum V. lineas craſſum. Reliqua vt in phoca Oceanica.

Phocam Leporinam ab aliis diſtinctam nullibi inuenimus, Cranzius tamen videtur eam cum phoca Oceanica confundiſſe, vt ſupra adnotauimus. Olaſſens in itinere Islandico T. XXXII. Fig. 2. eam ſub nomine *phocae iunioris Kopur.* depictam ſiſtere, ex icone collato facile patet.

Phoca Leporina occiditur propter adipem et corium. Adeps ipſius eidem vſui inſeruit ac phocae Oceanicae; corium vero ob firmitatem et craſſitudinem ſuam ſcinditur in linea ſpirali pondereque appenſo in rectam dirigitur et ad lora habenasque adhibetur. Iuniorum autem pelles ſubiguntur, pilique nigro imbuuntur colore. His obducuntur externae mytrae, quae quodammodo pelles caſtoreas imitantur; ſed pili multo ſunt rigidires, tempori tamen longe reſiſtunt nec facile atteruntur aut defluunt.

ASTRO-

(*a*) Tab. IX. ſiſtit phocam leporinam iuniorem, quae 3. ped. longa eſt.

ASTRONOMICA.

CONSIDERATIONES SVPER PROBLEMATE ASTRONOMICO IN TOMO COMMENTARIOR. VETER. IV. PERTRACTATO.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum illo tempore calculus angulorum adhuc parum esset excultus, solutiones ibi traditae huius problematis non satis sunt dilucide ac plerumque per longas ambages erutae; vnde haud abs re fore arbitror hoc idem problema retractare, quandoquidem plures egregias obsertiones nunc adiicere licebit, quibus istud argumentum multo magis illustrabitur.

§. 2. Requiritur autem in hoc problemate, *vt ex tribus eiusdem stellae fixae obseruatis altitudinibus, vna cum temporis interuallis inter obseruationes elapsis tam eleuatio poli eius loci, vbi obseruationes sunt factae, quam declinatio ipsius stellae, seu eius distantia a polo difiniatur.* Sit igitur P polus et Z zenith eius loci, vbi obseruationes sunt institutae et OABCV parallelus, quem stella motu diurno percurrit, eritque PZ complementum altitudinis poli quaesitae et arcus PA, PB et PC referent distantiam stellae a polo, siue complementum eius declinationis, quae pariter desideratur; vnde has duas incognitas vocemus $PZ = x$ et $PA = PB = PC = y$. Tab. X. Fig. 1.

§. 3. Iam quae ſunt data contemplemur, ac primo quidem tempore obſeruationis primae fuerit ſtella in A, voceturque arcus $ZA = a$, qui erit complementum altitudinis obſeruatae, poſtquam ſcilicet per refractionem fuerit correcta. Deinde elapſo quodam tempore cognito ſtella fuerit in B, voceturque arcus $ZB = b$, ac denuo elapſo tempore quodam cognito peruenerit ſtella in C, voceturque arcus $ZC = c$. Ex datis autem temporis interuallis innoteſcent anguli ad Polum APB et BPC, quos ponamus $APB = \alpha$ et $BPC = \beta$, atque hae ſunt quinque quantitates cognitae, ex quibus binas incognitas x et y determinari oportet.

§. 4. Euidens autem eſt quamlibet harum trium obſeruationum tanquam primam ſpectari poſſe. Ita ſi tempore primae obſeruationis ſtella fuerit in B, tempore ſecundae erit in C, exiſtente angulo $BPC = \beta$; tertia vero poſtridie eueniet in A, elapſo tempore, cui reſpondet angulus horarius $= 360° - \alpha - \beta$, ſiue quia in huiusmodi calculis totam peripheriam 360° negligere licet, iſte angulus erit $-\alpha - \beta$, quem breuitatis gratia ponamus $= \gamma$, ita vt ſit $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Hi ergo anguli, ſi prima obſeruatio in A ſtatuatur, ordinem tenent α, β, γ; ſin autem prima ſit in B, ordo angulorum erit β, γ, α; ſumpto denique prima obſeruatione in C ordo angulorum erit γ, α, β.

§. 5. Ad ſolutionem autem perficiendam neceſſe eſt inſuper angulum ZPA in calculum introducere. Ponamus igitur $ZPA = \phi$, atque ob analogiam ſtatuamus $ZPB = \phi'$ et $ZPC = \phi''$, eritque igitur $\phi' = \phi + \alpha$, $\phi'' = \phi' + \beta$ et $\phi = \phi'' - \alpha - \beta$, ſiue $\phi = \phi'' + \gamma$ ita vt hi tres anguli ϕ, ϕ', ϕ'' pari ordine procedant atque anguli α, β, γ; vnde permutato obſeruationum ordine ſimilis permutatio locum habebit tam in angulis α, β, γ quam in angulis ϕ, ϕ', ϕ''. Haec ideo notaſſe iuuabit, vt formulae pro vno caſu inventae facili ad reliquos caſus transferri poſſint.

§. 6,

§. 6. Consideremus nunc triangulum sphaericum AZP, ex cuius lateribus $ZA = a$, $ZP = x$ et $PA = y$ angulus $ZPA = \Phi$ ita determinatur, vt sit $\cos. \Phi = \frac{\cos. a - \cos. x \cos. y}{\sin. x \sin. y}$ siue $\cos. \Phi \sin. x \sin. y = \cos. a - \cos. x \cos. y$. Simili modo ex triangulo ZBP colligemus hanc determinationem:

$$\cos. \Phi' \sin. x \sin. y = \cos. b - \cos. x \cos. y$$

ac tertio similiter ex triangulo ZCP habebimus

$$\cos. \Phi'' \sin. x \sin. y = \cos. c - \cos. x \cos. y,$$

atque ex his tribus aequationibus totam solutionem erui oportet.

§. 7. Quo autem calculum subleuemus ponamus, breuitatis gratia $\cos. x \cos. y = p$ et $\sin. x \sin. y = q$, ita vt hinc fiat $p + q = \cos. (x - y)$ et $p - q = \cos. (x + y)$: inuentis ergo litteris p et q facillime ambo anguli quaesiti x et y innotescent; vbi imprimis notari meretur, binos angulos x et y inter se esse permutabiles, namque si facta permutatione posuissemus $PZ = y$ et $PA = PB = PC = x$, ad easdem aequationes peruenissemus; sicque pro x et y quouis casu bini reperientur anguli, quorum alterum pro arcu PZ, alterum vero pro arcu PA accipere licebit, scilicet ex ipsa quaestionis natura eleuatio poli ac declinatio stellae semper inter se commutari poterunt.

§. 8. His igitur litteris p et q introductis tres nostrae aequationes ita se habebunt:

I. $q \cos. \Phi = \cos. a - p$

II. $q \cos. \Phi' = \cos. b - p$

III. $q \cos. \Phi'' = \cos. c - p$.

Hinc igitur primo facillime eliminabimus quantitatem incognitam p; si enim quamlibet harum aequationum a sequente subtrahamus, obtinebimus has aequationes:

I. q

I. $q(\cos.\Phi' - \cos.\Phi) = \cos.b - \cos.a$

II. $q(\cos.\Phi'' - \cos.\Phi') = \cos.c - \cos.b$

III. $q(\cos.\Phi - \cos.\Phi'') = \cos.a - \cos.c$,

quarum autem duas tantum euoluisse sufficiet. Quodsi iam porro breuitatis gratia ponamus

$\cos.b - \cos.a = A$; $\cos.c - \cos.b = B$ et $\cos.a - \cos.c = C$;

ita vt sit $A + B + C = 0$. impetrabimus has aequationes maxime succinctas:

I. $\cos.\Phi' - \cos.\Phi = \frac{A}{q}$

II. $\cos.\Phi'' - \cos.\Phi' = \frac{B}{q}$

III. $\cos.\Phi - \cos.\Phi'' = \frac{C}{q}$.

§. 9. Nunc etiam facile erit alteram incognitam q eliminare; diuidamus enim primam harum postremarum aequalitatum per tertiam, et nanciscemur istam $\frac{\cos.\Phi' - \cos.\Phi}{\cos.\Phi - \cos.\Phi''} = \frac{A}{C}$; quare cum sit $\Phi' = \Phi + \alpha$ et $\Phi'' = \Phi - \gamma$, erit

$\cos.\Phi' = \cos.\Phi \cos.\alpha - \sin.\Phi \sin.\alpha$ et

$\cos.\Phi'' = \cos.\Phi \cos.\gamma + \sin.\Phi \sin.\gamma$;

quibus valoribus substitutis aequatio hanc induet formam:

$$\frac{\cos.\Phi \cos.\alpha - \sin.\Phi \sin.\alpha - \cos.\Phi}{\cos.\Phi - \cos.\Phi \cos.\gamma - \sin.\Phi \sin.\gamma} = \frac{A}{C}$$

quae sponte redigitur ad hanc formam:

$$\frac{\cos.\alpha - \sin.\alpha \operatorname{tg}.\Phi - 1}{1 - \cos.\Phi - \sin.\gamma \operatorname{tg}.\Phi} = \frac{A}{C},$$

vnde igitur commodissime deducitur angulus Φ, cum sit $\operatorname{tang}.\Phi = \frac{A(1 - \cos.\gamma) + C(1 - \cos.\alpha)}{A \sin.\gamma - C \sin.\alpha}$. Hoc igitur modo angulus Φ per meras quantitates cognitas determinatur, quo inuento porro colligitur fore $q = \frac{A}{\cos.\Phi' - \cos.\Phi}$, hincque denique $p = \cos.a - q\cos.\Phi$, sicque problema perfecte erit solutum.

§. 10. Interim tamen operae pretium erit singulas formulas, ad quas hoc modo peruenietur, accuratius euoluere,

vere, ac primo quidem, si obseruatio prima ex A in B vel C transferatur, eodem modo perueniemus ad has aequationes:

$$\text{tang. } \Phi' = \frac{B(1 - \text{cos.}\,\alpha) + A(1 - \text{cos.}\,\beta)}{B\,\text{sin.}\,\alpha - A\,\text{sin.}\,\beta} \text{ et}$$

$$\text{tang. } \Phi'' = \frac{C(1 - \text{cos.}\,\beta) + B(1 - \text{cos.}\,\gamma)}{C\,\text{sin.}\,\beta - B\,\text{sin.}\,\gamma}.$$

§. 11. Inuenta tangente anguli Φ quaeramus quoque eius tam sinum quam cosinum, ac reperiemus

$$\text{sin. } \Phi = \frac{A(1 - \text{cos.}\,\gamma) + C(1 - \text{cos.}\,\alpha)}{\sqrt{2AA(1 - \text{cos.}\,\gamma) + 2CC(1 - \text{cos.}\,\alpha) + 2AC(1 - \text{cos.}\,\gamma - \text{cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\gamma\,\text{cos.}\,\alpha - \text{sin.}\,\gamma\,\text{sin.}\,\alpha)}}$$

Hic autem pro denominatore notetur esse

$$\text{cos.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\gamma - \text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\gamma = \text{cos.}\,(\alpha + \gamma) = \text{cos.}\,\beta$$

sicque iste denominator habebit hanc formam:

$$\sqrt{(2AA(1 - \text{cos.}\,\gamma) + 2CC(1 - \text{cos.}\,\alpha) + 2AC(1 - \text{cos.}\,\gamma - \text{cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\beta))}$$

hunc ergo denominatorem si breuitatis gratia designemus per Δ erit

$$\text{sin. } \Phi = \frac{A(1 - \text{cos.}\,\gamma) + C(1 - \text{cos.}\,\alpha)}{\Delta} \text{ et cos. } \Phi = \frac{A\,\text{sin.}\,\gamma - C\,\text{sin.}\,\alpha}{\Delta}.$$

§. 12. Hic autem imprimis notari meretur pro quantitate irrationali Δ perpetuo eundem valorem resultare, etiamsi litterae a, b, c; A, B, C et α, β, γ ordine praescripto inter se permutentur. Cum enim sit

$$\tfrac{1}{2}\Delta^2 = AA(1 - \text{cos.}\,\gamma) + CC(1 - \text{cos.}\,\alpha) + AC(1 - \text{cos.}\,\gamma - \text{cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\beta)$$

singulis terminis secundum ternos cosinus, cos. α, cos. β et cos. γ disponendis, erit

$$\tfrac{1}{2}\Delta^2 = AA + AC + CC - (AC + CC)\,\text{cos.}\,\alpha + AC\,\text{cos.}\,\beta - (A^2 + AC)\,\text{cos.}\,\gamma$$

Quoniam vero est $A + B + C = 0$, primae parti huius expressionis adiiciatur formula $AB + BB + BC = 0$ atque prima pars euadet $AA + BB + CC + AB + AC + BC$, vbi ternae litterae manifesto sunt permutabiles. Deinde vero erit

$$AC + CC = C(A + C) = -BC \text{ et}$$
$$AA + AC = A(A + C) = -AB$$

quibus substitutis erit

$$\tfrac{1}{2}\Delta = AA + BB + CC + AB + AC + BC + BC\cos.\alpha + AC\cos.\beta + AB\cos.\gamma,$$

vbi permutabilitas litterarum est manifesta, ideoque pro omnibus obseruationum ordinibus semper erit

$$\Delta = \sqrt{2(AA+BB+CC+AB+AC+BC+BC\cos.\alpha+AC\cos.\beta+AB\cos.\gamma)}$$

quae formula etiam hoc modo exhiberi potest

$$\Delta = \sqrt{(2A^2+2B^2+2C^2+4AB\cos.\tfrac{1}{2}\gamma^2+4AC\cos.\tfrac{1}{2}\beta^2+4BC\cos.\tfrac{1}{2}\alpha^2)}.$$

§. 13. Inuento iam isto valore quantitatis irrationalis Δ tam sinus quam cosinus angulorum Φ, Φ' et Φ'' sequenti modo exprimentur:

$$\sin.\Phi = \frac{A(1-\cos.\gamma)+C(1-\cos.\alpha)}{\Delta};\quad \cos.\Phi = \frac{A\sin.\gamma - C\sin.\alpha}{\Delta};$$
$$\sin.\Phi' = \frac{B(1-\cos.\alpha)+A(1-\cos.\beta)}{\Delta};\quad \cos.\Phi' = \frac{B\sin.\alpha - A\sin.\beta}{\Delta};$$
$$\sin.\Phi'' = \frac{C(1-\cos.\beta)+B(1-\cos.\gamma)}{\Delta};\quad \cos.\Phi'' = \frac{C\sin.\beta - B\sin.\gamma}{\Delta}.$$

§. 14. Ex his iam formulis triplici modo valor litterae q elici potest, qui autem terni valores inter se perfecte congruere debebunt, id quod statim ex primo valore $q = \frac{A}{\cos.\Phi' - \cos.\Phi}$ perspicietur; cum enim ex formulis modo inuentis sit

$$\cos.\Phi' - \cos.\Phi = \frac{B\sin.\alpha - A(\sin.\beta + \sin.\gamma) + C\sin.\alpha}{\Delta} \text{ ob}$$

$B + C = -A$ erit $\cos.\Phi' - \cos.\Phi = -\frac{A(\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma)}{\Delta}$, ideoque $q = -\frac{\Delta}{\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma}$, vbi permutabilitas in oculos incurrit simulque patet ex binis reliquis formulis

$$q = \frac{B}{\cos.\Phi'' - \cos.\Phi'} \text{ et } q = \frac{C}{\cos.\Phi - \cos.\Phi''},$$

prorsus eandem hanc expressionem resultare debuisse.

§. 15. Tantum igitur superest, vt etiam valorem litterae p hinc oriundum contemplemur, ad quod vtamur formula prima, qua fit $p = \operatorname{cof.} a - q \operatorname{cof.} \Phi$. Est vero

$$q \operatorname{cof.} \Phi = - \frac{A \operatorname{fin.} \gamma + C \operatorname{fin.} \alpha}{\operatorname{fin.} \alpha + \operatorname{fin.} \beta + \operatorname{fin.} \gamma} \text{ ideoque}$$

$$p = \operatorname{cof.} a + \frac{A \operatorname{fin.} \gamma - C \operatorname{fin.} \alpha}{\operatorname{fin.} \alpha + \operatorname{fin.} \beta + \operatorname{fin.} \gamma},$$

verum quia hic cof. a non per litteras A, B, C exprimere licet, necesse est, vt loco litterarum A, B, C viciffim cofinus angulorum a, b, c in calculum introducantur; tum autem erit

$$q \operatorname{cof.} \Phi = - \frac{\operatorname{cof.} b \operatorname{fin.} \gamma + \operatorname{cof.} a \operatorname{fin.} \gamma + \operatorname{cof.} a \operatorname{fin.} \alpha - \operatorname{cof.} c \operatorname{fin.} \alpha}{\operatorname{fin.} \alpha + \operatorname{fin.} \beta + \operatorname{fin.} \gamma}$$

quo valore fubftituto reperietur

$$p = \frac{\operatorname{cof.} a \operatorname{fin.} \beta + \operatorname{cof.} b \operatorname{fin.} \gamma + \operatorname{cof.} c \operatorname{fin.} \alpha}{\operatorname{fin.} \alpha + \operatorname{fin.} \beta + \operatorname{fin.} \gamma}$$

vbi iterum permutabilitas fecundum ordinem litterarum per fe eft manifefta; vnde intelligitur ex omnibus tribus formulis litteram p continentibus evndem plane valorem refultare debere.

§. 16. Hic iam opere pretium erit etiam in valore litterae Δ loco litterarum A, B, C fuos valores fupra asfignatos fubftituere, quo facto reperietur:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta^2 = {} & 2 \operatorname{cof.} a^2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2 + 2 \operatorname{cof.} a \operatorname{cof.} b (\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2) \\ & + 2 \operatorname{cof.} b^2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2 \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c (\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2) \\ & + 2 \operatorname{cof.} c^2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2 + 2 \operatorname{cof.} c \operatorname{cof.} a (\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2) \end{aligned}$$

vnde colligitur fore

$$\Delta = 2 \sqrt{\left\{ \begin{aligned} & + \operatorname{cof.} a^2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2 + \operatorname{cof.} a \operatorname{cof.} b (\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2) \\ & + \operatorname{cof.} b^2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c (\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2) \\ & + \operatorname{cof.} c^2 \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \operatorname{cof.} c \operatorname{cof.} a (\operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta^2) \end{aligned} \right.}.$$

vbi permutabilitas litterarum a, b, c item α, β, γ clariffime perfpicitur.

DE FIGVRA APPARENTE ANNVLI SATVRNI PRO EIVS LOCO QVOCVNQVE RESPECTV TERRAE.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Concipiamus Saturnum in ipſo plano eclipticae moueri; nam quoniam eius latitudo perpetuo eſt valde parua, Tab. X. Fig. 2. eius declinatio ab hoc plano vix quicquam in apparentia annuli mutare poterit. Referat igitur planum tabulae ipſam eclipticam, in qua C ſit centrum Saturni, et recta ACB ſit interſectio annuli Saturni cum ecliptica, cuius diameter per ipſam hanc rectam AB repraeſentetur, voceturque radius $CA = CB = 1$. Deinde quia annulus ad eclipticam inclinatur ſub angulo circiter 31 graduum, quem vocemus $= i$, repraeſentet ſemicirculus AMB ſemiſſem annuli, in quo conſideretur punctum quodcunque M, voceturque angulus $ACM = \phi$; hincque ex M ducto ad AB perpendiculo MP, erit $MP = \text{ſin.}\,\phi$ et $CP = \text{coſ.}\,\phi$. Porro ex M ad planum eclipticae ducatur perpendiculum MR, et ob angulum $MPR = i$ erit $MR = \text{ſin.}\,\phi\,\text{ſin}\,i$ et $PR = \text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,i$.

Fig. 3. §. 2. Verſetur nunc Terra vbicunque in T, et ad eius locum ducatur ex C recta CT, et vocetur angulus $ACT = \gamma$. Tum quia diſtantia Terrae quaſi eſt infinita, huic rectae CT conſtituatur planum normale, quod ſimul ad eclipticam erit perpendiculare eamque ſecabit ſecundum rectam CQ; ita vt angulus TCQ ſit rectus, ideoque angulus

gulus $ACQ = 90^\circ - \gamma$. Iam ad hanc CQ ex R ducatur normalis RQ, et ex Q erigatur perpendiculum ad eclipticam $QS = RM$, eritque S proiectio puncti M in planum CQS facta. Tota autem haec proiectio ex omnibus punctis M orta dabit figuram, sub qua annulus spectatori in Terra posito apparebit.

§. 3. Pro hac igitur proiectione inuestiganda vocetur abscissa $CQ = x$ et applicata $QS = y$, et quia erat $PR = \text{sin.}\,\phi\,\text{cos.}\,i$, $RM = \text{sin.}\,\phi\,\text{sin.}\,i$ et $CP = \text{cos.}\,\phi$, statim erit $y = \text{sin.}\,\phi\,\text{sin.}\,i$. Iam ex puncto P ad rectam CQ agatur normalis PV, eritque $CV = \text{cos.}\,\phi\,\text{sin.}\,\gamma$ et $PV = \text{cos.}\,\phi\,\text{cos.}\,\gamma$. Tum vero ex R ad PV ducatur normalis RU, et ob angulum $RPU = 90^\circ - \gamma$ erit

$PU = \text{sin.}\,\phi\,\text{cos.}\,i\,\text{sin.}\,\gamma$ et $RU = \text{sin.}\,\phi\,\text{cos.}\,i\,\text{cos.}\,\gamma = QV$, vnde fit

$$CQ = x = \text{cos.}\,\phi\,\text{sin.}\,\gamma + \text{sin.}\,\phi\,\text{cos.}\,i\,\text{cos.}\,\gamma.$$

Tota igitur quaestio reducitur ad inuentionem curuae sub coordinatis $CQ = x = \text{cos.}\,\phi\,\text{sin.}\,\gamma + \text{sin.}\,\phi\,\text{cos.}\,i\,\text{cos.}\,\gamma$ et $QS = y = \text{sin.}\,\phi\,\text{sin.}\,i$ contentae.

§. 4. Facile autem patet, si angulus ϕ eliminetur, prodituram esse aequationem inter x et y secundi gradus, ita vt haec curua sit sectio conica. Cum enim sit $\text{sin.}\,\phi = \frac{y}{\text{sin.}\,i}$, erit $\text{cos.}\,\phi = \frac{\sqrt{\text{sin.}\,i^2 - yy}}{\text{sin.}\,i}$, vnde oritur aequatio Tab. X. Fig. 4.

$$x = \frac{\text{sin.}\,\gamma\,\sqrt{\text{sin.}\,i^2 - yy}}{\text{sin.}\,i} + \frac{y\,\text{cos.}\,\gamma}{\text{tang.}\,i},$$

quae ad rationalitatem perducta abit in hanc:

$$xx - \frac{2xy\,\text{cos.}\,\gamma}{\text{tang.}\,i} + \frac{yy\,\text{cos.}\,\gamma^2}{\text{tang.}\,i^2} = \frac{\text{sin.}\,\gamma^2(\text{sin.}\,i^2 - yy)}{\text{sin.}\,i^2}, \text{ siue}$$

$$0 = xx\,\text{sin.}\,i^2 - 2xy\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i\,\text{cos.}\,\gamma + yy(1 - \text{cos.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2) - \text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2.$$

§. 5. Cum igitur curua quaesita manifesto sit ellipsis, imprimis necesse erit, tam positionem quam quantitatem eius axium determinandi; quod quo facilius fieri possit, ponamus

mus breuitatis gratia $x = a \operatorname{cof.} \Phi + b \operatorname{fin.} \Phi$ et $y = c \operatorname{fin.} \Phi$, ita vt fit $a = \operatorname{fin.} \gamma$, $b = \operatorname{cof.} \gamma \operatorname{cof.} i$ et $c = \operatorname{fin.} i$, hincque ducta recta CS erit

$$CS = xx + yy = a^2 \operatorname{cof.} \Phi^2 + 2ab \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi + (b^2 + c^2) \operatorname{fin.} \Phi^2.$$

Conftat autem punctum S ibi in alterutrum axem incidere, vbi haec formula valorem fortietur vel maximum vel minimum; quamobrem differentiale huius CS^2 nihilo aequetur, vnde oritur haec aequatio:

$$-aa \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi + ab \operatorname{cof.} \Phi^2 - ab \operatorname{fin.} \Phi^2 + (bb + cc) \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi = 0.$$

Eft vero $\operatorname{fin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi = \frac{1}{2} \operatorname{fin.} 2\Phi$ et $\operatorname{cof.} \Phi^2 - \operatorname{fin.} \Phi^2 = \operatorname{cof.} 2\Phi$ vnde fit $\frac{(bb + cc - aa)}{2} \operatorname{fin.} 2\Phi + ab \operatorname{cof.} 2\Phi = 0$, vnde elicitur $\operatorname{tang.} 2\Phi = \frac{2ab}{aa - bb - cc}$. Subftitutis iam pro a, b, c valoribus habebitur $\operatorname{tang.} 2\Phi = \frac{2 \operatorname{fin.} \gamma \operatorname{cof.} \gamma \operatorname{cof.} i}{\operatorname{fin.} \gamma^2 \operatorname{cof.} i^2 - \operatorname{cof.} \gamma^2}$.

§. 6. Ad binos igitur valores anguli Φ inueniendos, quaeratur angulus α, vt fit $\operatorname{tang.} \alpha = \frac{2ab}{aa - bb - cc}$, et cum haec fractio etiam fit $= \operatorname{tang.} (180^\circ + \alpha)$, erit tam $2\Phi = \alpha$, quam $2\Phi = 180^\circ + \alpha$, ideoque vel $\Phi = \frac{1}{2}\alpha$ vel $\Phi = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Quod fi iam alteruter horum duorum valorum $\frac{1}{2}\alpha$ et $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ loco Φ fubftituatur, tum fractio $\frac{y}{x} = \frac{c \operatorname{fin.} \Phi}{a \operatorname{cof.} \Phi + b \operatorname{fin.} \Phi}$ dabit tangentem anguli, fub quo alter ellipfeos axis ad rectam CQ inclinatur; recta autem $CS = \sqrt{xx + yy}$ dabit femiffem huius axis, cui alter in C normaliter eft iungendus; quandoquidem facile patet, punctum C effe centrum huius ellipfis. Verum quia ex valore pro $\operatorname{tang.} 2\Phi$ inuento tam $\operatorname{fin.} \Phi$ quam $\operatorname{cof.} \Phi$ ad formulas valde intricatas perducerent, inueftigationem axium alia via inftituamus.

Tab. X. Fig. 5. §. 7. Quoniam recta CD, ad quam ellipfin quaefitam referimus, eft in ipfo plano eclipticae et ad rectam CT normalis, ipfa autem figura plano eclipticae normaliter infiftere eft concipienda, referat recta CT alterutrum ellip-

ellipseos semiaxem, pro cuius positione ponamus angulum $DCF = \zeta$, et ducta normali SX vocemus pro ipso hoc axe CF abscissam $CX = X$ et applicatam $XS = Y$; ac facile patet fore

$$X = x \operatorname{cos.} \zeta + y \operatorname{sin.} \zeta \text{ et } Y = y \operatorname{cos.} \zeta - x \operatorname{sin.} \zeta$$

vnde valoribus loco x et y substitutis erit

$$X = a \operatorname{cos.} \zeta \operatorname{cos.} \Phi + (b \operatorname{cos.} \zeta + c \operatorname{sin.} \zeta) \operatorname{sin.} \Phi$$

$$Y = (c \operatorname{cos.} \zeta - b \operatorname{sin.} \zeta) \operatorname{sin.} \Phi - a \operatorname{sin.} \zeta \operatorname{cos.} \Phi$$

pro quibus voloribus breuitatis gratia scribamus

$$X = A \operatorname{cos.} \Phi + B \operatorname{sin.} \Phi \text{ et } Y = C \operatorname{cos.} \Phi + D \operatorname{sin.} \Phi.$$

§. 8. Iam quia per hypothesin recta CF est semiaxis ellipsis, aequatio inter X et Y necessario habebit talem formam: $mX^2 + nY^2 = K$; quamobrem, si in hac aequatione illi valores pro X et Y substituantur, angulus variabilis Φ ex calculo excedere debet. Primo igitur necesse est, vt duplicia producta formae $\operatorname{sin.} \Phi \operatorname{cos.} \Phi$ se mutuo tollant, vnde fieri oportet $2mAB + 2nCD = 0$, vnde ratio inter m et n colligitur. Erit scilicet $m : n = CD : -AB$; quamobrem nihil impedit, quo minus scribamus $m = CD$ et $n = -AB$ ita vt nostra aequatio sit

$$CD.X^2 - AB.Y^2 = K.$$

§. 9. Nunc igitur exclusis tetminis formae $\operatorname{sin.} \Phi . \operatorname{cos.} \Phi$ consideremus terminum formae $\operatorname{cos.} \Phi^2$, qui erit

$$(CD.A^2 - AB.C^2) \operatorname{cos.} \Phi^2 = AC(AD - BC) \operatorname{cos.} \Phi^2.$$

Simili modo terminus formae $\operatorname{sin.} \Phi^2$ prodibit

$$(CD.B^2 - AB.D^2) \operatorname{sin.} \Phi^2 = BD(BC - AD) \operatorname{sin.} \Phi^2.$$

Quo igitur angulus Φ ex aequatione exeat, necesse est vt sit

$$AC(AD - BC) = BD C BC - AD)$$

siue

siue $AC = -BD$, vel etiam $AC + BD = 0$; tum enim erit

$$CD.X^2 - AB.Y^2 = AC(AD-BC) = BD(BC-AD) = K$$

Sicque erit $K = AC(AD-BC)$, siue cum ex priore conditione sit $D = -\frac{AC}{B}$, erit $K = -\frac{ACC}{B}(AA+BB)$.

§. 10. Hoc iam valore inuento longitudo semiaxium CF et CG facili negotio eruitur. Si enim ponatur $Y=0$ valor ipsius X dabit longitudinem semiaxis CF, qui ergo, si ponatur $= F$, reperietur

$$CD.F^2 = -\frac{ACC(AA+BB)}{B} = -\frac{ACCF^2}{B},$$

vnde colligitur $F = \sqrt{AA+BB}$. Pro altero autem semiaxe, qui sit $CG = G$ et alteri CF normaliter iungitur, is reperietur ponendo $X = 0$ et $Y = G$, vnde ergo aequatio §. praec. fiet

$$-AB.G^2 = -\frac{ACC(AA+BB)}{B},$$

vnde concluditur

$$G = \frac{C}{B}\sqrt{AA+BB} = \sqrt{\left(\frac{AACC}{BB} + CC\right.}.$$

Quare cum sit $D = -\frac{AC}{B}$, erit quoque $G = \sqrt{CC+DD}$. Ceterum hic notetur esse $F : G = B : C$.

§. 11. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C, D valores assumtos, eritque

$$AA+BB = (aa+bb)\operatorname{cos}.\zeta^2 + 2bc \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{cos}.\zeta + cc \operatorname{sin}.\zeta^2.$$

Cum igitur sit $\operatorname{cos}.\zeta^2 = \frac{1+\operatorname{cos}.2\zeta}{2}$, $\operatorname{sin}.\zeta^2 = \frac{1-\operatorname{cos}.2\zeta}{2}$ et $2 \operatorname{sin}.\zeta \operatorname{cos}.\zeta = \operatorname{sin}.2\zeta$ erit

$$AA+BB = \frac{aa+bb+cc}{2} + bc \operatorname{sin}.2\zeta + \frac{aa+bb-cc}{2}\operatorname{cos}.2\zeta.$$

Simili modo reperiemus

$$CC+DD = \frac{aa+bb+cc}{2} - bc \operatorname{sin}.2\zeta - \frac{(aa+bb-cc)}{2}\operatorname{cos}.2\zeta.$$

Praeterea vero erit

$$F : G = (b \operatorname{cos}.\zeta + c \operatorname{sin}.\zeta) : (-a \operatorname{sin}.\zeta).$$

§. 12.

§. 12. Quod si porro loco litterarum a, b, c valores ante assumtos substituamus, reperietur

$$aa + bb + cc = 1 + \text{fin.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2$$
$$aa + bb - cc = \text{cof.}\,i^2 - \text{cof.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2 \text{ et}$$
$$bc = \text{cof.}\,\gamma\,\text{fin.}\,i\,\text{cof.}\,i$$

quibus valoribus substitutis erit

$$F^2 = \tfrac{1}{2}(1 + \text{fin.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2) + \text{cof.}\,\gamma\,\text{fin}\,i\,\text{cof.}\,i\,\text{fin.}\,2\zeta$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\text{cof.}\,i^2 - \text{cof.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2)\,\text{cof.}\,2\zeta$$
$$G^2 = \tfrac{1}{2}(1 + \text{fin.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2) - \text{cof.}\,\gamma\,\text{fin.}\,i\,\text{cof.}\,i\,\text{fin.}\,2\zeta$$
$$- \tfrac{1}{2}(\text{cof.}\,i^2 - \text{cof.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2)\,\text{cof.}\,2\zeta.$$

§ 13. Tantum igitur superest, vt angulum ζ definiamus, cuius valorem peti oportet ex aequatione $AC + BD = 0$, quae, facta prima substitutione, induit hanc formam:

$$-aa\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\zeta + bc\,\text{cof.}\,\zeta^2 + (cc - bb)\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\zeta - bc\,\text{fin.}\,\zeta^2 = 0 \text{ siue}$$
$$(aa + bb - cc)\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\zeta + bc(\text{fin.}\,\zeta^2 - \text{cof.}\,\zeta^2) = 0$$

quae aequatio manifesto reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{2}(aa + bb - cc)\,\text{fin.}\,2\zeta = bc\,\text{cof.}\,2\zeta,$$

vnde deducitur

$$\text{tang.}\,2\zeta = \frac{2bc}{aa + bb - cc}.$$

Per alteram autem substitutionem habebitur

$$\text{tang.}\,2\zeta = \frac{2\,\text{cof.}\,\gamma\,\text{fin.}\,i\,\text{cof.}\,i}{\text{cof.}\,i^2 - \text{cof.}\,\gamma^2\,\text{fin.}\,i^2}$$

ex qua aequatione pro ζ duo reperiuntur valores. Si enim quaeratur angulus β, vt sit

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{2bc}{aa + bb - cc},$$

erit tam $\text{tang.}\,2\zeta = \text{tang.}\,\beta$ quam $\text{tang.}\,2\zeta = \text{tang.}\,(180^\circ + \beta)$, ideoque vel $\zeta = \tfrac{1}{2}\beta$ vel $\zeta = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\beta$.

§. 14. Cum ex aequatione primo inuenta sit

$$\tfrac{1}{2}(aa + bb - cc)\,\text{fin.}\,2\zeta = bc\,\text{cof.}\,2\zeta,$$

 operae

operae pretium erit annotasse, fore

$$\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc)=\frac{bc\,\text{cos.}\,2\zeta}{\text{sin.}\,2\zeta}$$

ex quo valore deducimus

$$bc\,\text{sin.}\,2\zeta+\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc)\,\text{cos.}\,2\zeta=\frac{bc}{\text{sin.}\,2\zeta}$$

vnde valores ante inuenti ita succinctius exprimentur:

$$FF=\tfrac{1}{2}(aa+bb+cc)+\frac{bc}{\text{sin.}\,2\zeta}$$

$$GG=\tfrac{1}{2}(aa+bb+cc)-\frac{bc}{\text{sin.}\,2\zeta}$$

vnde postremi valores colliguntur fore

$$FF=\tfrac{1}{2}(1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)+\frac{\text{cos.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i}{\text{sin.}\,2\zeta}$$

$$GG=\tfrac{1}{2}(1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)-\frac{\text{cos.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i\,\text{cos.}\,i}{\text{sin.}\,2\zeta}$$

sicque tantum opus est vt valorem pro $\text{sin.}\,2\zeta$ eruamus.

§. 15. Quoniam igitur inuenimus

$$\text{tang.}\,2\zeta=\frac{2bc}{aa+bb-cc},\ \text{erit}$$

$$\text{sin.}\,2\zeta=\frac{2bc}{\sqrt{4bbcc+(aa+bb-cc)^2)}}\ \text{siue ob}$$

$$(aa+bb-cc)^2=(aa+bb+cc)^2-4(aa+bb)cc\ \text{erit}$$

$$\text{sin.}\,2\zeta=\frac{2bc}{\sqrt{(aa+bb+cc)^2-4aacc}}$$

At introducendo denuo angulos γ et i, cum sit

$$aa+bb+cc=1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2\ \text{ et }\ 2ac=2\,\text{sin.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i$$

manifestum est fore

$$(aa+bb+cc)^2-4aacc=1-2\,\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2+\text{sin.}\,\gamma^4\,\text{sin.}\,i^4$$
$$=(1-\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)^2.$$

His autem valoribus substitutis colligitur

$$F^2=\tfrac{1}{2}(1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)+\tfrac{1}{2}(1-\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)=1$$

$$G^2=\tfrac{1}{2}(1+\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)-\tfrac{1}{2}(1-\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2)=\text{sin.}\,\gamma^2\,\text{sin.}\,i^2$$

ita vt ipsi semiaxes sint, maior $CF=F=1$, idest semidiametro annuli aequalis; minor vero $CG=G=\text{sin.}\,\gamma\,\text{sin.}\,i$, siue, ob inclinationem propemodum $=30^\circ$, erit $G=\tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,\gamma$.

Vnde

Vnde patet, si fuerit angulus ACT $= \gamma = 0$, quod euenit quando Terra in ipso plano annuli versatur, tum axem minorem euanescere et annulum sub forma lineae rectae, ad eclipticam sub angulo $\zeta = i$ inclinatae, fore apparitu-rum. Sin autem angulus γ fuerit rectus, tum semiaxis minor erit $= \text{sin.}\, i = \frac{1}{2}$ propemodum.

§. 16. Deinde quod ad positionem horum axium attinet, quoniam inuenimus

$$\text{sin. } 2\zeta = \frac{2bc}{\sqrt{4bbcc + (aa+bb-cc)^2}} = \frac{2 \text{cos.}\gamma \text{ sin.}i \text{ cos.}i}{1 - \text{sin.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2}$$

$$\text{cos. } 2\zeta = \frac{aa+bb-cc}{\sqrt{4bbcc + (aa+bb-cc)^2}} = \frac{\text{cos.}i^2 - \text{cos.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2}{1 - \text{sin.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2}$$

inde colligitur

$$1 - \text{cos. } 2\zeta = \frac{2 \text{sin.}i^2 \text{ cos.}\gamma^2}{1 - \text{sin.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2} \text{ et}$$

$$1 + \text{cos. } 2\zeta = \frac{2 \text{cos.}i^2}{1 - \text{sin.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2}.$$

Quare cum sit

$$\text{sin. } \zeta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.} 2\zeta}{2}} \text{ et cos. } \zeta = \sqrt{\frac{1 + \text{cos.} 2\zeta}{2}},$$

hinc reperietur

$$\text{sin. } \zeta = \frac{\text{cos.}\gamma \text{ sin.}i}{\sqrt{1 - \text{sin.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2}} \text{ et cos. } \zeta = \frac{\text{cos.}i}{\sqrt{1 - \text{sin.}\gamma^2 \text{ sin.}i^2}}$$

consequenter tang. $\zeta = \text{cos.}\, \gamma$ tang. i. Sicque innotescit angulus ACF, sub quo axis maior ellipsis ad rectam CD, hoc est ad eclipticam, inclinatur, qui ergo semper minor est angulo i, excepto solo casu quo $\gamma = 0$, vbi fit $\zeta = i$. Iam autem notauimus, hoc casu annulum sub figura lineae rectae apparere.

§. 17. Euolutio huius problematis maxime est memorabilis, propterea quod per calculos non parum molestos tandem deducti sumus ad solutionem simplicissimam; vnde nullum est dubium, quin alia via multo planior detur, ad eandem solutionem perueniendi, quod quidem facile praeuidere licuisset; neque tamen pigebit, istam solutionem

 euoluisse,

euoluisse, cum in ea insignia calculi artificia occurrant, quae in aliis inuestigationibus summum fructum afferre poterunt. Interim tamen adhuc aliam solutionem simpliciorem subiungamus, quae tam est plana et facilis, vt vix vllum calculum postulet.

Solutio facillima eiusdem quaestionis.

Tab. XI. Fig. 1. §. 18. Quemadmodum ante nostram figuram in plano eclipticae descripsimus, ita nunc planum tabulae in plano annuli accipiatur. Referat igitur circulus centro C diametro A B descriptus ipsum annulum Saturni, sitque recta C Q intersectio huius plani cum ecliptica, cuius inclinatio maneat vt ante $= i$. Iam in plano eclipticae sit punctum T locus Terrae, vnde ad planum annuli demittatur perpendiculum T P, et ex P ad lineam nodorum ducatur normalis P Q, ita vt ducta recta T Q angulus P Q T metiatur inclinationem $= i$. Ducatur porro recta T C, eritque angulus A C T in plano eclipticae, quem ante vocauimus $= \gamma$; vnde si ponamus distantiam Terrae a Saturno $TC = c$, erit recta $TQ = c \,\text{sin.}\, \gamma$ et $CQ = c \,\text{cos.}\, \gamma$. Hinc porro colligitur $TP = c \,\text{sin.}\, \gamma \,\text{sin.}\, i$ et $PQ = c \,\text{sin.}\, \gamma \,\text{cos}\, i$.

§. 19. Vocemus autem porro angulum, sub quo recta T C ad planum annuli inclinatur, hoc est, ducta recta C P, angulum $TCP = \eta$, eritque $\text{sin.}\, \eta = \frac{TP}{CT} = \text{sin}\, \gamma \,\text{sin.}\, i$. Ac si etiam vocemus angulum $PCQ = \zeta$, erit $\text{tang.}\, \zeta = \frac{PQ}{CQ} = \text{cos.}\, i \,\text{tang.}\, \gamma$. Hinc duplici modo exprimi potest recta C P, cum sit tam $CP = CT \,\text{cos.}\, \eta$ quam $CP = \frac{PQ}{\text{sin.}\, \zeta} = \frac{c \,\text{sin.}\, \gamma \,\text{cos.}\, i}{\text{sin.}\, \zeta}$; quam ob rem erit $c \,\text{cos.}\, \eta = \frac{c \,\text{sin.}\, \gamma \,\text{cos.}\, i}{\text{sin.}\, \zeta}$, siue $\text{sin.}\, \zeta \,\text{cos.}\, \eta = \text{sin.}\, \gamma \,\text{cos.}\, i$. Vnde patet, quomodo hi anguli de nouo introducti ζ et η a binis datis γ et i pendeant, cum sit $\text{tang.}\, \zeta = \text{tang.}\, \gamma \,\text{cos.}\, i$ et $\text{sin.}\, \eta = \text{sin.}\, \gamma \,\text{sin.}\, i$.

§. 20.

§. 20. Nunc igitur quaeſtio huc redit, ſub quanam figura annulus ſit appariturus oculo in puncto T conſtituto? quem infinem concipiatur conus ſcalenus, cuius vertex ſit in T, baſis vero ſit ipſe annulus Saturni, dum axis huius coni ſeu recta T C $= c$ ad planum baſis inclinatur angulo T C P $= \eta$. Euidens autem eſt, hanc figuram prodire, ſi conus ſecetur plano ad axem T C normali. Hoc igitur planum annulum ſecabit ſub recta E C F ad rectam P C normalem. Ipſum autem hoc planum inclinabitur ad baſin ſub angulo $= 90° - \eta$. In hac ergo ſectione inſunt ambo puncta E et F, exiſtente E F diametro annuli, cuius radium vocemus C E $=$ C F $= a$. Quoniam autem axis coni quaſi infinite magnus prae baſi ſpectari poterit, ſectionis quaeſitae, quae vtique erit ellipſis, axis maior diametro annuli aequabitur, ita vt ſemiaxis maior ſit $= a$.

§. 21. Pro altero axe inueniendo ſecetur conus noſter ſcalenus plano ad axem perpendiculari et per C T tranſeunte ſecundum rectam C P, in quo plano ducatur recta C V ad C T normalis, quae ergo faciet angulum V C G $= 90° - \eta$. Vnde ſi capiatur C G radio annuli aequalis $= a$, et ex G ad C V iterum ducatur normalis G H, manifeſtum eſt fore G H ſemiaxem minorem ellipſis quaeſitae. Erit igitur C H $= a$ ſin. η, ita vt iſte ſemiaxis minor ſit C H $= a$ ſin. $\eta = a$ ſin. γ ſin. i, prorſus vt ante inuenimus. Tab. XI. Fig. 2.

§. 22. Sin autem diſtantiam T C, ſiue axem coni reſpectu baſis non tanquam infinitum ſpectare liceret, calculus aliquanto fieret prolixior. Huius igitur caſus euolutionem hic in genere adiungamus. Referat ergo punctum O verticem coni, recta autem O C eius axem ad planum baſis inclinatum ſub angulo A C O $= \eta$; atque in hoc plano per O C ad planum baſis normaliter conſtituto ſit A C B Fig. 3.

 dia-

diameter baſis, voceturque radius $CA = a$. Praeterea per C ad OC recta producatur normalis MCN, lateribus coni OA et OB occurrens in punctis M et N, et ſuper hac recta MN conſtituatur planum ad rectam CO normale; atque definire oportebit ſectionem coni, quam hoc planum producet, quandoquidem iſta ſectio exhibebit figuram, ſub qua oculus in O baſin coni ſpectabit; quae cum rectae MN normaliter inſiſtat, applicata in puncto C erit radio baſis aequalis, ideoque $= a$. Tum vero etiam euidens eſt, rectam MN fore axem minorem ſectionis quaeſitae, neque vero punctum C erit in eius centro, quia non in medio rectae MN exiſtit.

§. 23. Ad hanc rectam MN inueniendam ex punctis A et B ad axem OC productum demittantur perpendicula AP et BQ, quibus ergo recta MN erit parallela. Cum iam ſit $CA = CB = a$ et angulus $ACO = \eta$, erit $AP = a\,\text{ſin.}\,\eta = QB$ et $CQ = CP = a\,\text{coſ.}\,\eta$. Hinc ob triangula ſimilia erit $OP : PA = OC : CM$, item $OQ : QB = OC : CN$; vnde ob $OP = c - a\,\text{coſ.}\,\eta$ et $OQ = c + a\,\text{coſ.}\,\eta$, colligitur fore $CM = \frac{ac\,\text{ſin.}\,\eta}{c - a\,\text{coſ.}\,\eta}$ et $CN = \frac{ac\,\text{ſin.}\,\eta}{c + a\,\text{coſ.}\,\eta}$. Sicque euidens eſt partes CM et CN inter ſe non eſſe aequales; at tota recta MN hinc prodit $= \frac{2acc\,\text{ſin.}\,\eta}{cc - aa\,\text{coſ.}\,\eta^2}$, quae cum ſit axis minor, erit ſemiaxis minor $= \frac{acc\,\text{ſin.}\,\eta}{cc - aa\,\text{coſ.}\,\eta^2}$.

Tab. XI. Fig. 4. §. 24. Deſcripta iam ſit ſuper hac recta MN tanquam ſemiaxe minore ipſa ellipſis quaeſita MDN, ita vt ſit $MC = \frac{ac\,\text{ſin.}\,\eta}{c - a\,\text{coſ.}\,\eta}$ et $NC = \frac{ac\,\text{ſin.}\,\eta}{c + a\,\text{coſ.}\,\eta}$, ideoque punctum C extra centrum ellipſis ſitum. Nouimus autem in puncto hoc C applicatam CD eſſe $= a$. Nunc ſuper diametro MN deſcribatur ſemicirculus rectam CD in E ſecans, ita vt ſit CE applicata in ſemicirculo, ideoque

$$CE = \sqrt{MC.NC} = \frac{ac\,\text{ſin.}\,\eta}{\sqrt{cc - aa\,\text{coſ.}\,\eta^2}};$$

eritque ergo $CD : CE = \sqrt{cc - aa\,\text{coſ.}\,\eta^2} : c\,\text{ſin.}\,\eta$.

§. 25.

§. 25. Sit nunc c centrum tam circuli quam ellipsis, ita vt sit $Mc = Nc = \frac{acc\,sin.\,\eta}{cc - aa\,cos.\,\eta^2}$. Vnde erigatur perpendicularis ced, ita vt pariter sit $ce = \frac{acc\,sin.\,\eta}{cc - aa\,cos.\,\eta^2}$. At vero recta cd erit verus semiaxis maior nostrae ellipsis; quare cum sit $CE : CD = ce : cd$, reperietur iste semiaxis maior $cd = \frac{CD : ce}{CE} = \frac{ac}{\sqrt{cc - aa\,cos.\,\eta^2}}$, dum semiaxis minor inventus est $= \frac{acc\,sin.\,\eta}{cc - aa\,cos.\,\eta^2}$.

§. 26. His definitis, si quis haesitet magnitudinem annuli Saturni, cuius radium posuimus $= a$, prae distantia Terrae a Saturno, quam vocauimus $= c$, tanquam euanescentem spectare, ei ita satisfacere possumus, vt dicamus, ellipseos, sub qua annulus sit apparitarus, semiaxem maiorem fore $= \frac{ac}{\sqrt{cc - aa\,cos.\,\eta^2}}$; at vero semiaxem minorem $= \frac{acc\,sin.\,\eta}{cc - aa\,cos.\,\eta^2}$. Vnde statim liquet, si a prae c negligatur, prodire semiaxem maiorem a, minorem vero $= a\,sin.\,\eta$, prorsus vti supra inuenimus; vbi meminisse iuuabit, angulum η metiri eleuationem, sub qua Terra ex Saturno spectata super plano annuli eleuata apparere debet. Quare si Terra in ipso plano annuli versetur, erit angulus $\eta = 0$; tum igitur semiaxis maior erit $= \frac{ac}{\sqrt{cc - aa}}$; at vero minor $= 0$; ita vt annulus tanquam linea recta sit apparitarus, cuius longitudo $= \frac{2ac}{\sqrt{cc - aa}}$. Sin autem Terra maxime super plano annuli fuerit eleuata, id quod euenit, quando $\eta = i$, quoniam propemodum $i = 30$ graduum, semiaxis maior ellipsis erit $= \frac{ac}{\sqrt{cc - \frac{3}{4}aa}}$, minor vero $= \frac{2acc}{4cc - 3aa}$. Hoc autem casu annulus maximam amplitudinem habere videbitur. Ceterum prior solutio hac gaudet praerogatiua, quod statim situm annuli respectu eclipticae exhibeat.

DE

DE APPARITIONE ET DISPARITIONE ANNVLI SATVRNI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Ex longa obseruationum serie Astronomi, ac potissimum acutissimus Hugenius, concluserunt, planetam Saturnum cinctum esse annulo quodam tam tenui, vt, nisi eius superficies plana Terram respiciens a Sole illustretur, conspici omnino nequeat, vnde iste annulus tanquam planum, corpus Saturni ambiens, spectari solet, cuius centrum in ipsum Saturni centrum incidat. Porro vero etiam obseruarunt Astronomi, istum annulum perpetuo situm sibi parallelum conseruare, cuius planum eclipticam semper secundum eandem directionem intersecet, ita vt, vbicunque Saturnus in sua orbita versetur, linea recta, qua planum annuli eclipticam secat, hoc quidem tempore ab 5 sign. 17°, 5′ ad 11 sign. 17°, 5′ dirigatur. Praeterea etiam compertum est, annulum hunc Saturni perpetuo ad eclipticam sub angulo circiter 31 grad. inclinatum manere. Quod quidem ad intersectionem cum ecliptica attinet, Astronomi indicarunt, eam semper ad easdem stellas fixas dirigi, quarum longitudo, quia ob praecessionem aequinoctiorum quotannis circiter 53 sec. crescit, etiam linea nodorum Annuli Saturni tantundem singulis annis progredi est censenda.

Tab. XII. Fig. 1. §. 2. Referat nunc figura ACBD, circa Solem in ☉ existentem, descripta, orbitam Saturni, quam primo quidem tan-

tanquam in ipsam eclipticam incidentem consideremus, quandoquidem eius inclinatio tantum est 2°, 30′. Postquam enim Phoenomena annuli Saturni in hac hypothesi fuerimus contemplati, haud difficile erit correctiones necessarias a latitudine Saturni oriundas inuenire. Assumemus igitur Saturnum per hanc orbitam secundum ordinem signorum A C B D circa Solem circumferri in ipso plano eclipticae, et cum Saturnus fuerit in loco quocunque S, referat recta SN intersectionem plani annuli cum plano eclipticae, quae ergo hoc saltem tempore, scilicet circa An. 1774, dirigatur versus coeli puncta 5ˢ·,17°,5′ et 11ˢ·,17°,5′. Iam huic rectae per ☉ ducatur recta parallela A☉B, sitque longitudo puncti A = 5ˢ· 17°, 5′, eritque puncti oppositi B longitudo 11ˢ·,17°,5′. Ad hanc rectam porro ducatur normalis ☉EC, cuius ergo longitudo erit = 8ˢ·, 17°, 5′, atque maxima elevatio annuli ad eclipticam in regionem ☉ E respiciet, cuius inclinatio ad eclipticam aestimatur 31°, 20′.

§. 3. Quando ergo Saturnus in ipso puncto A vel ei opposito B versatur, ideoque longitudo eius Heliocentrica est vel 5ˢ·, 17°, 5′ vel 11ˢ·, 17°, 5′, planum annuli per ipsum centrum Solis transibit; propterea quod tum recta A☉B erit intersectio plani annuli cum ecliptica. In his igitur locis neutra annuli planities a Sole illustrabitur, nisi quatenus ob magnitudinem Solis quidam radii maxime obliqui eo incidant. Cum autem semidiameter Solis apparens in Saturno vix sesquiminutum primum superet, inde illuminatio debilissima orietur, quae sensus nostros, vbicunque Terra versatur, afficere non poterit; ex quo manifestum est, quoties Saturnus in orbitae suae puncto A vel B versetur, tum eius annulum nusquam fore conspicuum, sed hunc planetam prorsus annulo destitutum apparere debere, in quocunque loco etiam Terra reperiatur; hoc ergo Phoenomenon perpetuo elapsis fere quindecim

 annis

annis contingere debebit. Contra autem, quando Saturnus vel in C vel in D reperietur, vbi maxima eius eleuatio Soli obuertitur, et radii ſolares ſub angulo 31°, 20′ in planitiem annuli incident, inde maxima colluſtratio orietur, nobisque annulus ſub maxima latitudine clariſſime ſe conſpiciendum offeret.

§. 4. Praeter haec vero duo loca, quibus annulus Saturni diſparere debet, etiam aliae dantur huius planetae poſitiones, quibus nobis annulum videre non licet, id quod eueniet, quando Terra in ipſa linea nodorum annuli reperietur, etiamſi ipſe annulus a Sole illuſtretur; quia enim tum Terra in ipſo annuli plano verſatur, nulli radii a facie annuli illuminata ad nos emitti poſſunt, vnde etiam his temporibus Saturnus nobis perinde apparebit ac ſi annulo prorſus eſſet deſtitutus.

Tab XII. Fig. 2. §. 5. Conſideremus nunc etiam orbitam Terrae. quae ſit *a c b d*, cuius ergo diameter *a b* quaſi erit pars decima diametri orbitae Saturni A ⊙ B; Saturno autem eiusmodi locum S in ſua orbita tribuamus, vt inde recta ipſi AB parallela ducta orbitam Terrae ſecet in punctis *t* et *t*′; tum enim, ſi Terra verſetur ſiue in *t* ſiue in *t*′, quoniam in ipſo plano annuli verſatur, is vtroque caſu conſpici non poterit, quod Phoenomenon ergo ob paruitatem orbitae Terrae contingere non poterit, niſi locus Saturni parum ſit remotus a terminis A et B. Quia enim diſtantiae punctorum S et *t* ſiue *t*′ a recta AB aequales eſſe debent, iſta diſtantia ſemidiametrum orbitae terreſtris ſuperare nequit; vnde cum diſtantia Satuni a Sole ſit fere decies maior, quam ſemidiameter orbitae terreſtris, ſinus maximae elongationis A S erit propemodum $\frac{1}{10}$, ideoque ipſe arcus A S ſiue angulus A ⊙ S vix 6 gradus ſuperabit, quos Saturnus fere ſex menſibus percurrere ſolet.

§. 6.

§. 6. Hoc Phoenomenon ergo locum habere nequit, nisi elongatio Saturni a terminis ante stabilitis A et B minor fuerit sex graduum, idque tam ante quam post eius appulsum ad puncta A et B; vnde intelligitur totum temporis interuallum, in quo disparitio annuli Saturni contingere potest, intra durationem vnius anni includi. Ita si tempus fuerit exploratum, quo Saturnus vel per A vel per B transit, disparitio annuli locum habere nequit, nisi intra sex menses vel antecedentes vel consequentes; reliquis enim temporibus omnibus, quibus Saturnus magis distat a locis A et B, Saturnus semper cum annulo conspici debebit.

§. 7. Quod quo clarius appareat, vocemus distantiam Terrae a Sole $\odot t = a$, distantiam vero Saturni $\odot S = b$, porro vero ponamus angulum $a \odot t = \alpha$, angulum vero $A \odot S = \beta$, eritque distantia puncti t a recta $AB = a \sin. \alpha$, distantia vero puncti S ab eadem recta $= b \sin. \beta$; vnde patet, disparitionem annuli contingere debere, quoties fuerit $a \sin. \alpha = b \sin. \beta$. Haec autem momenta multo facilius assignari possunt, si perpendamus, rectam tS exhibere locum Saturni Geocentricum; vnde manifesto sequitur, talem disparitionem semper contingere debere, quoties longitudo Saturni Geocentrica fuerit vel $5^s, 17^\circ$ vel $11^s, 10^\circ$. Ante autem vidimus, ob priorem rationem annulum etiam semper disparere debere, quando longitudo Saturni Heliocentrica quoque fuerit vel $5^s, 17^\circ$ vel $11^s, 17^\circ$.

§. 8. Facile autem intelligitur, has disparitiones non subito his momentis assignatis contingere, sed per temporis interuallum satis notabile iam ante incipere debere, quando scilicet lumen annuli iam ita sit debile, vt a nobis sentiri nequeat, quae duratio plurimum pendet a qualitate instrumentorum, quae quo fuerint excellentiora, eo tardius aspectus annuli nobis penitus subtrahetur; id quod

etiam de reapparitione eſt tenendum, quae multo tardius eueniet, quam Saturnus in memorata poſitione fuerit deprehenſus. Quin etiam euenire poteſt, vt annulus per ſatis longum temporis ſpatium percipi nequeat, propterea quod inſuper datur tertia cauſa praeter binas memoratas, quae impedit, quo minus annulum ſpectare queamus; hanc igitur cauſam accuratius perpendi conueniet.

§. 9. Scilicet enim vt annulum conſpicere valeamus, omnino neceſſe eſt, vt ea annuli facies, quae nobis obvertitur, a Sole illuſtretur; quando igitur euenit, vt facies auerſa radios Solis accipiat, annulus nobis inconſpicuus manere debet, etiamſi Saturnus a binis memoratis poſitionibus ſatis longe fuerit remotus, quandoquidem fieri nequit, vt ambae annuli facies a Sole illuminentur.

Tab. XII. Fig. 3. §. 10. Quod quo clarius intelligatur, verſetur Saturnus in puncto S, vnde recta poſitioni ☉A parallela ducta orbitam Terrae ſecet in punctis t et t', quae ergo erit interſectio plani annuli cum plano eclipticae; atque in hoc ſitu, ducta recta ☉S, facies annuli rectam ☉A reſpiciens a Sole illuminabitur. Quando igitur nunc Terra vbicunque in portione tut' orbitae ſuae, veluti in u, verſatur, nobis facies annuli obſcura erit obuerſa, quam igitur conſpicere non valebimus, ſed Saturnus nobis ſine annulo apparebit; quae ergo priuatio ſatis diu durare poterit, donec ſcilicet Terra motu ſuo vltra terminum t' proceſſerit. Quoniam vero interea Saturnus etiam in orbita ſua progreditur, vna cum linea Nodorum Stt', Terra citius ad terminum t' perveniet, vbi longitudo Geocentrica iterum fiet $5^s, 17^\circ, 5'$, qui erit vltimus terminus, quo annulus apparere ceſſabit, quo ſuperato annulus iterum apparere incipiet, niſi quatenus ob vicinitatem Solis ipſe Saturnus diſparere debet.

§. 11.

§. 11. Quoniam directio lineae O A respectu stellarum fixarum manere supponitur inuariata, ob praecessionem aequinoctiorum longitudo puncti A in ecliptica continuo increscet, et quidem vno gradu singulis 70 annis, ita vt longitudo 5^{s}, 17°, $5'$ reuera sit variabilis. Hanc longitudinem pro quouis tempore signo ☊ indicemus, punctumque oppositum signo ☋, quod eo magis necessarium videtur, quia quantitas illa 5^{s}, 17°, $5'$ forsitan non satis accurate ex obseruationibus est conclusa. Hinc iam pro positione Saturni modo considerata eius longitudo Heliocentrica maior erit quam ☊; quare si Terra fuerit in *u* longitudo saturni Geocentrica minor erit quam ☊. Vnde patet, quoties binarum Saturni longitudinum scilicet Heliocentricae et Geocentricae altera fuerit maior, altera vero minor quam ☊, toties annulum a nobis conspici non posse. Si enim punctum S ad alteram partem rectae ⊙ A accipiatur, longitudo Heliocentrica minor erit, quam ☊, Geocentrica autem erit maior, id quod etiam de directione opposita erit tenendum.

§. 12. Triplici igitur omnino modo euenire potest, vt annulus Saturni aspectui nostro subtrahatur; primus scilicet locum habet, quando longitudo Heliocentrica Saturni est vel ☊ vel ☋, propterea quod tum neutra annuli facies illuminationem a Sole accipit; secundus modus locum obtinet, quando longitudo Saturni Geocentrica est vel ☊ vel ☋, propterea quod tum neutra annuli facies Terrae obuertitur; tertio autem modo annulus nobis euanescit, quando longitudo vel ☊ vel ☋ inter longitudinem Saturni Heliocentricam et Geocentricam incidit.

§. 13. Quo haec phoenomena clarius ordine percurramus, incipiamus a casu, quo Saturnus fuerit in ipso puncto A, vbi eius longitudo Heliocentrica fuerit $=$ ☊, Tab. XII. Fig. 4.

 ita

ita vt annulus hoc tempore, vbicunque fuerit Terra, apparere non potuerit; Terrae autem locum tum fuisse in *u*, eiusque longitudinem minorem quam ☊, atque manifestum est, antequam Saturnus peruenerit in A, annulum iam Terrae fuisse inconspicuum, ob causam tertiam; atque adeo eo vsque retrogredi licebit, quoad fuerit Terra in *t*, et Saturnus in S, ita vt eius longitudo Geocentrica fuerit = ☊, vbi ergo annulus ob causam secundam adhuc fuit inuisibilis; sin autem vlterius retrogrediamur, manifestum est, tum faciem annuli illuminatam Terram respexisse, vnde circa Terrae locum *t* apparitio annuli demum cessauit, neque igitur ab hoc tempore iterum se conspiciendum praebebit, donec Saturnus per ipsum punctum A transierit.

Tab. XII. Fig. 3. §. 14. Sin autem, dum Saturnus in A versabatur, Terra reperiatur in altera orbitae suae parte, veluti in *u*, euidens est, antequam Saturnus in A peruenerit, eius annulum terrae conspicuum fuisse, ita vt, dum Saturnus termino A propinquat, annulus demum disparere coeperit. Ab hoc autem tempore, quando Saturnus vltra A progreditur, annulus etiam nunc Terrae in *u* manebit inuisibilis, hocque durabit eo vsque, donec Saturnus peruenerit in S, Terra autem in *t*, a quo termino demum annulus iterum apparere incipiet; quae phoenomena perinde se habebunt, quando longitudo Heliocentrica fuerit ☋.

Fig. 5. §. 15. Applicemus haec ad postremas annuli disparitiones, quae contigerunt annis 1773 et 1774, circa quod tempus longitudo Saturni reperitur fuisse = ☊ siue $5^s, 17^\circ, 5', 17''$ An. 1773. Septemb. 10 die; quo tempore longitudo Solis fuit $5^s, 18^\circ, 0'$, ideoque locus Terrae ex Sole visus $11^s, 18^\circ, 0'$. Fuerit igitur hoc tempore Saturnus in A, ac terra propemodum in loco opposito *a* versabatur, ita vt Saturnus vix ex Coniunctione Solis emerserit, ideoque

que non solum annulus sed etiam ipse Saturnus aspectum nostrum effugerit.

§. 16. Consideremus nunc tempus, quod hoc momentum praecessit, vbi Saturnus adhuc erat in s, Terra vero in α, ac manifestum est, ex hoc loco annulum conspici debuisse, ita vt disparitio annuli propemodum in coniunctionem Saturni cum Sole incidisse sit censenda. Postquam vero Terra ex α processerit, veluti in β, Saturnus progressus erit in σ, quo ergo loco annulus faciem illuminatam Terrae obuertit, ideoque conspici debuit, quatenus ob vicinitatem Solis contingere potuit. Ab hoc autem tempore annulus conspicuus manere debuit tam diu, donec Terra peruenerit in t, Saturnus vero in S, ita vt recta S A fuerit ipsi ☉ A parallela, circa quod tempus igitur annulus disparere de hinc vero inconspicuus manere debuit, donec Terra appulerit ad punctum t, quo loco disparitio terminabitur. Postmodum enim, dum tam Saturnus quam Terra longius progredientur, annulus perpetuo conspicuus manebit, et quidem continuo clarior et largior cernetur, quoad tandem post 14 annos circiter in locum oppositum ♌ deferetur. Verum hic probe perpendendum est, nos nullam adhuc rationem habuisse latitudinis Saturni, quae hoc tempore satis erat notabilis, scilicet circiter 2°, vnde phoenomena memorata haud exiguam correctionem exigent, quas igitur deinceps inuestigemus.

§. 17. Ante autem quam hanc inuestigationem suscipiamus, contemplemur etiam positionem Saturni praecedentem, vbi per alterum nodum annuli transiit. Calculo autem instituto longitudo Heliocentrica Saturni reperitur fuisse circiter 11ˢ, 17°, Anno 1760. Ian. 10. quo tempore longitudo Terrae fuit 3ˢ, 20°. Quare in Fig. 6. Saturnus concipiatur in puncto B, fueritque Terra hoc tempore in Tab. XII. Fig. 6.

in T, vnde ergo vtique Saturnus ſine annulo apparere debuit. Quatuor igitur propemodum menſibus ante hoc tempus Saturnus fuerit in S, Terra vero in t, exiſtente recta tS ipſi ⊙B parallela, in quo ergo ſitu annulus Saturni diſparuerit neceſſe eſt, cum ante hoc tempus annulus fuiſſet conſpicuus, niſi eius facies obſcura Terram reſpexiſſet, quod vtique contingere debuit. Poſtquam autem Saturnus in locum B tanſierit vsque in s, terra poceſſerit in t', vbi recta $t's$ denuo euaſerit rectae ⊙B parallela, ita vt etiam hoc tempore annulus euaneſcere debuerit. Per totum autem hoc tempus quoque annulus deliteſcere debuit, propterea quod faciem obſcuram Terrae obuertit; demum igitur, poſtquam Terra vltra terminum t' proceſſit, annulus conſpici potuit, quod circiter contigiſſe debuit An. 1760. Febr. 19. Verum quia hoc tempore latitudo Saturni fuit propemodum 2°, 3', hinc non exiguum diſcrimen in his temporibus oriri debuit, quam inueſtigationem nunc aggrediamur.

§. 18. Conſideremus igitur nunc Saturnum in loco quocunque ſupra eclipticam in ♄, vnde ad eclipticam demittatur perpendiculum ♄S, hincque ad rectam ⊙A normalis SP. Iam quia planum annuli pet punctum ♄ tranſit, atque ad eclipticam inclinatur angulo circiter 31°, ducatur ex puncto ♄ ad rectam SP linea ♄Σ, quae faciat angulum $S\Sigma$♄ $= 31°$, hocque modo recta ♄Σ erit in plano annuli, quod ergo eclipticam ſecabit ſecundum rectam ΣΘ ipſi ⊙A parallelam, ita vt quando vel Sol vel Terra in hac recta ΣΘ reperietur, annulus euaneſcere debeat. Vnde patet has diſparitiones non contingere, quando Saturnus ſecundum ipſam ΘΣ conſpicitur, ſed quando aliquo interuallo ab hac poſitione fuerit remotus.

§. 19. Hinc iam primo momenta quaeramus, quibus planum annuli per ipſum Solem tranſit, quo ergo pro

nodo

nodo ascendente A continget, quando Saturnus fuerit in ♄, ita vt angulus ♄ P S sit $= 31^{\circ}$, pro quo angulo, vt rem in genere complectamur, scribamus litteram η, ita vt habeamus angulum ♄ P S $= \eta$; tum vero ponamus latitudinem Saturni Heliocentricam seu angulum ♄ Θ S $= \lambda$, quam vt Borealem spectemus, quandoquidem in his positionibus, vt vidimus, Saturnus supra eclipticam Boream versus versatur §. 20. Quodsi iam distantiam Saturni a Sole vocemus ⊙ ♄ $= a$, erit ipsa Saturni eleuatio supra eclipticam, scilicet ♄S $= a \sin. \lambda$ et distantia curtata ⊙S $= a \cos. \lambda$. Iam quia in triangulo rectangulo ♄ S P est angulus ♄ P S $= \eta$, erit interuallum P S $= \frac{a \sin. \lambda}{\tang. \eta}$, quod diuisum per distantiam ⊙ S $= a \cos. \lambda$ dabit $\sin.$ A ⊙ S $= \frac{\tang. \lambda}{\tang. \eta}$, qui angulus indicat longitudinem Saturni a termino A seu ☊ computatam. Vnde si hunc angulum A ⊙ S vocemus $= \alpha$, ita vt sit $\sin. \alpha = \frac{\tang. \lambda}{\tang. \eta}$, planum annuli per ipsum Solem transibit, quoties fuerit longitudo Saturni Heliocentrica $=$ ☊ $+ \alpha$. Ita, quoniam in hac regione latitudo Saturni Heliocentrica inuenitur $\lambda = 2^{\circ}, 21'$ si sumamus $\eta = 31^{\circ}$, erit $\alpha = 3^{\circ}, 55'$, vnde sumto ☊ $= 5^{s}, 17^{\circ}, 5'$ longitudo Saturni Heliocentrica his temporibus erit $5^{s}, 21^{\circ}$.

§. 21. Contemplemur nunc etiam locum Saturni circa alterum nodum in B, vbi eius latitudo est Australis, et punctum ♄ infra eclipticam repraesentemus, per quod recta ♄ B vltra eclipticam producta faciat angulum $= \eta$, quandoquidem haec recta ♄ B rectae p ♄ in praecedente figura debet esse parallela. Hinc si ista latitudo Heliocentrica Australis dicatur $= \lambda$ et distantia Saturni a Sole $= a$, erit vt ante distantia S ♄ $= a \sin. \lambda$ et distantia curtata ⊙ S $= a \cos. \lambda$, vnde reperitur interuallum B S $= \frac{a \sin. \lambda}{\tang. \eta}$; quam ob rem si angulum B ⊙ S vocemus $= \alpha$, erit vt ante $\sin. \alpha = \frac{\tang. \lambda}{\tang. \eta}$, et iam longitudo Heliocentrica Saturni erit $=$ ☊ $+ \alpha$, ita vt

etiam hoc casu vltra terminum B transierit per angulum α, qui ob λ in his locis $= 2^\circ, 3'$, reperitur $= 3^\circ, 25'$; ideoque vera Saturni longitudo Heliocentrica erit $= 11^s, 20^\circ, 25'$.

§. 22. Inquiramus nunc etiam in eas positiones, quibus planum annuli per ipsam Terram transit. Quodsi ergo vt supra
Tab XIII. Saturnum concipiamus super ecliptica in ♄, vbi planum annuli
Fig. 7. eclipticam secat secundum rectam $\Sigma\,\Theta$, in qua locum Terrae concipiamus in puncto Θ, ductis rectis $S\,\Theta$ et ♄ Θ recta $\Theta\,S$ dirigetur ad longitudinem Saturni Geocentricam, angulus vero ♄ $\Theta\,S$ referet latitudinem Geocentricam Saturni Borealem, quam designemus per λ'. Hinc ergo si vocemus distantiam Saturni a Terra Θ ♄ $= a'$, erit perpendiculum ♄ $S = a' \sin. \lambda'$ et distantia curtata $\Theta\,S = a' \cos. \lambda'$. Hinc manente η inclinatione annuli ad eclipticam, in triangulo ♄ $S\,\Sigma$ fiet intervallum $S\,\Sigma = \frac{a' \sin. \lambda'}{tang. \eta}$, quod per $\Theta\,S$ diuisum dabit sinum anguli $\Sigma\,\Theta\,S$, quem si vocemus α', erit $\sin. \alpha' = \frac{tang. \lambda'}{tang. \eta}$.

§. 23. Quia igitur hac positione recta $\Theta\,\Sigma$ dirigitur versus nodum ascendentem, cuius longitudo est ☊ $= 5^s, 10^\circ$, planum annuli per ipsam Terram transibit, quando longitudo Saturni Geocentrica fuerit $=$ ☊ $+ \alpha'$. Hinc autem facile patet, si in eadem directione $\Sigma\,\Theta$ producta Saturnus versetur circa nodum annuli descendentem cum latitudine Australi, tum pariter planum annuli per Terram transire, quando longitudo Geocentrica Saturni fuerit $=$ ☋ $+ \alpha'$. Casus autem, quem hic considerauimus, quo latitudo Saturni fuit Borealis, contigisse obseruatus est 1774 April 4, quo tempore annulus cerni desiit, quod sine dubio aliquo tempore ante appulsum Terrae ad lineam nodorum euenisse censendum est. At vero Ephemerides pro hoc tempore ostendunt longitudinem Saturni Geocentricam $= 5^s, 21^\circ, 7'$ cum latititudine Boreali $2^\circ, 27'$, ita vt sit $\lambda' = 2^\circ, 27'$; vnde sumpto

ſumpto $\eta = 31^{\circ}$ reperitur angulus $\alpha' = 4^{\circ}, 4'$; erat igitur ☊ $+ 4^{\circ}, 4' = 5^{s}, 21^{\circ}, 7'$. vnde ſequitur fuiſſe ☊ $= 5^{s}, 17^{\circ}, 3'$ id quod egregie conuenit.

§. 24. Quoniam autem valde probabile eſt veram diſparitionem aliquot diebus tardius eueniſſe, ſi ponamus hoc contigiſſe die 7mo Aprilis, vbi longitudo Geocentrica Saturni fuit $5^{s}, 20^{\circ}, 55'$ cum latitudine eadem $2^{\circ}, 27'$, vt ante oritur $\alpha' = 4^{\circ}, 4'$. Poſito igitur ☊ $+ 4^{\circ}. 4' = 5^{s}, 20^{\circ}, 55'$ oritur ☊ $= 5^{s}, 16^{\circ}, 51'$, ita vt hoc tempore longitudo nodi aliquanto minor ſtatuenda videatur.

§. 25. At vero poſt iſtud tempus Aprilis annulus Saturni delituit vsque ad diem 1 Iulii, quo demum rurſus apparere incepit, dum annulus interea faciem obſcuram verſus Terram direxit. Pro hoc autem tempore Ephemerides oſtendunt, longitudinem Saturni Geocentricam fuiſſe $= 5^{s}, 20^{\circ}, 43'$ cum latitudine Boreali $\lambda' = 2^{\circ}, 12'$, vnde colligitur angulus $\alpha' = 3^{\circ}, 39'$; hincque concluditur ☊ $+ 3^{\circ}, 39' = 5^{s}, 20^{\circ}, 43'$, ſicque fiet ☊ $= 5^{s}, 17^{\circ}, 4'$. Quia autem nullum eſt dubium, quin verum momentum, quo Terra per planum annuli tranſiit, hunc terminum aliquot diebus praeceſſerit, ſi aſſumamus hoc contigiſſe menſe Iunii d. 27, quo tempore longitudo Saturni erat $= 5^{s}, 20^{\circ}, 28'$ hincque verus valor pro longitudine nodi prodiret ☊ $= 5^{s}, 16^{\circ}, 49'$, vnde ſatis probabile videtur. illo tempore veram longitudinem nodi aſcendentis annuli fuiſſe $5^{s}, 16^{\circ}, 50'$ quae circiter quadrante vnius gradus minor eſt, quam Aſtronomi ſuppoſuerunt.

§. 26. Praeterea vero eadem tempeſtate annulus Saturni primum diſparere coepit An. 1773 Octob. 11, quo tempore longitudo erat $5^{s}, 20^{\circ}, 28'$ cum latitudine Boreali $1^{\circ}, 55'$; vnde colligitur angulus $\alpha' = 3^{\circ}, 11'$. Sicque erat

 ☊ $+ 3^{\circ}$,

☊ + 3°, 11′ = 5ˢ, 20°, 28′, ideoque ☊ = 5ˢ, 17°, 17′. Sin autem ponamus veram diſparitionem aliquanto tardius eueniſſe, ſcilicet die 15 Octob. tum valor ipſius ☊ adhuc maior prodiret. Sequens reapparitio autem contigit, An. 1774 Ian. 11, poſtquam planum annuli per Solem tranſiit, quo tempore longitudo Saturni Heliocentrica erat 5ˢ, 21°, 3′, cum latitudine Boreali 2°, 9′. Hinc ergo pro noſtra formula eſt $\lambda = 2°, 9'$, vnde reperitur angulus $\alpha' = 3°, 34'$, ita vt fuerit ☊ + 3°, 34′ = 5ˢ, 21°, 3′, ideoque ☊ = 5ˢ, 17°, 29. Cum autem exquiſitiſſimis inſtrumentis iſta reapparitio multo citius obſeruata fuiſſet, ſequitur longitudinem nodi notabiliter minorem fuiſſe, quam modo inuenimus, id quod cum determinationibus, quas ex longitudinibus Geocentricis concludimus, egregie conſpirat.

Tab. XIII. Fig. 8. §. 27. Examinemus nunc etiam eas Saturni poſitiones, quibus facies annuli illuminata a Terra auertitur, ideoque annulus pariter conſpici nequit. Verſetur igitur Saturnus in ♄, vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculam ♄ S, hincque ad rectam ⊙ A normalis S P; tum vero vocetur diſtantia Saturni a Sole ⊙ ♄ = a eiusque latitudo Heliocentrica S ⊙ ♄ = λ, eritque S ♄ = a ſin. λ et ⊙ S = a coſ. λ. Supra autem iam inuenimus, planum annuli eclipticam ſecare ſecundum rectam Σ Θ, ita vt ſit interuallum S Σ = $\frac{a \text{ ſin. } \lambda}{\text{tang. } \eta}$.

§. 28. Vocemus porro longitudinem Saturni a recta ⊙ A computatam, ſiue angulum A ⊙ S = ϕ, et quia diſtantia ⊙ S = a coſ. λ, erit interuallum S P = a coſ. λ ſin. ϕ. Statuamus autem hoc interuallum maius eſſe quam S Σ, ita vt recta Σ Θ in dextram partem a recta ⊙ A cadat, quod ergo eueniet, ſi fuerit $a \text{ coſ. } \lambda \text{ ſin. } \phi > \frac{a \text{ ſin. } \lambda}{\text{tang. } \eta}$ ſiue ſin. $\phi > \frac{\text{tang. } \lambda}{\text{tang. } \eta}$. Hac igitur poſitione facies annuli ſiniſtrorſum

ver-

vergens a Sole illuminabitur, eritque interuallum

$$P\Sigma = a \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{sin.}\Phi - \frac{a \operatorname{sin.}\lambda}{\operatorname{tang.}\eta},$$

ideoque per hypothesin positiuum.

§. 29. Quodsi iam hoc tempore Terra vbicunque ad dextram partem rectae $\Sigma\Theta$, veluti in T, existat, ei facies annuli obscura obuertetur, annulusque hic erit inuisibilis; hoc ergo continget, quando recta TQ, ad directionem $\odot$ A normaliter ducta, maior fuerit quam interuallum $P\Sigma$. Hanc ob rem statuamus distantiam Terrae a Sole $\odot T = b$ eiusque longitudinem a recta $\odot$ A computatam, seu angulum $A\odot T = \theta$, eritque interuallum $TQ = b \operatorname{sin.}\theta$; quam ob rem criterium, quo annulus Saturni ob hanc causam spectari non poterit, in hoc consistet, quando fuerit

$$b \operatorname{sin.}\theta > a \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{sin.}\Phi - \frac{a \operatorname{sin.}\lambda}{\operatorname{tang.}\eta}, \text{ existente } \operatorname{sin.}\Phi > \frac{\operatorname{tang.}\lambda}{\operatorname{tang.}\eta}.$$

§. 30. Ad has conditiones clarius perspiciendas ponamus distantiam Saturni a Terra $T♄ = t$, latitudinem vero Geocentricam seu angulum $ST♄ = \lambda'$, fietque $S♄ = t \operatorname{sin.}\lambda'$ et $TS = t \operatorname{cos.}\lambda'$. Supra autem inuenimus $S♄ = a \operatorname{sin.}\lambda$ sicque nunc erit $a \operatorname{sin.}\lambda = t \operatorname{sin.}\lambda'$, ideoque $t = \frac{a \operatorname{sin.}\lambda}{\operatorname{sin.}\lambda'}$. Iam ex T ducatur recta TV ipsi $\odot$ A parallela, eritque angulus VTS longitudo Saturni Geocentrica ab eodem termino ☊ computata, quem angulum ergo vocemus $= \omega$, hincque erit interuallum $SV = t \operatorname{cos.}\lambda' \operatorname{sin.}\omega$ et $TV = t \operatorname{cos.}\lambda' \operatorname{cos.}\omega$. Cum igitur sit $TV = QP$ ob $\odot P = a \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{cos.}\Phi$ et $\odot Q = b \operatorname{cos.}\theta$ erit $t \operatorname{cos.}\lambda' \operatorname{cos.}\omega = a \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{cos.}\Phi - b \operatorname{cos.}\theta$. Quia igitur erat $t = \frac{a \operatorname{sin.}\lambda}{\operatorname{sin.}\lambda'}$, inde nascitur haec aequatio:

$$a \operatorname{sin.}\lambda \operatorname{cos.}\lambda' \operatorname{cos.}\omega = a \operatorname{sin.}\lambda' \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{cos.}\Phi - b \operatorname{sin.}\lambda' \operatorname{cos.}\theta$$

ex qua colligitur

$$b = \frac{a \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{cos.}\Phi}{\operatorname{cos.}\theta} - \frac{a \operatorname{sin.}\lambda \operatorname{cos.}\lambda' \operatorname{cos.}\omega}{\operatorname{sin.}\lambda' \operatorname{cos.}\theta} \text{ siue}$$

$$b = \frac{a \operatorname{cos.}\lambda \operatorname{cos.}\Phi - a \operatorname{sin.}\lambda \operatorname{cot.}\lambda' \operatorname{cos.}\omega}{\operatorname{cos.}\theta}.$$

§. 31. Quoniam igitur istud phoenomenon, quod consideramus, duas conditiones postulat, quarum prior est

 sin. Φ

$\text{ſin.}\,\phi > \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$, poſterior vero $b\,\text{ſin.}\,\Theta > a\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\phi - \frac{a\,\text{ſin.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$. ſi hic loco b valorem modo inuentum ſubſtituamus, prodibit $\text{tang.}\,\theta\,(\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\phi - \text{ſin.}\,\lambda\,\text{cot.}\,\lambda'\,\text{coſ}\,\omega) > \text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\phi - \frac{\text{ſin.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$. Praeterea vero notandum eſt, ob $S\,V = t\,\text{coſ.}\,\lambda'\,\text{ſin.}\,\omega$ eſſe $P\,V = a\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\phi - t\,\text{coſ.}\,\lambda'\,\text{ſin.}\,\omega$, cui cum interuallum $T\,Q = b\,\text{ſin.}\,\theta$ aequetur erit

$$b\,\text{ſin.}\,\theta = a\,\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\phi - t\,\text{coſ.}\,\lambda'\,\text{ſin.}\,\omega \text{ ſiue}$$

$$a\,\text{tang.}\,\theta\,(\text{coſ.}\lambda\,\text{coſ.}\phi - \text{ſin.}\lambda\,\text{cot.}\lambda'\,\text{coſ.}\omega) = a\,\text{coſ.}\lambda\,\text{ſin.}\phi - t\,\text{coſ.}\lambda'\,\text{ſin.}\omega,$$

inuenimus autem $t = \frac{a\,\text{ſin.}\,\lambda}{\text{ſin.}\,\lambda'}$, quo valore ſubſtituto erit

$$\text{tang.}\,\theta\,(\text{coſ.}\lambda\,\text{coſ.}\phi - \text{ſin.}\lambda\,\text{cot.}\lambda'\,\text{coſ.}\omega) = \text{coſ.}\lambda\,\text{ſin.}\phi - \text{ſin.}\lambda\,\text{cot.}\lambda'\,\text{ſin.}\omega,$$

vnde tang. θ ex calculo extirpabitur; poſteriorque conditio ad hanc formam reducetur: $\text{cot.}\,\eta > \text{cot.}\,\lambda'\,\text{ſin.}\,\omega$.

§. 32. Haec autem multo facilius ſine tantis ambagibus hoc modo inueniri poſſunt. Cum ſit $S\,♄ = a\,\text{ſin.}\,\lambda$, angulus vero $S\,T\,♄ = \lambda'$, erit recta $T\,S = \frac{a\,\text{ſin.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\lambda'}$. Iam quia poſuimus angulum $S\,T\,V = \omega$, erit $S\,V = \frac{a\,\text{ſin.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{tang.}\,\lambda'}$, quod interuallum minus eſſe debet interuallo $S\,\Sigma = \frac{a\,\text{ſin.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$ quandoquidem volumus locum Terrae T ad dextram partem rectae $\Theta\,\Sigma$ incidere, ita vt eſſe debeat $S\,\Sigma > S\,V$; haec igitur conditio praebet

$$\text{cot.}\,\eta > \text{cot.}\,\lambda'\,\text{ſin.}\,\omega, \text{ ſiue } \text{tang.}\,\lambda' > \text{tang.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\omega$$

ideoque $\text{ſin.}\,\omega < \frac{\text{tang.}\,\lambda'}{\text{tang.}\,\eta}$.

§. 33. Hac aequatione igitur continetur poſterior conditio, cum prior poſtulaſſet, vt ſit $\text{ſin.}\,\phi > \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$. Sicque harum conditionum altera definitur per longitudinem Saturni Heliocentricam ϕ et latitudinem pariter Heliocentricam λ, cum inclinatione annuli ad eclipticam $= \eta$, qua eſſe debet $\text{ſin.}\,\phi > \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$; altera vero conditio ſimili modo definitur per longitudinem Saturni Geocentricam ω et latitu-

titudinem pariter Geocentricam $= \lambda'$, vna cum inclinatione annuli $= \eta$, qua esse debet $\text{sin.}\ \omega < \frac{\text{tang.}\ \lambda'}{\text{tang.}\ \eta}$. Cum igitur per alteram esse debeat $\text{tang.}\ \eta > \frac{\text{tang.}\ \lambda}{\text{sin.}\ \Phi}$, per alteram vero $\text{tang.}\ \eta < \frac{\text{tang.}\ \lambda'}{\text{sin.}\ \omega}$, necesse est vt sit $\frac{\text{tang.}\ \lambda'}{\text{sin.}\ \omega} > \frac{\text{tang.}\ \lambda}{\text{sin.}\ \Phi}$.

§. 34. Hic autem probe notandum est vtramque Saturni longitudinem tam Heliocentricam quam Geocentricam computari debere a nodo ascendente ☊, quem hoc tempore aestimamus circiter $5^s, 17^\circ$, haecque conditiones eo redeunt, vt si fuerit $\text{sin.}\ \Phi > \frac{\text{tang.}\ \lambda}{\text{tang.}\ \eta}$, esse debeat $\text{sin.}\ \omega < \frac{\text{tang.}\ \lambda'}{\text{tang.}\ \eta}$; vnde patet, si fuerit $\omega = 0$, posteriorem conditionem adimpleri; atque adeo multo magis, quando fuerit longitudo ω negatiua; ex quo facile intelligere licet, si in contraria positione fuerit $\text{sin.}\ \Phi < \frac{\text{tang.}\ \lambda}{\text{tang.}\ \eta}$, tum requiri vt sit $\text{sin.}\ \omega > \frac{\text{tang.}\ \lambda'}{\text{tang.}\ \eta}$. Neque etiam difficile erit has determinationes ad eos casus extendere, quibus latitudo Saturni est Australis, ideoque negatiua respectu prioris. Quoniam autem hoc euenit circa nodum descendentem ☋, vbi longitudines etiam a ☋ computari conuenit, etiam sinus pro negatiuis haberi oportet, ita vt formulae inuentae etiam pro hoc casu valeant.

§. 35. Quo haec clarius perspiciantur perpendamus casum, quo annulus Saturni ideo fuit inconspicuus, quia faciem obscuram Terrae obuertebat, id quod euenisse deprehendimus inter disparitionem A. 1774. die 4 Aprilis, et reapparitionem sequentem die 1. Iulii factam. In hoc igitur interuallo eligamus tempus quoddam medium veluti diem 1. mensis Iunii, pro quo tempore tabulae Astronomicae praebent longitudinem Saturni Heliocentricam $= 5^s, 25^\circ, 55'$, vnde longitudo a nodo hoc computata erit $\Phi = 0^s, 8^\circ, 54'$, latitudo vero Heliocentrica $\lambda = 2^\circ, 14'$. At vero Ephemerides pro hoc tempore ostendunt longitudinem Saturni Geocentricam $5^s, 19^\circ, 27'$, ideoque $\omega = 0^s, 2^\circ, 27'$ cum latitudine Boreali Geocentrica $\lambda' = 2^\circ, 18'$.

§. 36.

§. 36. Super his elementis calculo instituto reperitur $l\,\text{sin.}\,\Phi = 9,189519$ at $l\frac{\text{tang.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta} = 8,812277$; vtique igitur erat $\text{sin.}\,\Phi > \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\text{tang.}\,\eta}$. Deinde vero habebimus

$l\,\text{sin.}\,\omega = 8,630911$ at $l\frac{\text{tang.}\,\lambda'}{\text{tang.}\,\eta} = 8,825065$

sicque vtique erat $\text{sin.}\,\omega < \frac{\text{tang.}\,\lambda'}{\text{tang.}\,\eta}$; vnde causa patet, cur annulus hoc tempore fuerit inuisibilis.

§. 37. Euoluamus etiam obseruationes disparitionum et reapparitionum circa nodum descendentem factas; quoniam autem hoc seculo tum temporis Saturnus Soli fuit propinquus, tales obseruationes non institutae reperiuntur. At vero praeterito seculo huiusmodi obseruationes reperiuntur a Galilaeo factae, qui annulum disparuisse obseruauit Anno 1612 die 10 Iunii; deinde autem mense Septembri iterum apparere coepisse; quam ob rem pro his temporibus loca Saturni tam Heliocentrica, quam Geocentrica computemus. Reperitur autem pro die 10 Iunii longitudo Saturni Heliocentrica $11^s, 11^\circ, 19'$ cum latitudine Australi $= 1^\circ, 58'$; longitudo vero Geocentrica $= 11^s, 17^\circ, 22'$ pariter cum latitudine Australi Geocentrica $= 1^\circ, 59$.

§. 38. Hinc patet, hoc tempore planum annuli per Terram transiisse; vnde ex hac obseruatione longitudo nodi descendentis annuli ☋ poterit concludi per formulam supra datam $\text{sin.}\,\alpha' = \frac{\text{tang.}\,\lambda'}{\text{tang.}\,\eta}$, vbi est $\lambda' = 1^\circ, 59'$; vnde reperitur $\alpha' = 3^\circ, 18'$, quamobrem esse oportet ☋$+3^\circ, 18' = 11^s, 17^\circ, 22'$ ideoque ☋$= 11^s, 14^\circ, 4'$, quae longitudo deficit a longitudine praesenti $11^s, 17^\circ$ quantitate circiter 3 gr. ita vt ab illo tempore vsque ad 1774 nodi annuli processerint per angulum circiter 3 gradum, cum tamen praecessio aequinoctiorum pro interuallo 162 annorum sit tantum $2^\circ, 16'$. Supra autem iam notauimus hoc tempore longitudinem lineae nodorum aliquanto minorem censeri debere.

§. 39.

§. 39. Computemus etiam locum Saturni pro initio Septembris, ac reperiemus longitudinem Saturni Heliocentricam $= 11^s. 14^\circ, 3'$ cum latitudine Heliocentrica Auſtrali $2^\circ, 2'$. Patet igitur hac tempeſtate planum annuli per Solem tranſiiſſe. Examinemus etiam obſeruationes antiquas circa nodum aſcendentem factas, vt eas cum nouiſſimis obſeruationibus comparare queamus, inter quas potiſſimum occurrit reapparitio annuli a Hugenio obſeruata An. 1656 die 13 Octob. pro quo tempore erat longitudo Saturni Heliocentrica $= 5^s. 26^\circ, 43'$ cum latitudine Boreali $= 2^\circ, 17'$; ex quo patet ante hoc tempus planum annuli non per Solem tranſire potuiſſe, vnde locum Geocentricum Saturni computari oportet. Reperitur autem pro hoc tempore longitudo Solis $= 6^s, 20^\circ, 46'$, vnde colligitur longitudo Saturni Geocentrica $= 5^s, 28^\circ, 58'$, quae cum ſit multo maior quam $5^s, 20^\circ$, mirum non eſt, hoc tempore annulum Saturni apparuiſſe, cum multo ante iam apparuiſſe debuerit. Verum quia hoc tempore elongatio Saturni a Sole tantum erat 21°, manifeſtum eſt ante hoc tempus ne ipſum Saturnum quidem cerni potuiſſe, ita vt ex hac obſeruatione nihil ad inſtitutum noſtrum concludi queat. Caeterum noſtra Theoria iam ita eſt confirmata, vt vberiori confirmatione non egeat.

§. 40. Quoniam illuſtris *Du Séjour* in opere ſuo: *Eſſai ſur les phénomènes relatifs aux diſparitions périodiques de l'anneau de Saturne*, momenta apparitionis et diſparitionis ex ratione inter motus medios Saturni et Terrae modo ſatis ingenioſo deriuauit, qui calculos non parum moleſtos poſtulauit, adiungamus hic ſequens problema geometricum, cuius ſolutio viam ſternet ſatis facilem iſta momenta determinandi.

Problema.

Si tam Terra, quam Saturnus orbitas circulares in eodem plano motu vniformi deſcribere concipiantur, inueſti-

gare momenta, quibus longitudo Saturni Geocentrica datam tenuerit directionem, veluti $5^{s}, 20^{\circ}$.

Solutio.

§. 41. Sit media distantia Saturni a Sole $a = 96897$ dum media Terrae a Sole distantia sumitur $= 10000$. Deinde cum interuallo vnius anni, quo Terra 360 gr. absoluit, Saturnus motu medio conficiat $12^{\circ}, 14', 6''$, erit celeritas angularis Terrae ad celeritatem angularem Saturni vt $29,423 : 1$ pro quo numero scribamus n.

Tab. XIII. Fig. 9. §. 42. Repraesentet nunc maior circulus orbitam Saturni, minor vero orbitam Terrae, ita vt sit

$$\odot A = a = 96897 \text{ et } \odot a = b = 10000.$$

Iam recta $\odot a A$ eam teneat directionem, cui longitudo Geocentrica Saturni debeat esse parallela. Quibus positis pro tempore, quo Saturnus haerebat in A, quaeratur locus Terrae, qui fuerit in D, existente angulo $a \odot D = \delta$ hinc Saturnus processerit in S per angulum $A \odot S = \Phi$ atque interea Terra ex D peruenerit in T, eritque angulus $D \odot T = n\Phi$ ideoque angulus $A \odot T = \delta + n\Phi$. Atque nunc recta TS sit parallela rectae $\odot A$, ita vt definiri debeat angulus ille Φ, cui longitudo Geocentrica TS ipsi $\odot A$ parallela respondeat.

§. 43. Hunc in finem ad directionem fixam $\odot A$ ex S et T ducantur normales Ss et Tt, quas ergo inter se aequales esse oportet; est vero interuallum $Ss = a \sin. \Phi$, interuallum vero $Tt = \sin. (\delta + n\Phi)$, vnde habetur haec aequatio: $a \sin. \Phi = b \sin, (\delta + n\Phi)$, ex qua pro quouis angulo dato δ erui oportet angulum Φ; haecque est eadem aequatio quam illustris Dominus *Du Séjour* felicissimo successu resoluit, vbi obseruauit, hanc aequationem interdum tres continere radices reales, quarum inuestigatio vtique calculos satis prolixos requirebat.

§. 44

§. 44. Iſtos autem calculos euitare poterimus, ſi quaeſtionem inuertamus, et pro ſingulis angulis Φ reſpondentes angulos δ quaeramus. Quaeri igitur oportet angulum δ ex hac aequatione: $\text{ſin.}(\delta + n\Phi) = \frac{a}{b}\,\text{ſin.}\Phi$, vbi eſt $\frac{a}{b} = 9,6897$ et $n = 29,423$. Hinc igitur angulos Φ continuo a o per interualla 10 minut. increſcere aſſumamus; quem in finem notetur eſſe $n.\ 1^\circ. = 29^\circ, 25'$, ideoque $n\ 10' = 4^\circ, 54'$. Sumto igitur $\Phi = 0$, erit quoque $\text{ſin.}\,\delta = 0$, ideoque δ vel $= 0$ vel $= 180^\circ$. Sit igitur $\Phi = 10'$ et calculus ita inſtituatur

$$l\,\text{ſin.}\ 10' = 7,4637255$$
$$\text{add.}\ l\,\tfrac{a}{b} = 0,9863103$$
$$\overline{8,4500358}$$

ergo $\delta + n.10' = 1^\circ, 36'$ vel $\delta + n.10 = -178^\circ, 24'$; hinc primo $\delta = -3^\circ, 18'$ vel $\delta = 176^\circ, 48'$. Simili modo reliqui caſus ſunt computati, hincque ſequens tabella eſt nata, quae pro quouis angulo Φ binos valores anguli δ exhibet.

Φ	δ	δ	Φ	δ	δ
0'	0'	0'	0'	0'	0'
10	− 3°,18	176°,48	− 10	3°,18	− 176°,48
20	− 6, 35	166, 59	− 20	6, 35	− 166, 59
30	− 9, 51	160, 27	− 30	9, 51	− 160, 27
40	− 13, 8	153, 56	− 40	13, 8	− 153, 56
50	− 16, 24	147, 24	− 50	16, 24	− 147, 24
1°, 0	− 19, 41	140, 51	− 1°, 0	19, 41	− 140, 51
1, 10	− 22, 57	134, 19	− 1, 10	22, 57	− 134, 19
1, 20	− 26, 14	127, 48	− 1, 20	26, 14	− 127, 48
1, 30	− 29, 26	121, 12	− 1, 30	29, 26	− 121, 12
1, 40	− 32, 39	114, 37	− 1, 40	32, 39	− 114, 37
1, 50	− 35, 52	108, 2	− 1, 50	35, 52	− 108, 2
2, 0	− 39, 5	101, 25	− 2, 0	39, 5	− 101, 25
2, 10	− 42, 15	94, 47	− 2, 10	42, 15	− 94, 47

φ	δ	δ	φ	δ	δ
2°, 20′	− 45°, 24′	88°, 8′	− 2°, 20′	45°, 24′	− 88°, 8′
2, 30	− 48, 32	81, 28	− 2, 30	48, 32	− 81, 28
2, 40	− 51, 39	74, 47	− 2, 40	51, 39	− 74, 47
2, 50	− 54, 43	68, 3	− 2, 50	54, 43	− 68, 3
3, 0	− 57, 47	61, 17	− 3, 0	57, 47	− 61, 17
3, 10	− 60, 48	54, 30	− 3, 10	60, 48	− 54, 30
3, 20	− 63, 46	47, 40	− 3, 20	63, 46	− 47, 40
3, 30	− 66, 42	40, 48	− 3, 30	66, 42	− 40, 48
3, 40	− 69, 34	33, 52	− 3, 40	69, 34	− 33, 52
3, 50	− 72, 23	26, 53	− 3, 50	72, 23	− 26, 53
4, 0	− 75, 9	19, 49	− 4, 0	75, 9	− 19, 49
4, 10	− 77, 49	12, 41	− 4, 10	77, 49	− 12, 41
4, 20	− 80, 25	5, 29	− 4, 20	80, 25	− 5, 29
4, 30	− 82, 53	−1, 51	− 4, 30	82, 53	+ 1, 51
4, 40	− 85, 15	−9, 17	− 4, 40	85, 15	+ 9, 17
4, 50	− 87, 27	−16, 53	− 4, 50	87, 27	+ 16, 53
5, 0	− 89, 28	−24, 42	− 5, 0	89, 28	+ 24, 42
5, 10	− 91, 14	−32, 44	− 5, 10	91, 14	+ 32, 44
5, 20	− 92, 39	−41, 7	− 5, 20	92, 39	+ 41, 7
5, 30	− 93, 33	−50, 1	− 5, 30	93, 33	+ 50, 1
5, 40	− 93, 36	−59, 46	− 5, 40	93, 36	+ 59, 46
5, 50	− 91, 35	−71, 35	− 5, 50	91, 35	+ 71, 35
5, 51	− 91, 6	73, 2	− 5, 51	91, 6	+ 73, 2
5, 52	− 90, 30	74, 36	− 5, 52	90, 30	+ 74, 36
5, 53	− 89, 43	−76, 21	− 5, 53	89, 43	+ 76, 21
5, 54	− 88, 38	−78, 24	− 5, 54	88, 38	+ 78, 24
5, 55	− 86, 47	−81, 13	− 5, 55	86, 47	+ 81, 13

§. 45. Ex hac iam tabula per inuersionem condamus nouam, quae pro singulis valoribus ipsius δ ostendat valores respondentes anguli φ; vbi quidem sufficiet singulos valores positiuos ipsius δ percurrisse, quandoquidem mani-

manifestum est, cuilibet valori negatiuo ipsius δ eosdem angulos Φ mutatis signis respondere debere. Angulos autem δ continuo secundum quinque gradus augeamus; neque enim difficile erit per interpolationem conuenientes angulos Φ assignare. Ita si fuerit $\delta = 0$, statim patet, fore etiam $\Phi = 0$; deinde etiam respondet angulus $\Phi = + 4^\circ, 27'$, cuius negatiuum $- 4^\circ, 27'$ pariter respondet. Tum vero si sumamus $\delta = 5^\circ$, ex posteriore tabula colligimus fore $\Phi = - 15'$; at ex priore tabula colligitur $\Phi = 4^\circ, 20'$, posterior insuper dat $\Phi = - 4^\circ, 34'$. Porro si sumamus $\delta = 10'$, posterior tabula statim dat $\Phi = - 30'$; prior tabula dat $\Phi = 4^\circ, 13'$; praeterea vero posterior columna praebet $\Phi = - 4^\circ, 41'$. Hocque modo vlterius per quinque gradus ascendendo construximus sequentem tabulam, quae pro singulis angulis positiuis δ indicat respondentes valores ipsius Φ

Valor anguli δ	Valores anguli Φ		
	I.	II.	III.
0°	0'	− 4°, 27'	4°, 27'
5	− 15	− 4, 34	4, 20
10	− 30	− 4, 41	4, 13
15	− 45	− 4, 48	4, 6
20	− 1°, 0	− 4, 54	3, 59
25	− 1, 16	− 5, 1	3, 52
30	− 1, 32	− 5, 8	3 · 45
35	− 1, 48	− 5, 14	3, 38
40	− 2, 3	− 5, 20	3, 30
45	− 2, 19	− 5, 25	3, 23
50	− 2, 35	− 5, 30	3, 16
55	− 2, 51	− 5, 35	3, 8
60	− 3, 7	− 5, 40	3, 1
65	− 3, 23	− 5, 45	2, 54
70	− 3, 41	− 5, 50	2, 47

Valor anguli δ	Valores anguli Φ		
	I.	II.	III.
75°	− 4°, 0′	− 5°, 52′	2°, 40′
80	− 4, 20	− 5, 55	2, 32
85	− 4, 40	− 5, 55	2, 24
90	− 5, 5	− 5, 52	2, 17
95	—— ——	—— ——	2, 9
100	—— ——	—— ——	2, 1
105	—— ——	—— ——	1, 54
110	—— ——	—— ——	1, 47
115	—— ——	—— ——	1, 39
120	—— ——	—— ——	1, 31
125	—— ——	—— ——	1, 23
130	—— ——	—— ——	1, 16
135	—— ——	—— ——	1, 9
140	—— ——	—— ——	1, 1
145	—— ——	—— ——	53
150	—— ——	—— ——	46
155	—— ——	—— ——	38
160	—— ——	—— ——	30
165	—— ——	—— ——	23
170	—— ——	—— ——	16
175	—— ——	—— ——	11
180	—— ——	—— ——	0

§. 46. Ex hac tabula apparet, quam diu angulus δ minor fuerit quam 94, ei ternos valores ipſius Φ reſpondere, binos ſcilicet negatiuos et vnum poſitiuum; ſtatim autem atque hunc limitem ſuperauerit, tum binos valores priores fieri imaginarios, tertius autem continuo decreſcere, donec pro angulo $\delta = 180°$ penitus euaneſcant. Quaeſtio hinc naſcitur non parum curioſa: vbi exiſtat iſte limes, vel

vel vbi ambo priores valores ipſius δ fiant imaginarii? Ad hanc quaeſtionem reſoluendam ponamus breuitatis gratia $\frac{a}{b} = m$, vt noſtra aequatio ſit m ſin. $\Phi =$ ſin. $(\delta + n\Phi)$, quae duas radices habebit inter ſe aequales, quando differentiando fuerit m coſ. $\Phi = n$ coſ. $(\delta + n\Phi)$. Addantur harum aequationum quadrata; vt prodeat $mm = nn($coſ.$\delta + n\Phi)^2 + ($ſin.$\delta + n\Phi)^2$. Statuamus hic ſin. $(\delta + n\Phi) = z$, eritque aequatio noſtra $mm = nn(1 - zz) + zz$, vnde colligitur $zz = \frac{nn - mm}{nn - 1}$. Cum igitur ſit $m = \frac{a}{b} = 9,6897$ et $n = 29,423$, erit $zz = \frac{771,92}{864,71}$, ideoque $lz = 9,9753227$. Quare cum ſit $z =$ ſin. $(\delta + n\Phi)$, erit $\delta + n\Phi = 70°, 52'$. Quia autem eſt ſin. $\Phi = \frac{z}{m}$ erit $\Phi = 5°, 35'$, ideoque $n\Phi = 164, 14$, hincque concluditur $\delta = -93°, 22'$, qui limes etiam valet pro valoribus poſitiuis ipſius Φ. Caeterum haec tabula tantum ad valores poſitiuos anguli δ eſt accommodata; neque vero opus eſt pro valoribus negatiuis tabulam peculiarem condere, quoniam hoc caſu tantum ſigna angulorum Φ mutari debent.

§. 47. Operae pretium erit hos valores anguli Φ per lineam curuam aſpectui exponere. Hunc in finem capiantur anguli δ ſuper recta indefinita tanquam axe, ſuper quo reſpondeat punctum O valori $\delta = 0$; vnde valores poſitiui dextrorſum, negatiui vero ſiniſtrorſum abſcindantur; atque manifeſtum eſt, quam diu abſciſſae vtrinque fuerint minores quam 94°, ſingulis abſciſſis ternas applicatas reſpondere, vltra vero hos limites ramos ſimplices ad axem accedere eumque attingere ad $\pm$ 180°, qui duo termini in vnum coaleſcere ſunt cenſendi, quia totus axis figurae integram circuli peripheriam refert; totus igitur tractus iſtius curuae maxime eſt memorabilis. Tab. XIII. Fig. 10.

§. 48.

Tab. XIII. Fig. 11. §. 48. Ope tabulae autem, quam dedimus, facile omnia phoenomena apparitionis et disparitionis annuli Saturni cognosci poterunt. Constituta enim epocha, qua planum annuli Saturni per ipsum Solem transit, vbi Saturnus versetur in ♄, pro hoc tempore quaeratur locus Terrae in sua orbita quam hic circulus A M B N referat; ac si elongatio Terrae a Saturno non maior fuerit, quam 94°, tria dabuntur momenta, quibus Terra per planum annuli transit, siue ante siue post epocham. Sin autem elongatio Terrae a loco Saturni limitem illum 94° excedat, tum angulo Φ vnicus tantum valor conuenit, siue semel tantum Terra per planum annuli transibit, siue ante siue post epocham constitutam. Quoniam vero in ipsa epocha annulus pariter euanescit, priori casu omnino quatuor habebuntur momenta disparitionis, posteriori vero casu etiamnunc duo talia momenta occurrunt.

§. 49. Quo singula momenta melius perpendi queant, in orbita Terrae vtrinque a termino A abscindantur arcus A M et A N circiter 94°, hocque modo tota Terrae orbita in quatuor portiones diuiditur, quarum binis superioribus ob tres valores ipsius Φ quatuor disparitiones respondebunt; portionibus vero inferioribus tantum duae. Hinc in genere obseruasse iuuabit, semper a prima disparitione vsque ad secundam annulum prorsus inuisibilem manere; at vero a disparitione secunda vsque ad tertiam annulus se ostendere poterit, nisi hoc temporis intervallum sit nimis exiguum. Denique a tertia disparitione vsque ad quartam iterum nullum annuli vestigium conspici poterit. Quando autem tempore epochae locus Terrae in inferiores portiones incidit, vbi duae tantum disparitiones locum habent, per totum hoc temporis interuallum annulum neutiquam aspicere licebit, propterea quod interea facies annuli obscura Terrae obuertitur.

§. 50.

§. 50. Consideremus primo casum, quo Terra in prima portione AM in T versatur, dum Saturnus in ♄ reperitur; sitque angulus A☉T = 45°; quo facto quatuor momenta disparitionis secundum temporis ordinem disposita erunt I°. − 5°, 20′; II°. − 2°, 19′; III°. 0°, 0′ et IV°. + 3°, 23′. Primum igitur momentum epocham antecedit, tempore circiter 5 mensium cum semisse, quandoquidem Saturnus singulis mensibus per vnum gradum progreditur. Fuerit igitur Saturnus hoc tempore in s', ac Terra reperiatur in t'; ita vt recta $s'\,t'$ ipsi A☉ sit parallela, et tempus, quo ex t' per N, A vsque in T procedit, sit quasi $5\frac{1}{2}$ mensium. Secundum momentum contigit etiam ante epocham ad − 2°, 19′, quo tempore ergo Saturnus fuerit in s'', Terra autem in t'', atque dum Terra ex t ad t'' progreditur, quod interuallo trium mensium eueniet, annulus hoc tempore prorsus inuisibilis manebit. Tertium momentum in ipsam epocham cadit, vbi Saturnus erat in ♄ et Terra in $T = t'''$, quod $2\frac{1}{2}$ mensibus post praecedens sequetur; ita vt in hoc interuallo annulus spectari possit. Quartum denique momentum disparitionis incidit post epocham circiter $3\frac{1}{2}$ mens. quo tempore Saturnus fuerit in s^{IV}, Terra autem in t^{IV} per quod totum temporis interuallum annulus aspectum nostrum effugiet, quia iterum eius facies obscura Terrae obuertitur.

§. 51. Quodsi Terra tempore epochae reperiatur in parte antecedente AN, Phoenomena erunt prorsus similia, quoniam tantum ordinem temporum inuerti oportet, ita vt, quae Phaenomena epocham praecedebant, nunc eam insequantur et contra. At si Terra circa momentum epochae in ipso puncto A versetur, tum primum disparitionis momentum respondebit loco Saturni − 4°, 27′ ideoque epocham praecedit circiter $4\frac{1}{2}$ mensibus. Secundum autem momentum ex nostra tabula incidet in $\Phi = 0$, quod ergo

cum tertio momento conueniet. Quartum denique momentum reſpondet loco Saturni 4°, 27′, ideoque epocham ſequetur poſt $4\frac{1}{2}$ menſibus. Cum igitur interuallum inter ſecundum et tertium momentum, quo annulus iterum in conſpectum prodire poſſet, hic euaneſcat, per totum interuallum a primo vsque ad quartum momentum elapſum, hoc eſt ſpatium circiter 9 menſium, annulus penitus viſui noſtro ſubtrahetur.

§. 52. Contemplemur nunc caſum, quo, dum Saturnus haeret in ♄, Terra reperiatur in portione inferiore
Tab. XIII. Fig. 12. M B, puta in T, exiſtente angulo A ⊙ T = 135°, cui angulo vnicus valor Φ reſpondet, ſcilicet 1°, 9′; ita vt hic duo habeantur momenta diſparitionis: primum quo Saturnus in ♄ et Terra in T reperiatur; alterum vero momentum continget poſt $1\frac{1}{6}$ menſes, vbi locus Saturni fuerit in *s* et Terra in *t*; atque per iſtud temporis interuallum annulus erit inconſpicuus; poſtea vero perpetuo ſe ſpectandum praebebit. At ſi Terra in portione B N fuiſſet verſata, momentum diſparitionis prius epocham antecedet, a quo, vsque ad epocham, annulus erit inuiſibilis. Denique ſi tempore epochae Terra in ipſo puncto B verſetur, ambo momenta coaleſcent, et ſpatium priuationis annuli in nihilum redigetur. Quia autem hoc tempore Saturnus in ipſa coniunctione Solis verſatur, per ſatis longum tempus ne Saturnum quidem aſpicere licebit, neque ergo hoc caſu vlla diſparitio percipi poterit.

§. 53. Examinemus nunc etiam iuxta noſtram tabulam Phoenomena, quae circa An. 1774. obſeruari debuerunt, vbi vidimus planum annuli per Solem tranſiiſſe An. 1774. Ian. 11, pro quo tempore epocha noſtra ſtatui debet, longitudine Saturni Heliocentrica exiſtente 5, 21°. Hoc autem tempore longitudo Solis erat 9ˢ, 20° ideoque locus Terrae 3ˢ, 20°, qui ergo praeceſſit locum Saturni interuallo 2ˢ, 1°, ita vt fuerit $\delta = -61°$.

Mutatis

Mutatis ergo signis nostrae tabulae momenta disparitionis respondebunt locis Saturni I°) 3°, 7′; II°) 5°, 40′; III°) − 3°, 1′ quatuor igitur momenta disparitionis ordine temporis disposita erunt.

I°) $\Phi = -3°, 1'$, II°) $\Phi = 0$, III°) $\Phi = 3° 7'$ et IIII°) $\Phi = 5°, 40$.

§. 54. Repraesentemus haec Phoenomena in Fig. 13. vbi T sit locus Terrae, existente angulo A☉F = 61°, atque prima disparitio epocham antecessit circiter 3 mensibus, quo tempore Terra erat in t', Saturnus vero in s'. Hoc igitur tempus incidit in 1773. Octob. 15. prorsus vti supra retulimus. Quoniam igitur secundum momentum incidit in ipsam epocham, per totum spatium ab 11. Octob. vsque ad 11. Ianuar. annulus mansit inuisibilis; ab epocha autem vsque ad tertium momentum quod tribus mensibus tardius contigit, ideoque circa diem 11. April. incidit, annulum aspicere licuit, donec Terra fuerit in t''' et Saturnus in s'''. De hinc autem vsque ad quartum momentum annulus visui effugere debuit, quod contigit, elapsis circiter duobus mensibus cum semisse, vbi Terra erat in t^{IV} et Saturnis in s^{IV}, id quod egregie conuenit cum ipsis obseruationibus supra allatis. Tab. XII. Fig. 13.

§. 55. Possumus etiam per integras Saturni reuolutiones siue progredi siue regredi; dum enim Saturnus totum circulum, siue 360°, absoluit, Terra interea percurrit n 360° hoc est 29 integras reuolutiones ac insuper 152°; quare cum circa epocham 1774. fuerit $\delta = -61°$; pro epocha sequente, quae incidet circa in An. 1803, erit $\delta = 91°$, ideoque contingent quatuor momenta disparitionis, pro quibus erit 1°) $\Phi = -5°, 53'$; 2°) $\Phi = -5°, 2'$; 3°) $\Phi = 0$ et 4°) $\Phi = 2°, 17'$. A primo autem momento vsque ad secundum effluxerant circiter 25 dies, per quod tempus annulus erit inconspicuus; deinde vero cernetur per temporis interuallum circiter 5 mensium; ac tum iterum disparebit per spatium duorum mensium cum semisse.

§. 56. Possumus vero etiam regredi per integram Saturni reuolutionem, ac perueniemus ad An. 1744, cuius epochae tempore erat $\delta = -213$ et addita tota peripheria, siue 360°, prodibit $\delta = 147$; tum ergo tantum duo momenta occurrerunt, scilicet $\Phi = 0$ et $\Phi = 53'$, sicque ista disparitio tantum per 26 dies durabit. Regrediamus nunc denuo per integram reuolutionem ac perueniemus ad An. 1715, tum autem erat $\delta = -5°$, pro quo tempore quatuor momenta dabant 1°. $\Phi = -4°, 20'$; 2°. $\Phi = 0$; 3°. $\Phi = 15'$ et 4°. $\Phi = 3°, 34'$, quae interualla satis exacte cum obseruationibus conueniunt: perfectus vero consensus ideo expectari non debet, quod vtrumque motum tanquam vniformem spectauimus, haecque etiam est causa, cur per semireuolutiones Saturni progredi non liceat. Verum pro huiusmodi epochis, vbi Saturnus circa nodum ascendentem sui annuli versabatur, dummodo pro vna tali epocha locus Terrae innotescat, hinc per integras reuolutiones procedendo omnia Phoenomena, quae nodo descendenti respondent, vbi longitudo Heliocentrica figi potest ad $11^s, 21°$, nostra tabula pari modo declarabit.

SOLVTIO

SOLVTIO PROBLEMATIS ASTRONOMICI, DE INVENIENDO LOCO HELIOCENTRICO COMETAE EX DATO LOCO EIVS GEOCENTRICO, SI PRO COGNITIS HABEANTVR LOCVS NODI ET INCLINATIO ORBITAE, IN QVA COMETA MOVETVR.

Auctore
L E X E L L.

§. 1.

Elementa quibus motus alicuius Cometae in orbita sua perfecte determinantur, numero habentur sex, illorum bina referuntur ad situm plani, in quo haec orbita iacet, stabiliendum, reliqua vero ipsam indolem orbitae in isto plano descriptam, continent. Perspicuum autem est, planum orbitae quoad situm suum perfecte determinari, si cognitus fuerit situs intersectionis huius plani cum ecliptica, itemque angulus, quem hoc planum cum ecliptica constituit; seu quod idem est, si locus lineae Nodorum et inclinatio orbitae ad Eclipticam, cognoscantur. Quum igitur haec Elementa, quae situm plani inuoluunt, ad ipsa indole orbitae descriptae non pendeant; ad Theoriam Cometarum ex obseruationibus deducendam, sane multum conduceret, si Methodus aliqua constaret, qua locus Nodi et inclinatio orbitae independenter a reliquis Elementis inuestigari possent, tum enim his binis Elementis cognitis, reliqua eo facilius determinarentur. Quamuis autem eiusmodi Methodus, saltem quae omni rigore Geocentrico procedat, nondum sit cognita; tamen haud vsu carebit, ostendisse, quomodo istis binis Elementis cognitis

 ex

[illegible] Cometae, locus eius Heliocentricus inueſtigari debeat; ex quo ſi tria eiusmodi loca Heliocentrica ope trium Geocentricorum fuerint inuenta, deinceps ipſa orbita Cometae omnimode determinatur.

Tab. XI. Fig. 6. §. 2. In egregio opere Illuſt. *Euleri* de orbita Cometae An 1769, praeter plurimas alias valde ſublimes diſquiſitiones circa Theoriam Cometarum, elegans omnino huius Problematis ſolutio occurrit, hinc ſuperflua quidem haberi poſſent, quae hac occaſione de iſto Problemate adducere conſtitui, niſi aliquod compendium calculi inuoluerent; praetereaque iam mihi liceat hoc Problema ex inſtituto euoluere et explicare, dum Illuſt. *Eulero* tantum in animo erat, eius ſolutionem propoſito ſuo conuenientem, attuliſſe. Caeterum quae de hoc Problemate docentur, etiam tum inſignem habere poterunt vſum, quando loca Planetarum obſeruata, cum Tabulis conferri debent.

§. 3. In plano Eclipticae ducatur V S E, quae repraeſentet lineam nodorum, ſit locus Solis in S et pro tempore quodam dato, locus terrae in T, Cometae in C; tum ex C in planum Eclipticae demittatur normalis C B, et C E perpendicularis ad lineam nodorum, atque iungantur S C, S B, T C, T B, quarum haec producta occurrat lineae nodorum in V. Porro ducantur E B, S T, quae ſibi inuicem occurrant in F, et iungantur V C, F C. Quum igitur CB ſit normalis ad planum Eclipticae et CE perpendicularis ad lineam nodorum S E, erit quoque B E perpendicularis ad S E, vnde angulus C E B $= i$, dabit inclinationem orbitae ad planum Eclipticae. Porro ob datam lineam nodorum et locum Terrae, dabitur angulus E S T $= \eta$, tumque ex obſeruationibus cognoſcetur angulus S T B $= \theta$, ſeu elongatio inter locum Solis et Cometae a Terra viſum, nec non latitudo Cometae Geocentrica,

centrica, nimirum angulus $CTB = \lambda$. Ex his Elementis cognitis vna cum interuallo $ST = c$, iam inueſtigari debent anguli CSE, BSE, CSB, et diſtantia SC, quae Elementa ſequentibus litteris indigitemus ϕ, ω, τ, v.

§. 4. Quamvis pluribus modis inueſtigatio incognitarum ϕ, ω, τ, v ſuſcipi queat, tamen pro noſtro inſtituto praeprimis conducit, vt hanc inueſtigationem ab angulo ϕ incipiamus. Sit Triangulum Sphaericum DGH ita comparatum, vt arcus DG ſit menſura anguli CSE (Fig. 5.), nec non DG, GH menſurae angulorum CST, EST, hincque erunt anguli D, G, H in triangulo Sphaerico reſpectiue aequales angulis, quos plana CSE, CST, EST inter ſe conſtituunt; vnde proprietates trianguli Sphaerici DGH, facili negotio ad angulos CSE, CST, EST et inclinationes planorum, CSE, CST, EST traduci poſſunt. Inclinatione igitur planorum CST, EST per π indicata, erit angulus H in triangulo Sphaerico $= \pi$; eſt vero per Elementa Trigon. Sphaericae Tab. XI. Fig. 6.

$$\cot. H = \frac{\sin. GH. \cos. DG. - \cos. GH. \sin. DG. \cos. G}{\sin. DG. \sin. G},$$

hinc ſi pro GH, DG, et G ſubſtituantur η, ϕ, i, conſequemur $\cot. \pi = \frac{\sin. \eta \cos. \phi - \cos. \eta \sin. \phi \cos. i}{\sin. \phi \sin. i}$. Simili ratione demonſtrabitur eſſe $\cot. \pi = \cot. \lambda \sin. \theta$, fiet igitur

$$\cot. \lambda. \sin. \theta = \frac{\sin. \eta \cot \phi}{\sin. i} - \cos. \eta. \cot. i,$$

hincque colligitur

$$\cot. \phi = \frac{\cot. \lambda. \sin. \theta \sin. i + \cos. \eta \cos. i}{\sin. \eta} = \cot. \eta \left(\frac{\cot. \lambda \sin. \theta \sin. i + \cos. i}{\cos. \eta} \right).$$

§. 5. Quum haec ſolutio ex Elementis Trigonometriae Sphaericae ſit deducta, aliam meris Elementis Geometriae ſuperſtructam ipſi ſubiungere; haud praeter rem erit. Quandoquidem itaque in triangulo SVT ſit $SV : TV = \sin. \theta : \sin. \eta$ et in triangulo BTF, $BF : BT = \sin. \theta : \cos. \eta$,

fiet

fiet $\cot.\eta = \frac{SV}{TV}.\frac{BT}{BF} = \frac{SE}{EF}$, eſt enim in Triangulo FSE, $\text{tang.}\,\eta = \frac{EF}{SE}$. Quum vero ſit, $\frac{SE}{EF} = \frac{SV}{TV}.\frac{BT}{BF}$, fiet $\frac{SE.BF}{EF} = \frac{SV}{TV}.BT$ et pro BF adhibendo EF − EB, $SE - \frac{SE.EB}{EF} = \frac{SV}{TV}.BT$, hincque

$$\frac{SE}{CE} = \frac{SE}{EF}.\frac{EB}{EC} + \frac{SV}{TV}.\frac{BT}{CE} = \frac{SE}{EF}.\frac{EB}{EC} + \frac{SV}{TV}.\frac{CB}{CE}.\frac{BT}{CB}.$$

Nunc vero habemus ob triangula CES, CBE, CFE, CTB rectangula:

$\frac{SE}{CE} = \cot.\Phi$; $\frac{EB}{EC} = \text{coſ.}\,i$; $\frac{SE}{EF} = \cot.\eta$; $\frac{CB}{CE} = \text{ſin.}\,i$; $\frac{BT}{CB} = \cot.\lambda$, tumque vti ſupra $\frac{SV}{TV} = \frac{\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\eta}$; conſequimur itaque

$$\cot.\Phi = \cot.\eta\,\text{coſ.}\,i + \frac{\cot.\lambda\,\text{ſin.}\,\theta.\text{ſin.}\,i}{\text{ſin.}\,\eta}.$$

§. 6. Quo huius formulae vſus facilior in computo adhiberi queat, ponamus $\cot.\psi = \frac{\cot.\lambda\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\eta}$, eritque

$$\cot.\Phi = \cot.\eta\,(\cot.\psi\,\text{ſin.}\,i + \text{coſ.}\,i) = \cot.\eta\,\frac{\text{ſin.}\,(i+\psi)}{\text{ſin.}\,\psi},$$

quae formula pro computo inſtituendo valde eſt concinna; caeterum etiam Geometrice hae formulae admodum eleganter inueniuntur ſequentem in modum. Ob triangula CBF, CBT rectangula, fiet tang. CFB : tang. CTB = BT : BF, eſt vero

$$BT : BF = \text{ſin.}\,BFT : \text{ſin.}\,BTF = \text{coſ.}\,\eta \cdot \text{ſin.}\,\theta, \text{ hinc}$$

$$\text{tang.}\,CFB\,(= \text{tang.}\,\psi) : \text{tang.}\,\lambda = \text{coſ.}\,\eta : \text{ſin.}\,\theta.$$

Porro habetur $\text{tang.}\,\Phi : \text{tang.}\,\eta = CE : FE$ ob triangula FES, CES ad E rectangula, eſt vero in triangulo CEF $CE : FE = \text{ſin.}\,CFE : \text{ſin.}\,ECF = \text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,(i+\psi)$, ob $CEF = i$, fiet igitur $\text{tang.}\,\Phi : \text{tang.}\,\eta = \text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,(i+\psi)$.

§. 7. Quoniam angulus ψ, prouti anguli λ et θ, ſiue poſitiue ſiue negatiue accipiantur, poſitiuos et negatiuos valores induere poteſt, neceſſum eſt, vt breui explicatione perſpicuum reddatur, quaenam formula quolibet in

caſu

caſu pro cot. Φ adhiberi debeat. Supponamus igitur ante omnia, angulum $\eta =$ E S T eſſe acutum, ita vt eius tam ſinus, quam coſinus habeantur poſitiui, eritque perſpicuum angulum ψ poſitiuum haberi, quoties ambo anguli λ et θ, ſunt ſiue poſitiui, ſiue negatiui; negatiuum vero iſtum angulum eſſe, ſi poſito alterutro angulorum λ vel θ poſitiuo, alter fuerit negatiuus. Si iam concipiatur recta FTS producta in T′, angulus $\theta =$ S T B cenſebitur eſſe poſitiuus, quoties cadit ad eandem plagam reſpectu lineae S T, ac angulus E S T ceciderit, id quod euenit, quoties locus Cometae ad Eclipticam reductus cadit vel intra angulum E S T vel intra angulum E S T′. Sin vero punctum B cadat vel intra angulum T S V, ſeu T′S V, angulus θ negatiue accipi debet. Porro ſi Latitudines Cometae in plano C E S, habeantur poſitiuae, in eodem plano infra E S F continuato, erunt negatiuae. Denique anguli Φ, dum computantur a linea ES verſus plagam oppoſitam anguli ESC, habentur negatiui.

§. 8. His obſeruatis, iam facile eſt formulas exhibere, quae pro omni ſitu punctorum C et B, valorem anguli Φ exprimant. Nimirum ſi punctum B cadat intra angulum E S T, vbi et θ, et λ habentur poſitiui, valebit formula ſupra inuenta $\cot. \Phi = \cot. \eta \frac{\sin. (i + \psi)}{\sin. \psi}$. Deinde ſi B cadat intra angulum V S T, manebit λ poſitiuus, angulus θ fiet negatiuus, ideoque et ψ, vnde formula noſtra erit $\cot. \Phi = \cot. \eta . \frac{\sin. (\psi - i)}{\sin. \psi}$. Hic igitur duo occurrunt caſus, prouti vel $\psi > i$, vel $\psi < i$, in priori angulus Φ eſt acutus, in poſteriori obtuſus. Iam ſi B reperiatur intra angulum E S T′, manebit θ poſitiuus ſed λ fiet negatiuus, vt et anguli ψ et Φ, pro illo igitur caſu formula erit $\cot. \Phi = \cot. \eta \frac{\sin. (i - \psi)}{\sin. \psi}$, vbi iterum prout

 $i > \psi$

$i > \psi$ vel $i < \psi$, angulus ϕ eſſe poteſt vel acutus, vel obtuſus. Denique ſi B cadat intra angulum T'SV, erunt ambo θ et λ negatiui, tumque formula noſtra erit

$$\text{cot.}\,\phi = -\,\text{cot.}\,\eta\,\frac{\text{ſin.}\,(i+\psi)}{\text{ſin.}\,\psi},$$

ta vt pro hoc caſu angulus ϕ ſemper ſit obtuſus.

§. 9 Antequam vlterius progrediamur, Corollaria nonnulla valorem anguli ϕ reſpicientia adferre, haud praeter rem erit.

I. Si in valore cot. ϕ ponatur $i = 0$, hoc eſt, ſi planum orbitae cum ipſa Ecliptica coincidat, fiet cot. ϕ = cot. η, ſeu quia η hoc in caſu plane arbitrarium habet valorem, idem de ϕ tenendum, hoc igitur in caſu vſus noſtri Problematis adhiberi nequit.

II. Ponatur $i = 90°$, eritque tum cot. $\phi = \frac{\text{cot.}\,\lambda.\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\eta}$.

III. Si fuerit $\eta = 0$, hoc eſt ſi terra in ipſa linea nodorum reperiatur, fiet cot. $i = -$ cot. λ ſin. θ, ideoque tam cot. λ ſin. θ ſin. i + coſ. η coſ. i, quam ſin. η euaneſcit, quamobrem valor cot. ϕ eo in caſu erit indeterminatus.

IV. Si ponatur $\eta = 90$, fiet cot. ϕ = cot. λ ſin. θ. ſin. i.

V. Si ſtatuatur $\theta = 0$, fiet cot. ϕ = cot. η. coſ. i, eoque in caſu valor anguli ϕ, non dependet ab obſeruata Latitudine Geocentrica.

VI. Poſito $\theta = 90$, fit cot. $\phi = \frac{\text{cot.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,i + \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,i}{\text{ſin.}\,\eta}$.

VII. Denique ſi $\eta + \theta = 180°$, fit ſin. η = ſin. θ; coſ. $\eta = -$ coſ. θ, hincque cot. ϕ = cot. λ ſin. i + cot. η. coſ i, et ob cot. ψ = cot. λ tang. η;

$$\text{cot.}\,\phi = \text{cot.}\,\eta.\,\frac{\text{ſin.}\,(i+\psi)}{\text{ſin.}\,\psi} = \text{cot.}\,\lambda.\,\frac{\text{ſin.}\,(i+\psi)}{\text{coſ.}\,\psi}.$$

§. 10. Inuento angulo ϕ, angulus ω = BES facile determinari poteſt, quum enim ſit tang. $\omega = \frac{BE}{SE}$, praetereaque

que habeatur $\frac{BE}{SE} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CE}{SE}$, vbi $\frac{BE}{CE} = \text{cos. } CEB = \text{cos. } i$ et $\frac{CE}{SE} = \text{tang. } \Phi$, fiet tang. ω = tang. Φ. cos. i, hincque cot. $\omega = \frac{\text{sin. } \theta \text{ tang. } i \text{ cos. } \lambda}{\text{sin. } \eta} +$ cot. η, quae formula caeteroquin hunc in modum elici potest. Perinde ac supra (5) demonstrabitur, esse $\frac{SE}{EF} = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{BF}$, hinc fiet $\frac{SE.BF}{EF.EB} = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{EB}$, est vero ob $BF = EF - EB$, $\frac{SE.BF}{EF.EB} = \frac{SE}{EB} - \frac{SE}{EF}$, hincque

$$\frac{SE}{EB} = \frac{SE}{EF} + \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{EB} = \frac{SE}{EF} + \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{CB} \cdot \frac{CB}{EB}, \text{ vnde ob}$$

$\frac{SE}{EB} = \text{cot. } \omega$, $\frac{SE}{EF} = \text{cot. } \eta$, $\frac{SV}{TV} = \frac{\text{sin. } \theta}{\text{sin. } \eta}$, $\frac{BT}{CB} = \text{cot. } \lambda$, $\frac{CB}{EB} = \text{tang. } i$, prodit cot. ω = cot. $\eta + \frac{\text{sin. } \theta \text{ cot. } \lambda \text{ tang. } i}{\text{sin. } \eta}$. Pro faciliori computo huius formulae, poni quidem posset cot. $\gamma = \frac{\text{sin. } \theta \text{ cot. } \lambda \text{ tang. } i}{\text{sin. } \eta}$, vnde fieret cot. ω = cot. η + cot. $\gamma = \frac{\text{sin. } (\gamma + \eta)}{\text{sin. } \gamma \text{ sin. } \eta}$; verum mox aliam formulam pro ω computando, multo concinniorem suppeditabimus.

§. 11. Scilicet in formula cot. ω = cot. $\eta + \frac{\text{sin. } \theta \text{ cos. } \lambda \text{ tang. } i}{\text{sin. } \eta}$, ponatur cot. π = cot. λ sin. θ, eritque cot. ω = cot. $\eta + \frac{\text{cot. } \pi \text{ tang. } i}{\text{sin. } \eta}$, hinc cot. ω − cot. $\eta = \frac{\text{cot. } \pi \text{ tang. } i}{\text{sin. } \eta}$, vnde fit $\frac{\text{sin. } (\eta - \omega)}{\text{sin. } \omega} = \frac{\text{tang. } i}{\text{tang. } \pi}$ et proinde $\frac{\text{sin. } \omega - \text{sin. } (\eta - \omega)}{\text{sin. } \omega + \text{sin. } (\eta - \omega)} = \frac{\text{tang. } \pi - \text{tang. } i}{\text{tang. } \pi + \text{tang. } i}$, siue

$$\text{tang. } (\omega - \tfrac{1}{2} \eta) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} \eta \, \frac{\text{sin. } (\pi - i)}{\text{sin. } (\pi + i)},$$

quae formula ob datos angulos η, π et i, dabit valorem ipsius ω. Caeterum hac quoque ratione ad formulam istam $\frac{\text{sin. } (\eta - \omega)}{\text{sin. } \omega} = \frac{\text{tang. } i}{\text{tang. } \pi}$ peruenire licet. Ex puncto D (Fig. 6.) in basin trianguli Sphaerici GH demittatur arcus normalis DK, tumque facili attentione adhibita patebit, esse arcum GK mensuram anguli ESB = ω, arcum HK mensuram anguli BST = $\eta - \omega$, nec non DK mensuram anguli CSB = τ. Iam vero est in triangulo Sphaerico DGH:

tang. H : tang. G = sin. GK : sin. HK, ideoque

tang. π : tang. i = sin. ω : sin. $(\eta - \omega)$.

 §. 12.

§. 12. Si loco anguli ω, quaeratur $\eta - \omega$, habebitur $\cot.(\eta - \omega) = \cot.\eta + \frac{\mathrm{tang.}\lambda \cot. i}{\sin.\eta \sin.\theta}$. Tum vero, si quaerere lubet angulum S B T, qui est $= 180° - \theta - \eta + \omega$, habebimus $\mathrm{tang.}(\theta + \eta - \omega) =$

$$\frac{\mathrm{tang.}(\theta+\eta) - \mathrm{tang.}\omega}{1 + \mathrm{tang.}(\theta+\eta)\mathrm{tang.}\omega} = \frac{\cot.\omega - \cot.(\theta+\eta)}{1 + \cot.(\theta+\eta)\cot.\omega} = \frac{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i + \cos.\eta - \sin.\eta\cot.(\theta+\eta)}{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i\cot.(\theta+\eta) + \cos.\eta\cot.(\theta+\eta) + \sin.\eta},$$

hincque

$$\mathrm{tang.}(\theta + \eta - \omega) = \frac{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i\sin.(\eta+\theta) + \sin.\theta}{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i\cos.(\eta+\theta) + \cos.\theta}.$$

Huius formulae computum inire, si volupe fuerit, videtur id facillime fieri posse, si statuatur $\mathrm{tang.}\delta = \frac{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i}{\sin.\theta}\sin.(\eta+\theta)$, tumque $\mathrm{tang.}\varepsilon = \frac{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i}{\cos.\theta}\cos.(\eta+\theta)$, tum enim erit:

$$\mathrm{tang.}(\theta+\eta-\omega) = \mathrm{tang.}\theta\left(\frac{\mathrm{tang.}\delta+1}{\mathrm{tang.}\varepsilon+1}\right) = \mathrm{tang.}\theta\frac{\cos.\varepsilon}{\cos.\delta}\,\frac{\cos.(45-\delta)}{\cos.(45-\varepsilon)}$$
$$= \mathrm{tang.}(\eta+\theta)\frac{\sin.\varepsilon}{\sin.\delta}\,\frac{\sin.(45+\delta)}{\sin.(45+\varepsilon)}.$$

§. 13. Angulus C S B $= \tau$, subsidio anguli C S E vel B S E determinari potest, quum enim sit $\sin.\tau = \frac{CB}{CS} = \frac{CB}{CE}\cdot\frac{CE}{CS}$, fiet $\sin.\tau = \sin.\phi\sin.i$, deinde ob $\mathrm{tang.}\tau = \mathrm{tang.}\,CSB = \frac{CB}{SB} = \frac{CB}{EB}\cdot\frac{EB}{SB}$, erit $\mathrm{tang.}\tau = \mathrm{tang.}i\sin.\omega$; inuento igitur alterutro angulorum ϕ vel ω, angulus τ facili negotio determinatur. Independenter quidem a valoribus angulorum ϕ et ω, angulus τ quaeri potest, verum complicatior omnino tum eius reperitur expressio, erit enim

$$\cot.\tau^2 = \frac{1}{\sin.\eta^2}(\cot.\pi^2 + 2\cot.\pi\cot.i\cos.\eta + \cot.i^2),$$

quod sequentem in modum demonstratur. Ob

$$\cot.\omega = \cot.\eta + \frac{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i}{\sin.\eta}, \text{ fit}$$

$$1 + \cot.\omega^2 = \frac{1}{\sin.\omega^2} = 1 + \cot.\eta^2 + 2\frac{\cot.\pi\,\mathrm{tang.}i\cos.\eta}{\sin.\eta^2} + \frac{\cot.\pi^2\,\mathrm{tang.}i^2}{\sin.\eta^2},$$

hincque

$$\cot.\tau^2 = \frac{\cot.i^2}{\sin.\omega^2} = \frac{1}{\sin.\eta^2}(\cot.i^2 + 2\cot.\pi\cot.\ \cos.\eta + \cot.\pi^2).$$

§. 14. Pro inuenienda distantia C S variae tradi possunt formulae, quarum praecipuas heic recensebimus. Quum

Quum ſit $CS = \frac{CE}{\text{ſin.}\,\Phi}$, tumque

$$EC = \frac{BE}{\text{coſ.}\,i}, \text{ fiet } CS = \frac{BE}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,i} = -\frac{BV\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,i},$$

eſt enim $BE = BV\,\text{ſin.}\,EVB$, exiſtente $\text{ſin.}\,EVB = -\text{ſin.}\,(\eta+\theta)$. Porro ob $\text{tang.}\,CVB = \frac{CB}{BV} = \frac{CB}{BE}\cdot\frac{BE}{BV}$, erit $\text{tang.}\,CVB = -\text{tang.}\,i.\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)$, tum vero eſt

$$\text{tang.}\,CVB \cdot \text{tang.}\,CTB = BT : BV, \text{ ſeu}$$

$$BT : BV = -\text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta) : \text{tang.}\,\lambda, \text{ tumque}$$

$$TV : BV = \text{tang.}\,\lambda + \text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta) : \text{tang.}\,\lambda.$$

Hinc quum ſit

$$TS : TV = -\text{ſin.}\,(\eta+\theta) : \text{ſin.}\,\eta, \text{ colligitur}$$

$$TS : BV = -\text{ſin.}\,(\eta+\theta)\,(\text{tang.}\,\lambda + \text{tang.}\,i.\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)) : \text{tang.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\eta$$

ideoque ob

$$TS = c, \; -BV.\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta) = \frac{c\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{tang.}\,\lambda + \text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)},$$

et denique

$$CS = v = -\frac{BV.\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,i} = \frac{c.\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,(\text{tang.}\,\lambda + \text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta))}.$$

Vt haec formula pro computo ineundo facilior reddatur, ponamus $\text{cot.}\,\zeta = \text{cot.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)$, fietque

$$\text{tang.}\,\lambda = \text{tang.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta), \text{ hinc}$$

$$\text{tang.}\lambda + \text{tang.}\,i\,\text{ſin.}(\eta+\theta) = \text{ſin.}(\eta+\theta)\,(\text{tang.}\zeta + \text{tang.}\,i) = \frac{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)\,\text{ſin.}\,(\zeta+i)}{\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,i},$$

erit igitur

$$v = \frac{c\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)\,\text{ſin.}\,(\zeta+i)} = \frac{c\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\zeta+i)}.$$

Hac quoque ratione res abſoluetur, vt ponatur

$$\text{tang.}\,\xi = -\text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta);$$

tum enim erit

$$\text{tang.}\,\lambda + \text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta) = \text{tang.}\,\lambda - \text{tang.}\,\xi = \frac{\text{ſin.}\,(\lambda-\xi)}{\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\xi},$$

hinc $v = \frac{c\,\text{tang.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\xi}{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\text{ſin.}\,(\lambda-\xi)}$, verum hanc formulam prior elegantia multum antecellit. Caeterum huius formulae demonſtratio Geometrica ſequens erit: ob $\text{tang.}\,\xi = -\text{tang.}\,i\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)$ erit $\xi = \text{ang.}\,CVB$, hinc $\lambda-\xi = VCT$, quare $\text{ſin.}\,\lambda : \text{ſin.}\,(\lambda-\xi) = VC : VT$. Porro ob $-\frac{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{\text{ſin.}\,\eta} = \frac{ST}{VT}$; fit $-\text{ſin.}\,(\eta+\theta)$

=

$= \frac{ST}{VT} . \sin. \eta$, hincque $\frac{BE}{BV} = \frac{ST}{VT} . \sin. \eta$ et $1 = \frac{ST . BV}{VT . BE} . \sin. \eta$, nec non $CE = \frac{CE . ST . BV . \sin. \eta}{VT . BE} = ST . \frac{VC}{VT} . \frac{BV}{VC} . \frac{CE}{EB} . \sin. \eta$, vnde ob $CE = CS \sin. \Phi = v \sin. \Phi$, $ST = c$, $\frac{VC}{VT} = \frac{\sin. \lambda}{\sin. (\lambda - \xi)}$, $\frac{BV}{VC} = \cos. \xi$, $\frac{EB}{CE} = \cos. i$, prodibit $v \sin. \Phi = \frac{c \sin. \lambda \sin. \eta \cos. \xi}{\cos. i \sin. (\lambda - \xi)}$.

§. 15. Sequenti autem ratione, formula meo quidem iudicio maxime concinna pro $v = CS$ inuenitur. In triangulo SCV, est $CS : VS = \sin. CVE : \sin. SCV$, tumque in triangulo STV habetur

$$VS : ST = \sin. \theta : - \sin. (\eta + \theta) = \sin. STV : \sin. EVB,$$

hinc erit

$$CS : ST = \sin. CVE . \sin. STV : \sin. SCV . \sin. EVB.$$

Iam igitur si exprimatur angulus CVE per $\varkappa$, fiet $SCV = \Phi - \varkappa$, vnde erit

$v : c = \sin. \varkappa \sin. \theta : - \sin. (\Phi - \varkappa) \sin. (\eta + \theta)$ hincque $v = - \frac{c \sin. \varkappa \sin. \theta}{\sin. (\Phi - \varkappa) \sin. (\eta + \theta)}$. Quum vero sit

$$\text{tang. } CVE = \text{tang. } \varkappa = \frac{CE}{EV} = \frac{CE}{EB} . \frac{EB}{EV}, \text{ fiet}$$

$\text{tang. } \varkappa = - \frac{\text{tang} (\eta + \theta)}{\cos. i}$, ope cuius formulae angulus $\varkappa$ determinatur. At tamen quum in his valoribus distantiae v angulus Φ ingrediatur, quaeritur merito an non detur formula pro v, quae ex meris quantitatibus cognitis conflata sit? Huiusmodi igitur formulam licet prioribus aliquanto sit complicatior, nunc vltimo tandem loco adferemus. Ex consideratione trianguli CST consequimur:

$$CS^2 = ST^2 - 2 ST . TC . \cos. STC + TC^2 = ST^2 (1 - \frac{2 TC}{ST} . \cos. STC + \frac{TC^2}{ST^2}),$$

est vero

$TC . TB = 1 : \cos. CTB$, tumque ob

$TB : BV = \text{tang. } CVB : \text{tang. } CTB$,

$TB : TV = \text{tang. } CVB : \text{tang. } CTB - \text{tang. } CVB$ et quia

$TV : TS = \sin. TSE : \sin. TVE$, colligitur demum

TC:

$TC:TS = tg.CVB.\sin.TSE : \cos.CTB.\sin.TVE(tg.CTB - tg.CVB)$.
Hinc quum sit $\text{tang. } CVB. = -\text{tang. } i \sin.(\eta + \theta)$, $TSE = \eta$, $CTB = \lambda$ et $\sin. TVE = -\sin.(\eta + \theta)$, consequemur:

$$TC : TS = \text{tang. } i \sin.\eta : \cos.\lambda (\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin.(\eta + \theta)),$$

tum vero ob

$$\cos. STC = \cos. STB. \cos. CTB = \cos.\theta \cos.\lambda,$$

demum fiet

$$v^2 = \frac{c^2}{\cos.\lambda^2}\left(\cos.\lambda^2 - \frac{2 \text{ tang. } i \sin.\eta \cos.\theta \cos.\lambda^2}{\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin.(\eta + \theta)} + \frac{\text{tang. } i^2 \sin.\eta^2}{(\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin.(\eta + \theta))^2}\right).$$

Euolutione autem facta, haec formula sequentem formam paulo commodiorem adipiscitur:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\text{tang. } \lambda^2 (1 + \sin.\eta^2 \text{ tang. } i^2) + 2 \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } i \sin.\theta \cos.\eta + \text{tang. } i^2 \sin.\theta^2}{(\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin.(\eta + \theta))^2}.$$

§ 16. Vt vsus formularum in praecedentibus allatarum eo magis illustretur, exemplo quodam earum adplicationem ostendisse iuuabit. Supponamus igitur pro Cometa Anni 1770, Longitudinem Nodi descendentis fuisse $10^s.12^\circ$ et inclinationem orbitae $1^\circ.33'.20''$, tumque ex obseruato huius Cometae loco Geocentrico die 15 Iunii $11^h.23'.22''$, quaeratur eius Locus Heliocentricus, qui determinatur ope anguli Φ et distantiae v. Erat autem pro tempore allato, Longitudo Cometae obseruata $9^s.2^\circ.51'.49''$ et Latitudo Borealis $6^\circ.57'.45''$, tumque Longitudo Solis $2^s.24^\circ.43'.44''$, et Logar. distantiae Solis a terra $= 0,0069950$. Hinc obtinebimus $180^\circ - \theta = 8^\circ.8'.5''$, $\eta = 47^\circ.16'.16''$, $\lambda = 6^\circ.57'.45''$, $i = 1^\circ.33'.20''$ et Log. $c = 0,0069950$, eritque calculus pro inueniendis angulo Φ et distantia v, vt sequitur:

L. tang.

$L.\,tang.\,\lambda = 9,0867877$
$L.\,sin.\,\theta = 9,1507600$

$9,9360277$
$L.\,cos.\,\eta = 9,8315690$

$L.\,tang.\,\psi = 9,7675967$
$\psi = 30^\circ.\,21'.\,11''$
$i = 1.\,33.\,20$

$\psi + i = 31.\,54.\,31$

$L.\,tang.\,\eta = 0,0344657$
$L.\,sin.\,\psi = 9,7035724$

$9,7380381$
$L.\,sin.\,(i+\psi) = 9,7230992$

$L.\,tang.\,\phi = 0,0149389$
$\phi = 45^\circ.\,59'.\,7'$
$\varkappa = 39.\,8.\,48$

$\phi - \varkappa = 6.\,50.\,19$

$L.\,tang.\,(\eta+\theta) = 9,9104820$
$L.\,cos.\,i = 9,9998399$

$L.\,tang.\,\varkappa = 9,9106421$

$L.\,c = 0,0069950$
$L.\,sin.\,\theta = 9,1507600$

$9\,1577550$
$L.\,\frac{sin.\,\varkappa}{sin.\,(\eta+\theta)} = 0,0000955$

$9,1578505$
$L.\,sin.\,(\phi - \varkappa) = 9,0758136$

$L.\,v = 0,0820369$

Inuento angulo ϕ, angulus ω facile determinatur ope formulae $tang.\,\omega = tang.\,\phi\; cos.\,i$, vnde pro casu allato $\omega = 45^\circ.\,58'.\,29''$; verum quum eiusmodi incidere possint casus, vbi tantum anguli ω inuestigatio suscipienda est, videamus quomodo subsidio formulae §. 11. allatae, valor ipsius ω quaerendus sit.

$L.\,\frac{tang.\,\lambda}{sin.\,\theta} = 9,9360277$ hinc ob $tang.\,\pi = \frac{tang.\,\lambda}{sin.\,\theta}$,

$\pi = 40^\circ.\,47'.\,57''$, tumque

$\pi - i = 39^\circ.\,14'.\,37''$ et $\pi + i = 42^\circ.\,21'.\,17''$.

Porro

Porro calculus erit

$L. tang. \frac{1}{2}\eta = 9,6411056$		hinc $\omega - \frac{1}{2}\eta =$	22. 20. 21
$L. \sin. (\pi - i) = 9,8011422$		$\frac{1}{2}\eta =$	23. 38. 8
$9,4422478$		$\omega =$	45. 58. 29
$L. \sin. (\pi + i) = 9,8284786$			
$L. tang. (\omega - \frac{1}{2}\eta) = 9,6137692$			

Demum ex inuento angulo ϕ, habetur τ ope formulae $\sin. \tau = \sin. \phi. \sin. i$, vel ex ω, ope formulae $tang. \tau = tang. i \sin. \omega$, vtraque autem pro casu nostro dat $\tau = 1^\circ. 7'. 7''$.

§. 17. Supra obseruauimus quod si angulus η euanescat, hoc est si terra versetur in ipsa linea nodorum, angulum ϕ manere indeterminatum, id quod similiter valet de distantia v, nam licet ex formula nostra §. 15. adducta concludi posse videtur, tum haberi $\frac{v^2}{c^2} = 1$; haec conclusio minime valet, quia ob $\frac{v^2}{c^2} = \frac{(tang. \lambda + tang. i \sin. \theta)^2}{(tang. \lambda + tang. i \sin. \theta)^2}$, vbi $tang. \lambda + tang. i \sin. \theta = 0$, tam numerator quam denominator euanescit, ideoque v manebit indeterminatum. Quamuis autem pro tali casu, ex loco Cometae Geocentrico nihil de eiusdem loco Heliocentrico concludere liceat; tamen hae obseruationes maximi momenti habendae sunt, quia ope illarum ex data Logitudine Nodi inclinatio orbitae immediate deducitur, vel saltem si limites intra quos Longitudo Nodi cadere debeat, cogniti fuerint, etiam limites pro inclinatione orbitae eo ipso innotescent. Sic quum pro Cometa Anni 1770, Longitudo Nodi descendentis certe inter $10^s. 12^\circ$ et $10^s. 13^\circ$. cadat, Longitudo autem Solis pro diebus 3, 4 et 5 Augusti fuerit, pro datis temporibus quibus obseruationes Cometae institutae sunt:

$4^s. 11^\circ. 38'. 13''$; $4^s. 12^\circ. 34'. 24''$; $4^s. 13^\circ. 32'. 56''$;

omnino liquet Terram inter 3 et 5 Augusti in ipsa linea nodo-

rum verſatam fuiſſe. Longitudinibus igitur Solis iam allatis, quum reſpondeant Longitudines Cometae obſeruatae:

$3^s.\ 6^\circ.\ 25'.\ 15''$; $3^s.\ 6^\circ.\ 47'.\ 24''$; $3^s.\ 7^\circ.\ 14'.\ 0''$

et Latitudines

$53'.\ 25''$; $55'.\ 33''$; $58'.\ 52''$;

hinc pro inclinationibus planorum per Solem, Terram et Cometam tranſeuntibus, ſequentes inuenientur valores:

$1^\circ.\ 32'.\ 37''$; $1^\circ.\ 34'.\ 59''$; $1^\circ.\ 39'.\ 23''$.

Hinc igitur iam concludere licet, ſi locus Nodi contineatur inter hos limites $10^s.\ 12^\circ$ et $10^s.\ 13^\circ$, certe inclinationem orbitae comprehendi inter $1^\circ.\ 32'.\ 20''$ et $1^\circ.\ 37'$; adeo vt ſi Longitudo Nodi cum praeciſione 10 Minutorum determinari poſſit, inclinatio orbitae determinationem admittat, cui vix 20 aut 30 ſecundorum error ineſſe queat.

§. 18. Operae nunc quoque pretium erit, vt diſpiciamus quantum anguli Φ valor, ex erroribus, qui ſiue in ipſis obſeruationibus, ſiue in Elementis orbitae aſſumtis, Longitudine Nodi et inclinatione, deprehenduntur, immutari debent. Hunc in finem formula

$$\cot.\ \Phi = \cot.\ \eta \left(\frac{\cot.\ \lambda\ \sin.\ \theta\ \sin.\ i}{\cos.\ \eta} + \cos.\ i \right)$$

differentietur, poſitis η, θ, λ, i variabilibus, eritque

$$-\frac{d\Phi}{\sin.\ \Phi^2} = -\frac{d\eta}{\sin.\ \eta^2}(\cot.\ \lambda\ \sin.\ \theta\ \cos.\ \eta\ \sin.\ i + \cos.\ i) - d\theta \frac{\cot.\ \lambda\ \cos.\ \theta\ \sin.\ i}{\sin.\ \eta}$$
$$+ di\ \cot.\ \eta \left(\frac{\cot.\ \lambda\ \sin.\ \theta\ \cos.\ i}{\cos.\ \eta} - \sin.\ i \right) - \frac{d\lambda}{\sin.\ \lambda^2} \cdot \frac{\sin.\ \theta\ \sin.\ i}{\sin.\ \eta}.$$

Siue ob $\frac{\cot.\ \lambda\ \sin.\ \theta\ \cos.\ \eta\ \sin.\ i + \cos.\ i}{\sin.\ \eta^2} = \cot.\ \Phi\ \cot.\ \eta + \cos.\ i$,

$$\cot.\ \eta \left(\frac{\cot.\ \lambda\ \sin.\ \theta\ \cos.\ i}{\cos.\ \eta} - \sin.\ i \right) = \cot.\ \Phi\ \cot.\ i - \frac{\cot.\ \eta}{\sin.\ i},$$

$$-\frac{d\Phi}{\sin.\ \Phi^2} = -d\eta(\cot.\ \Phi\ \cot.\ \eta + \cos.\ i) + di(\cot.\ \Phi\ \cot.\ i - \frac{\cot.\ \eta}{\sin.\ i}$$
$$- d\theta \frac{\cot.\ \lambda\ \cos.\ \theta\ \sin.\ i}{\sin.\ \eta} - \frac{d\lambda}{\sin.\ \lambda^2} \frac{\sin.\ \theta\ \sin.\ i}{\sin.\ \eta}.$$

Ex his formulis manifeſto colligitur, valorem $d\Phi$, ex omnibus $d\eta$, di, $d\theta$, $d\lambda$ eo maiorem euadere, quo minor ſit

ſin.

$\sin.\eta$; nam in formula priori, vbique factor est $\frac{1}{\sin.\eta}$, qui ergo eo euadit maior, quo minor fuerit angulus η. Porro partes ipsius $d\Phi$ quae ex $d\eta$ et $d\,i$ oriuntur, crescent in ratione $\sin.\theta$ et $\cot.\lambda$; pars ipsius $d\Phi$ ex $d\theta$ oriunda, crescet in ratione $\cos.\lambda$, $\cos.\theta$, $\sin.i$ et pars ex $d\lambda$ emergens in ratione reciproca $\sin.\lambda$, directa vero $\sin.\theta$, $\sin.i$. Hinc iterum generaliter concludere licet, errorem $d\Phi$ eo prodire maiorem, quo latitudo obseruata fuerit minor.

§. 19. Quum sit $\frac{c}{v} = \frac{\sin.\Phi\cos.i\,(\tang.\lambda + \tang.i\sin.(\eta+\theta))}{\tang.\lambda\sin.\eta}$ $= \frac{\sin.\Phi\cos.i}{\sin.\eta}\,(1 + \cot.\lambda\,\tang.i\,\sin.(\eta+\theta))$, inde differentiando colligitur, $-\frac{dv}{v} = + d\Phi\cot.\Phi - d\,i\,\tang.i - d\eta\cot.\eta$ $\frac{(d\eta + d\theta)\cot.\lambda\,\tang.i\cos.(\eta+\theta)}{1+\cot.\lambda\,\tang.i\sin.(\eta+\theta)} - \frac{d\lambda\cos.i\sin.i\sin.(\eta+\theta) + d\,i\sin.\lambda\cos.\lambda\sin.(\eta+\theta)}{\sin.\lambda^2\cos.i^2(1+\cot.\lambda\,\tang.i\sin.(\eta+\theta))}$, vbi si pro $d\Phi$ substituatur eius valor in superiori § per $d\eta$, $d\theta$, $d\,i$ et $d\lambda$ expressus, consequemur valorem pro dv per variationes datas expressum; verum quum vix sperare liceat formulam hinc emergentem admodum concinnam reddi posse, hanc substitutionem heic instituere, inutile ducimus.

§. 20. Quamuis inuestigatio distantiae Cometae a Terra siue lineae C T proprie ad institutum nostrum non pertineat; tamen formulam pro illa quoque inuenienda adferemus. Quum igitur sit: C T : T V = sin. C V T : sin. V C T tumque T V : S T = sin. E S T : sin. S V T, si angulus C V T, vti antea indigitetur per ξ habebimus:

C T : S T = sin. C V T . sin. E S T : sin. V C T . sin. S V T seu
C T : S T = $-\sin.\xi.\sin.\eta : \sin.(\lambda-\xi)\sin.(\eta+\theta)$, vbi est
$\tang.\xi = -\tang.i.\sin.(\eta+\theta)$; quare etiam fiet
C T : S T = $\cos.\xi\sin.\eta : \sin.(\lambda-\xi)\cot.i = \tang.i\cos.\xi\sin.\eta : \sin.(\lambda-\xi)$.

Ex quo omnino patet de hac distantia nihil iudicari posse, si terra in ipsa linea nodorum versetur; tum enim puncta V et T coincident, adeoque erit $\lambda = \xi$, quare $\sin.\eta$ et $\sin.(\lambda-\xi)$ simul euanescent, ita vt ratio C T : S T maneat indeterminata.

 TEN-

TENTAMEN ASTRONOMICVM
DE TEMPORIBVS
PERIODICIS COMETARVM
ET SPECIATIM DE TEMPORE REVOLVTIONIS COMETAE, A. 1770 OBSERVATI.

Auctore
LEXELL.

§. 1.

Quemadmodum vix quisquam Aſtronomiae gnarus eſt, qui dubitauerit Cometas in orbitis Ellipticis circa Solem circumferri, ideoque ſtatis temporibus ad eadem vnde egreſſi fuerint loca, reuerti; ita ſimul fatendum eſt, ob perplurimas easque grauiſſimas rationes dubium videri poſſe, vtrum ex obſeruationibus alicuius Cometae prima vice obſeruati, tempus eius Periodicum determinari queat? Id autem facilius intelligemus, ſi praecipuum diſcrimen quod inter orbitas Cometarum et Planetarum intercedit, perpendamus; ſcilicet orbitae Planetarum ad figuram circularem proxime accedunt valdeque parua excentricitate inſtructae ſunt, orbitae vero Cometarum Ellipticae ob inſignem Excentricitatem, in exiguis earum portionibus cum figuris Parabolicis prope coincidunt. Etiamſi igitur ex obſeruationibus Planetarum eorum tempora Periodica concludere liceret, inde minime inferri poteſt, eundem laborem pro Cometis aeque feliciter ſuccedere; quin potius ſi hic labor pro Planetis non omnimodam certitudinem praebeat, facile colligitur, cum pro Cometis ſuſceptum concluſiones tanto incertiores ſuppeditare.

§. 2.

§. 2. Notum autem eſt, Aſtronomos dum in temporibus Periodicis Planetarum determinandis, occupati fuerunt. neceſſum non habuiſſe, vt huiusmodi laborem ſuſciperent; quippe quum via magis directa, ex ipſis obſeruationibus haec tempora Periodica concludi poſſent. Verum pro Cometis, quorum tempora Periodica plerumque valde magna eſſe oportet, hoc admodum raro ſuccedit; inter obſeruatos nimirum 63 Cometas, quorum Elementa habentur cognita, non niſi tres ſunt, de quibus tempus reuolutionis ex obſeruationibus innotuerit. Scilicet praeter notiſſimum Cometam Halleii, qui Annis 1456, 1531, 1607, 1682, 1759 obſeruatus fuit, cuiusque igitur tempus Periodicum inter 76 et 77 annos concluditur; Cometae annis 1264 et 1556 obſeruati reſpectu Elementorum conueniunt, tum vero de Cometa anno 1532 obſeruato conſtat, quod parum differat ab eo, quem Anno 1661 obſeruatum nouimus, vnde binos hos vltimo commemoratos Cometas annis 1848 et 1789 ad ſua Perihelia reuerſuros eſſe, ſperare licet.

§. 3. Methodi quibus Aſtronomi vti ſolent, in computandis motibus cometarum, etiamſi prolixae et parum expeditae ſint, earum tamen culpa minime fit, vt determinatio temporis Periodici horum Aſtrorum tantis difficultatibus prematur; quin potius certiſſimum eſt, quod ſi Methodus aliqua directa detegi poſſet, computandi motus Cometarum in orbitis Ellipticis, hanc determinationem breuiorem eo ipſo quidem, ſed non certiorem fieri. Eſt enim, vt dixi, huius difficultatis ratio, in eo quaerenda, quod orbitae Cometarum valde ſint excentricae, vnde euenit, vt haec Aſtra non niſi breui tempore, et quidem in confiniis ipſius Perihelii, e Tellure noſtra ſint conſpicua; ita vt portiones orbitarum, quas interea circa Solem deſcribunt, non niſi minimas partes ellipſium ab ipſis deſcripta-

 rum,

rum, constituant. Caeterum haec Astra plerumque lumine multo debiliori, quam Planetae, praedita esse solent et Atmosphaera quadam circumdata; quo fit vt obseruationes, quibus loca horum Astrorum Geocentrica determinantur, non omnimodo certitudine gaudere soleant.

§. 4. Propter insignem excentricitatem, quae in orbitis Cometarum locum habet, Astronomis vsu receptum esse consueuit, vt has orbitas in computo tamquam lineas Parabolicas contemplentur; nam pro exiguis portionibus Ellipsium valde excentricarum, haud difficulter Parabolae inueniuntur, quae in his portionibus cum Ellipsibus modo dictis coincidunt. Quod si itaque orbitae Parabolicae adeo exacte obseruationibus satisfaciant, vt dissensus calculi et obseruationum nullibi duo aut tria minuta prima excedat, id pro certissimo indicio habendum est, calculum huiusmodi Cometae sub hypothesi orbitae Ellipticae frustra tentari, ideoque de eius tempore Periodico nihil pronunciari posse; imprimis si hi errores pro obseruationibus propinquis, modo euadant affirmatiui, modo negatiui. Sin vero maiores dissensus inter calculum et obseruationes reperiantur, vti quinque, decem et plurium minutorum primorum, illique pro obseruationibus tempore proximis eiusdem habeantur nominis; inde sane cum aliqua verisimilitudine concludi potest, pro eiusmodi Cometa calculum orbitae Ellipticae cum spe felicis successus, suscipi posse. Facile autem intelligitur, hoc euenire, quoties aliquis Cometa, tam diu incolis Telluris conspicuus fuerit, vt portio orbitae eius, interea circa Solem descriptae, nulla ratione cum Parabola reddi possit coincidens. Operae igitur pretium est, vt examinemus, quinam sit character distinctiuus Cometarum, de quibus eiusmodi spem fouere possimus, vt interuallo temporis satis longo, eorum loca obseruari possint.

§. 5.

§. 5. Hunc autem characterem merito ex valore diſtantiae Periheliae deriuandum eſſe, exiſtimamus. Nam ſi diſtantia Perihelii magna ſit, hoc eſt diſtantiam Solis a Terra, notabili quantitate ſuperet; minime fieri poteſt, vt Cometa tempore ſuae apparitionis, quod plerumque inter tres, vel quatuor menſes concluditur, portionem ſuae orbitae ſatis notabilem deſcribat. Contra autem ſi diſtantia Perihelii ſit valde exigua, vtpote minor quinta parte diſtantiae telluris a Sole, raro euenit vt Cometa tum in ipſo Perihelio obſeruari queat, ob motum eius tempore Perihelii celerrimum, ſed hoc in caſu portiones orbitae deſcriptae, angulos anomaliarum cum diſtantia Perihelii conſtituunt valde obtuſos. Verum hoc infra magis perſpicue explicabitur, dum primum binas attulerimus Tabellas, quarum prima exhibet, tempus quod Cometa pro data diſtantia perihelii in partibus diſtantiae Telluris a Sole, expreſſa, adhibet ad conficiendum angulum anomaliae 90° a Perihelio computatum; altera vero ſuppeditat angulum a Perihelio computatum quem Cometa, pro data iterum diſtantia Perihelii, dato interuallo trium menſium, conficit.

Diſtant.

Diſtant. Perihel.	Temp. pro anom 90°.	Angulus pro temp. 90 Dier.
2, 0	309ᵈ, 9844	40°. 38′
1, 9	287, 0287	43. 18
1, 8	264, 6693	46. 16
1, 7	242, 9227	49. 31
1, 6	221, 8068	53. 5
1, 5	201, 3408	56. 58
1, 4	181, 5461	61. 14
1, 3	162, 4463	65. 53
1, 2	144, 0677	70. 55
1, 1	126, 4398	76. 23
1, 0	109, 5961	82. 14
0, 9	93, 5747	88. 30
0, 8	78, 4205	94. 50
0, 7	64, 1862	102. 5
0, 6	50, 9356	109. 26
0, 5	38, 7481	117. 8
0, 4	27, 7259	125. 14
0, 3	18, 0085	133. 52
0, 2	9, 8025	143. 24
0, 1	1, 0959	154. 52
0, 075	- - - -	158. 24
0, 050	- - - -	162. 30
0, 025	- - - -	167. 36

§. 6. Sunt quidem hae Tabulae hypotheſi orbitarum Parabolicarum accommodatae, eo tamen non obſtante, ex illis de portionibus orbitarum Ellipticarum reapſe deſcriptarum, iudicium rite formari poteſt. Nam pro prima earum facile liquet, orbitam Cometae Ellipticam, intra angulum anomaliae 90° a perihelio cum Parabola ſaltem tam

tam prope conuenire, vt errores in hanc Tabulam derivandi vix vnum et alterum diem excedant. In ſecunda autem Tabula, pro exiguis valoribus diſtantiae periheliae, errores inſignes locum habere poſſent; verum in his caſibus certo ſtatuere licet excentricitatem eo magis increſcere, quo diſtantia Perihelii euadat minor, vnde vtcunque excentricitas fuerit comparata, in hac Tabula error vnum vel alterum gradum pro anomalia vix ſuperabit.

§. 7. Ex inſpectione Tabulae allatae liquet, ſi diſtantia Perihelii excedat 1, 5 diſtantiae telluris mediae a Sole, interuallo trium menſium non niſi angulum 57° a Perihelio circa Solem deſcribi, et pro anomalia 90° fere ſeptem requiri menſes; quare vix ſpes eſt, Cometam cuius vel tanta, vel maior eſt diſtantia Perihelii, tamdiu obſeruari poſſe, vt de vera eius orbita Elliptica aliquid concludere liceret. Ex hoc genere non niſi duo adſunt Cometae obſeruati, prior qui a 31 Iulii anni 1729 vsque ad 21 Ianuarii 1730 apparuit et cuius diſtantia Perihelii habetur 4, 1; alter, qui Anno 1747 a 30 Auguſti vsque ad 5 Decembris obſerratus habetur et cuius diſtantia Perihelii erat 2, 3. Facile autem intelligitur Cometas ad hanc claſſem pertinentes rarius in Terra eſſe debere conſpicuos, et quidem fieri poſſe, vt nonnulli eorum propter debilitatem luminis in Periheliis viſum noſtrum plane praeterfugiant.

§. 8. Si diſtantia perihelii Cometae cuiuspiam fuerit exigua, vtpote minor quam 0, 2, ſeu quinta parte diſtantiae mediae telluris a Sole, interuallo trium menſium arcus vix 50° gradus a Cometa deſcribetur, ſi nimirum ſeponatur tempus, quo Cometa in confiniis Perihelii verſatur. Nam poſita diſtantia Perihelii praeciſe 0, 2 Cometa adhibebit 10 dies ad deſcribendum angulum 90° a Perihelio, deinde vero reliqui 80 dies impendentur ad conficiendum angulum 53°; ideoque ſi Cometa iſto priori interuallo decem dierum non

 fuerit

fuerit obſeruatus, ex reliquis obſeruationibus inſequentibus vix quicquam de orbitae excentricitate concludi poterit. Praeterea ſatis tuto ſtatuere licet, imminuta diſtantia Perihelii excentricitatem orbitae increſcere, hincque eius determinationem eo ipſo tanto euadere incertiorem. Quamuis igitur Cometae ex hoc genere, ſatis longo temporis interuallo conſpicui eſſe ſoleant, tamen eapropter nihilo certius de eorum tempore Periodico quicquam definiri poteſt. Inter Cometas qui ad hoc genus referuntur, praeprimis attentionem merentur, qui annis 1680, 1744, 1769 apparuerunt, quippe quorum caudae inſigni longitudine erant conſpicuae. Primus vero eorum, inter omnes Cometas hucusque obſeruatos, minimam habet diſtantiam Perihelii $= 0,00612$; quodſi igitur ſupponamus huius Cometae tempus Periodicum fuiſſe tantum centum annorum, habebitur eius excentricitas $= 0,999716$, quae valde prope ad vnitatem accedit. Hinc ſi iam intelligatur pro hoc valore Excentricitatis in quarta ſolummodo figura vnitate eſſe aberratum, ita vt ſit excentricitas $= 0,9998$, fiet tempus Periodicum 169 annorum, quod enormiter a priori differt. De Cometa Anni 1769 per varios calculos colligere poſſe mihi viſus ſum, quod eius tempus Periodicum proxime eſſe debeat 450 annorum; verum ſimul perſpexi, hoc non niſi cum incertitudine fere centum annorum ſtatui poſſe. Quod ſi igitur ex hac claſſe aliquis adſit Cometa, cuius tempus Periodicum definire liceat, erit fortaſſis ille, qui Anno 1744 obſeruatus fuit; quippe quum eius obſeruationes ipſo tempore Perihelii inſtitutae adſint; verum tamen plurimae adſunt dubitandi rationes an pro iſto quoque Cometa, tempus reuolutionis cum ſufficienti exactitudine vnius vel alterius anni determinationem admittat.

§ 9. His perpenſis intelligitur, Cometas quorum diſtantiae periheliae inter 0, 2 et 1, 0 continentur, ita eſſe com-

comparatos, vt ſi interuallo aliquot menſium eorum obſervationibus inuigilare liceat, ſpes aliqua adſit, quod computus verarum orbitarum Ellipticarum felicem ſortiatur ſucceſſum. Nam ſi intelligatur Cometam aliquem, cuius diſtantia Perihelii ex: cauſſa ponatur eſſe 0, 4 a tempore Perihelii, per integros tres menſes eſſe obſeruatum; hic Cometa interea angulum circa Solem deſcribet 125°, ideoque eo interuallo temporis, in tam diuerſis orbitae ſuae locis verſabitur, vt vix Linea Parabolica inueniri poſſe videatur, quae cum portione orbitae deſcriptae perfecte coincidet, niſi ſi haec orbita valde inſignem habeat excentricitatem. Plerique ſane Cometae quorum hucusque inſtitutas habemus obſeruationes, ad hanc claſſem referendi ſunt; verum valde tamen pauci eorum tam diu obſeruati habentur, vt ex obſeruationibus de excentricitatibus orbitarum quicquam concludere liceret. Nam ſi Catalogum Cometarum obſeruatorum percurramus, vix vltra octo aut nouem ex hoc genere inueniemus Cometas, qui durante eorum apparitione angulum 70° circa Solem deſcripſerint, et ſi Cometas ante ſeculum noſtrum obſeruatos excludamus, quippe quorum obſeruationes omnino incertiores ſunt, quam vt inueſtigationi excentricitatis inſeruire queant, inter huius Seculi Cometas non niſi quatuor vel quinque habentur, pro quibus ſpes adſit, vt eorum tempus Periodicum ex obſeruationibus elici queat. Horum in numero primum ſane tuetur locum Cometa Anni 1759; verum quum eius tempus Periodicum iam aliunde ſatis habeatur cognitum, inutilis foret opera, quae in Temporis huius Periodici inueſtigatione ex obſeruationibus deducenda adhiberi poſſet. Interim quum huius Cometae adſint obſeruationes interuallo quinque menſium inter ſe diſtantes; nullus dubito, quin earum ope tempus Periodicum, ſaltem valde prope determinationem admittat.

§. 10. Cometa, qui Anno 1770 apparuit, cum pluribus nominibus attentionem Aſtronomorum mereatur, tum eo praecipue, quod a primo tempore ſuae apparitionis die 14 Iunii vsque ad vltimam eius obſeruationem die 2 Octobris factam, circa Solem deſcripſerit angulum 170° maiorem, vnde ſane tanto maiorem ſpem fouere licet, orbitae eius ellipticae determinationem, ſucceſſu haud eſſe carituram. Huic autem ſpei hoc ipſo inſigne accedit incrementum, quod Elementa quae a pluribus Aſtronomis pro motu huius Cometae in orbita Parabolica inventa fuerint, cum obſeruationibus conciliari nulla ratione potuerint. Scilicet Elementa quibus obſeruationes a die 14 Iunii vsque ad 29 Iunii, ſatis exacte implentur; non ſolum ab obſeruationibus die 30 Iunii atque 1 et 3 Iulii inſtitutis vehementer abludunt; ſed quod principale hac in quaeſtione eſt, nec melius cum obſeruationibus ſecundae apparitionis a 2 Aug. vsque ad 2 Octobris inſtitutis, conciliari poſſunt. Et viciſſim ſi quaeratur orbita parabolica, quae obſeruationibus menſe Auguſti factis ſalisfaciat, illa non modo ab obſeruationibus menſe Iunii inſtitutis, ſed etiam illis, quae menſe Septembris factae habentur, vehementer diſſentiens reperietur. Tum denique orbita Parabolica, quae obſeruationibus menſe Septembris ſatisfecerit, admodum a reliquis praecedentibus differet, quemadmodum hoc a Celebri Aſtronomo Vpſalienſi *Proſperin*, in Commentario de motu Cometae Anni 1770, Tomo II. Nouor. Actorum Societ. Vpſalienſis inſerto, euidenter comprobatum eſt.

§. 11. Quum igitur his rationibus valde probabile redderetur, orbitam huius Cometae non ſolum a figura Parabolica abludere, ſed etiam excentricitatis quantitatem per obſeruationes adeo inter ſe diſſitas, concludi poſſe; operae pretium mihi viſum eſt, huius Cometae motum in orbita Elliptica computare, cuius inueſtigationis breuem delineationem

nem Lectoribus Astronomiae curiosis, iam tradere animus est. Ante omnia igitur ne frustraneum prorsus susciperem laborem, primum tentamine facto ipse explorare constitui, an non orbita Parabolica inueniri posset, quae tribus obseruationibus huius Cometae satisfaceret, quarum binae, quantum fieri posset, vtrinque a Perihelio erant remotae, tertia vero prope ipsum tempus Perihelii instituta; at mox perspexi huiusmodi orbitam Parabolicam nulla ratione inueniri posse. Computum igitur huius Cometae in orbita Elliptica adgressurus, praeprimis mihi cogitandum erat de eligenda Methodo, huic instituto apta, existimaui autem vix aliam pro praesenti ratione commodiorem eligi posse, quam illam cuius ideam exhibuit Illust. *Eulerus* in III. Parte egregii sui Operis de Cometa A. 1769. Consistit vero haec Methodus in eo, vt si inter Elementa Cometae, positio nodi et inclinatio orbitae proxime saltem habeantur cognita, reliqua eius Elementa ope trium obseruationum determinentur. Primum enim ex datis loco nodi et inclinatione orbitae, pro vnoquoque loco Cometae Geocentrico, inueniri potest elongatio Cometae heliocentrica a Nodo, vti etiam distantia eius a Sole, idque siue ea ratione, quam Illust. *Eulerus* loco modo citato tradidit, siue etiam ope formularum, quas exposui in Schediasmate huic Volumini Actorum inserto de loco Heliocentrico Cometae ex Geocentrico deducendo. Inuentis vero sic tribus elongationibus a Nodo, vna cum distantiis a Sole ipsis respondentibus, per formulas ab Illust. *Eulero* traditas, inueniuntur parameter orbitae, excentricitas, elongatio Perihelii a Nodo, tumque demum ipsum tempus Perihelii. quod tempus ex tribus obseruationibus deriuatum, idem prodire debet, si longitudo Nodi et inclinatio orbitae rite fuerint determinata; sin vero hoc minus eueniat, per falsas positiones detegetur, quantum

 locus

locus Nodi et inclinatio immutari debeant, vt perfectus prodeat consensus.

§. 12. Pro hoc autem instituto eo magis conducebat, hanc adhibere Methodum, quod valores pro positione Nodi et inclinatione orbitae Elementis Parabolicis accommodatae, licet prorsus verae non essent, nec tamen enormiter a veritate abludere posse viderentur. In primo igitur a me instituto calculo, tres hypotheses pro loco Nodi et inclinatione orbitae adhibui, ita comparatas:

	I.	II.	III.
Locus Nodi Descend.	10s. 15°. 50′;	10s. 15°. 20′;	10s. 15°. 50′.
Inclin. orbitae	1°. 45′. 0″;	1°. 45′. 0″;	1°. 44′. 30″.

tumque facta combinatione obseruationum die 15 Iunii et 2 Augusti institutarum, cum illis quae 29 Sept. 1 et 2 Octobr. factae sunt, inueni sumto medio trium conclusionum, pro correctione Longitudinis Nodi 2½ Min. prima et pro correctione inclinationis 5 Min. prima, vtramque correctionem diminutiuam. Verum quum hae correctiones vltra hypotheses assumtas caderent, facile perspexi eas valde esse posse erroneas; ideoque ex hoc primo calculo nihil aliud concludere mihi licuit, quam quod Longitudo Nodi proxime circa 10s. 13°. subsisteret.

§. 13. Deinde vero facile perspexi, modo pro hoc Cometa cognita fuerit Longitudo Nodi, ex ipsis obseruationibus inclinationem orbitae deduci posse; hunc enim in finem adhibeantur obseruationes illis diebus institutae, quibus probabiliter colligi potest terram in ipsa linea Nodorum versatam fuisse; quo enim tempore terra per lineam Nodorum transit, planum quod per centra Solis, terrae et cometae transit, ipsum planum orbitae constituet, eiusque igitur inclinatio ad

ad Eclipticam inuenietur ope elongationis apparentis Cometae a Sole e terra visae, et Latitudinis Geocentricae. Hac igitur ratione pro locis Nodi constitutis, inclinationes erunt, vt sequens Schema declarat:

Loc. ☋	Inclin. obseru.
$10^s. 16^\circ. 14'. 50''$	$1^\circ. 48'. 9''$
15. 28. 26	44. 37
14. 30. 6	41. 25
13. 32. 56	39. 23
12. 34. 24	34. 59

Hinc igitur in sequenti calculo meo, quatuor his vsus sum hypothesibus:

	I.	II.	III.	IV.
Long. ☋ =	$10^s. 16^\circ$;	$10^s. 15^\circ$;	$10^s. 14^\circ$;	$10^s. 13^\circ$
Inclin. orb. =	$1^\circ. 47'$;	$1^\circ. 44'$;	$1^\circ. 41'$;	$1^\circ. 38'$

quibus adhibitis varias institui combinationes, primum obseruationum diebus 15 Iunii, 2 Aug. 1 Octob. institutarum, deinde obseruationum diebus 2 Aug. 14 Aug. 10 Octob., tum obseruationum diebus 15 Iunii, 14 Aug. 1 October factarum, ex quibus liquido mihi constitit maximum consensum pro Tempore Perihelii oriri, si locus Nodi statuatur $10^s. 13^\circ$. Sic ex vltima harum combinationum, tres adhibitae obseruationes pro quatuor nostris hypothesibus, temporis Perihelii sequentes praebent valores:

I.	11, 6882 Aug.	12, 2369	12, 7288	12, 4916
II.	8, 7149	10, 3736	11, 6270	12, 2873
III.	5, 3236	7, 6547	9, 7737	11, 0194

Hinc igitur nouo argumento confirmatum est, Longitudinem Nodi $10^s. 13^\circ$ non excedere, quin potius hac quantitate aliquanto esse minorem.

§. 14.

§. 14. Quum iam aliquatenus de loco Nodi probabilis coniectura formari potuerit, denuo quatuor hypotheſes conſiderandas duxi, inter quas hic locus certo contineri debebat, pro ſingulis autem binas adhui hypotheſes circa inclinationem orbitae vno minuto primo inter ſe diſcrepantes; quippe quum ex obſeruationibus ſatis pateſceret, loco Nodi bene conſtituto, incertitudinem circa inclinationem orbitae vnum minutum primum non excedere poſſe. Hae autem octo hypotheſes ſe habebant, vti ſequens Schema indicat:

Loc. ☋	$10^s. 14°$;	$10^s. 13°$;	$10^s. 12°$;	$10^s. 11°$
Incl. orb.	$1°. 40'$;	$1°. 36'. 40''$;	$1°. 33'. 20''$;	$1°. 30'\ 0''$
	$1°. 41'$;	$1°. 37'. 40''$;	$1°. 34'. 20''$;	$1°. 31'. 0''$

His itaque hypotheſibus conſtitutis, combinationes obſeruationum inter ſe duorum generum, inſtitui. Primum enim obſeruationes prima huius Cometae apparitione, menſe Iunii factas, cum illis comparandas duxi, quae partim proxime circa ipſum tempus Perihelii, tumque verſus vltimum tempus apparitionis, diebus 29 Sept. 1 et 2 Octob. factae erant; facile enim perſpexi ex combinatione harum obſeruationum maxime tutas et certas concluſiones de Elementis Cometae formari poſſe, quum portio orbitae circa Solem interea deſcriptae reſpondeat angulo anomaliae 170° excedenti. Combinationes autem obſeruationum ex quibus concluſiones deriuatas infra adducere conſtitui, numero decem habebantur ſequentes:

I.	15 Iunii,	10 Aug.	1 Octob.
II.	15 - -	10 (β)	1 - -
III.	15 - -	14 -	1 - -
IV.	15 - -	12 -	1 - -
V.	15 - -	11 -	1 - -
VI.	15 - -	11 -	2 - -

VII.

VII.	17 Iunii,	11 Aug.		2	Octob.
VIII.	15 - -	28	-	2	- -
IX.	29 - -	28	-	2	- -
X.	22 - -	19	-	29	Septemb.

§. 15. Vtcunque autem certae esse possent conclusiones, ex combinationibus allatis deductae, tamen contra illas, id moueri poterat dubium, quod motus Cometae circa finem mensis Iunii et initium Iulii, dum Cometa in vicinia telluris versabatur, aliquam fortassis perturbationem ab actione telluris sit perpessus, ita vt portio orbitae, quam durante secunda apparitione descripserit Cometa, non prorsus respici debeat, tamquam continuatio orbitae in prima apparitione descriptae. Ne igitur istud dubium moram hoc in negotio facesseret, obseruationum durante secunda apparitione factarum, combinationes quoque institui decem sequentes:

I.	7	Aug.	26	Aug.	1	Octob.
II.	7	-	28	-	1	- -
III.	11	-	28	-	2	- -
IV.	11	-	26	-	2	- -
V.	12	-	26	-	1	- -
VI.	12	-	26	-	2	- -
VII.	10	-	26	-	29	Septemb.
VIII.	10	-	28	-	29	- -
IX.	7	-	31	-	1	October.
X.	7	-	31	-	29	Septemb.

Licet autem conclusiones ex his combinationibus deductae, non aeque bene inter se consentirent, ac illae quae ex prioribus erant elicitae, tamen hic dissensus maior non reperiebatur, quam vt harum conclusionum ope, tam Longitudo Nodi, quam inclinatio orbitae, quorum Elementorum examen,

hoc calculo mihi imprimis erat propositum, sufficienti cum exactitudine determinarentur.

§. 16. Antequam vero conclusiones ex vtriusque generis combinationibus deductas, adferam, primum specimine quodam illustrare conueniet, quem in modum ad eas perductus sum. Sit igitur proposita combinatio nostra prioris classis prima, pro qua ex nostris hypothesibus, tres obseruationes dierum 15 Iunii, 10 Aug. et 1 Octob., sequentes dant pro tempore Perihelii expressiones:

Positis quatuor hypothesibus prioribus:

I.	12, 2894 Aug.	13, 0808	13, 7523	14, 5136
II.	11, 5670	12, 7611	13, 7624	14, 6295
III.	10, 6453	12, 5489	14, 4316	16, 1312

Adhibitis quatuor hypothesibus posterioribus:

I.	11, 3363 Aug.	12, 2061	13, 0018	13, 6140
II.	10, 3628	11, 7964	12, 7118	13, 8347
III.	10, 9063	12, 5269	14, 3821	16, 1056

Ex inspectione horum numerorum mox liquet, pro tempore Perihelii valores maxime consentientes cadere inter hypotheses secundam et tertiam, et calculo exactius instituto, quum pro his hypothesibus sint Longitudines ☊ $10^s. 13^\circ.$, $10^s. 12^\circ$, quibus in prioribus respondent inclinationes orbitae $1^\circ. 36'. 40''$, $1^s. 33'. 20''$ et in posterioribus $1^\circ. 37'. 40''$; $1^\circ. 34'. 20''$; inuenietur perfectum fere consensum oriri, si Longitudo ☊ supponatur $10^s. 12^\circ. 18'$, inclinatione existente $1^\circ. 34'. 0''$. Deinde autem reliqua Elementa pro nostris hypothesibus determinata, ita corrigenda sunt, vt his valoribus loci Nodi et inclinationis accommodentur. Similis ratio est cum determinatione Elementorum pro combinationibus secundae classis, quarum igitur specimen heic adferre, non nimis e re est.

§. 17.

§. 17. Sequitur nunc vt conclusiones ex nostris combinationibus deductas ob oculos ponamus, quod sequentibus binis Tabulis commodissime fiet, quarum prior conclusiones prioris classis, posterior secundae classis sequelas exhibet:

Elementa Cometae anni 1770 ex decem combinationibus prioribus deducta:

	Long. ☊.	Inclin.	Perihel. a ☊.	Log Semiparam.	Log. Dist. Perihel.	Long. Excentricit.	Temp. Period.	Temp. Perihel.
I.	4ˢ. 12°. 18″	1°. 34′. 0″	44°. 6′	0,0810	9,8295	9,8946	5,6 An.	13,88
II.	12. 3	33. 50	44. 19	0,0805	9,8308	9,8905	5,3	13,95
III.	11. 59	34. 0	44. 23	0,0808	9,8302	9,8925	5,4	13,85
IV.	11. 52	33. 30	44. 29	0,0804	9,8308	9,8902	5,3	13,90
V.	12. 10	33. 20	44. 10	0,0800	9,8315	9,8881	5,3	14,00
VI.	12. 25	33. 40	44. 4	0,0805	9,8316	9,8885	5,2	14,18
VII.	12. 25	33. 40	43. 59	0,0804	9,8316	9,8884	5,2	14.13
VIII.	12. 50	34. 40	43. 36	0,0819	9,8290	9,8976	5,8	13,66
IX.	12. 54	35. 10	43. 25	0,0814	9,8284	9,8980	5,8	13,37
X.	11. 42	34. 20	44. 35	0,0803	9,8292	9,8941	5,5	13.57
Med.	4. 12. 18	1. 34. 0	44. 7	0,0807	9,8303	9,8923	5,4	13,85

Elementa eiusdem Cometae ex decem combinationibus nostris posterioribus deducta:

	Long. ☊.	Inclin. orbit.	Perihel. a ☊.	Log. Semiparam.	Log. Dist. Perihel.	Log. Excentricit.	Temp. Period.	Temp. Perihel.
I.	4ˢ. 12°. 18″	1°. 34′. 30″	43°. 37′	0,0789	9,8280	9,8932	5,4 An.	13,25
II.	12. 17	34. 20	44. 0	0,0806	9,8291	9,8946	5,5	13,58
III.	12. 36	35. 20	42. 54	0,0764	9,8272	9,8893	5,2	12,80
IV.	12. 42	35. 40	42. 58	0,0770	9,8267	9,8918	5,3	12,70
V.	12. 6	35. 40	43. 4	0,0749	9.8259	9,8888	5,1	12,30
VI.	12. 24	36. 40	42. 26	0,0727	9,8245	9,8870	5,0	11,60
VII.	12. 16	33. 50	44. 18	0,0821	9.8319	9.8916	5.4	13,80
VIII.	12. 12	33. 40	44. 17	0,0814	9.8297	9.8950	5.6	13,95
IX.	12. 18	34. 40	43. 16	0,0768	9.8274	9.8898	5.2	12,98
X.	12. 10	[illegible]	44. 15	0,0817	9.8294	9.8964	5.7	13,71
Med.	4. 12. 20	1. [illegible]	[illegible]. 31	0,0782	9,8280	9,8912	5.3	13,07

§. 18.

§. 18. Antequam calculum inirem, cuius subsidio haec elementa inuenta sunt, probabili quidem coniectura assequi poteram, orbitam Cometae satis sensibiliter a figura Parabolica differre, minime tamen mihi persuadere ausus fuissem, vt pro tempore Periodico valorem adeo inexspectatum, ne dicam incredibilem prorsus, inuenirem. Mirum certe vnicuique videri debet, Cometam cuius tam breue sit tempus reuolutionis, Astronomorum hucusque adeo effugisse attentionem, vt non nisi vnica vice Anno 1770 obseruari potuerit; vtcunque autem grauis hinc oriatur dubitandi ratio, ex altera parte fatendum est, vix fieri posse, vt dum ex tam variis obseruationibus, modisque adeo diuersis inter se comparatis, pro tempore Periodico elicuerimus conclusiones valde inter se conspirantes, istae conclusiones prorsus erroneae sint et omni verisimilitudine destituantur. Siquidem autem hoc esset, ipsae obseruationes grauissimorum errorum incusari deberent, quod quum pleraeque earum saepius repetitae habeantur, et ab Astronomo sollertissimo institutae sint, omnino ne suspicari quidem fas est.

§. 19. Elementa ex decem prioribus combinationibus elicita, tam egregie inter se consentiunt, vt vix maior consensus desiderari debeat, vnde his Elementis tanto certior conciliatur fides; hunc autem consensum inde potissimum deriuandum esse censemus, quod portio orbitae, quae heic in computum venit, valde magna sit, dum adeo 170° anomaliae complectatur; vnde omnino fieri necesse est, vt omnes valores parametri, excentricitatis et reliquorum Elementorum, cum tanto maiori exactitudine elicitae fuerint. Praeterea ipsa Methodus, qua per falsas positiones, veri valores pro loco Nodi et inclinatione orbitae determinantur, hoc in casu rite procedit; quia diuersis hypothesibus propositis, Longitudinum Nodi et inclinationum orbitae, secundum progressionem Arithmeticam procedentium, etiam

Ele-

Elementa orbitae his hypothefibus accommodata fere fecundum progreffionem Arithmeticam procedunt; ita vt fi exacte cognofcantur locus Nodi et inclinatio orbitae, reliqua Elementa his conformiter, faltem fine metu fenfibilis erroris, determinentur. Sic quum pro combinatione noftra claffis prioris quarta, hypothefes quatuor priores pro Log. Semiparametri dent valores fequentes:

0,0880654; 0,0839740; 0,0798597; 0,0757719

qui proxime progreffionem Arithmeticam fequuntur; facile perfpicitur pro Longitudine Nodi $10^{s.} 11^{\circ}. 30'$ et inclinatione orbitae $1^{\circ}. 35'. 0''$, quae pofitio hypothefibus fecundae et tertiae, praecife medio interiacet, fine fenfibile errore Logar. Semiparametri ftatui poffe = 0,0819168.

§. 20. Quoniam vis Methodi noftrae in eo confiftit, vt illi valores pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae veritati conformes effe cenfeantur, quibus adhibitis expreffiones pro tempore Perihelii ex tribus obferuationibus deductae prorfus redduntur confpirantes; dubium vtique videri poffet, an haec Methodus rite adhibeatur, iis in cafibus, dum Cometa tam prope ad tellurem accedit, vt ob actionem telluris motus Cometae aliquantam fubire potuerit perturbationem; tum enim fieri poteft, vt illae obferuationes, quae huic perturbationi anteriores funt, aliud exhibere debeant tempus Perihelii, quam obferuationes, quae perturbatione iam ceffante factae funt; verum tamen quum haec perturbatio eius effe poffit indoles, vt tam diu motum Cometae tantum afficiat, ac actio telluris in eum fenfibilis fit, caeterumque Cometae loca ante et poft hanc perturbationem vix fenfibili modo differre poffint, ab illis, in quibus Cometa verfaretur, fi actio telluris nulla effet; fieri vtique poteft, vt tempus Perihelii ex vtriusque generis obferuationibus non multum reperiatur difcrepans. Dein-

de quum calculo hoc ſuſcepto nondum euidenter eſſe potuerimus conuicti, Cometam hunc a Tellure aliquam perturbationem paſſum fuiſſe, calculus noſter ſaltem inſeruiet ad oſtendendum quaenam locum haberent Elementa, ſi perturbatio iſta prorſus nulla eſſet. Denique ſi ex Elementis noſtris, per decem combinationes poſteriores determinatis, reperiantur pro loco Nodi et inclinatione orbitae, valores eodem modo determinati, ac in Elementis prioribus; Elementa iſta priora, ſaltem pro valoribus ſemiparametri, Excentricitatis et tempore Periodico, proxime veritati erunt conſentanea. Et quod praeprimis vltimum hoc Elementum attinet, modo innotuerit, valores pro loco Nodi et inclinatione orbitae inter Hypotheſes noſtras ſecundam et tertiam reperiri, calculi iſti priores declarabunt quibus limitibus hoc tempus Periodicum comprehenditur.

§. 21. Elementa ex decem combinationibus noſtris poſterioribus elicita, non quidem aeque bene inter ſe conſpirant, ac illa quae ex prioribus combinationibus deducuntur; nec tamen eorum diſſenſus tantus eſt, vt impedire queat, quin media ex his Elementis ſumta proxime veritati conſentanea habeantur. Quod autem hic maiores diſcrepantiae prodierint, fieri neceſſum erat, quia portio orbitae inter obſeruationes in his combinationibus adhibitas, angulum anomaliae vix 90° gradibus maiorem excipiat; indeque etiam ſit, vt valores ſemiparametri, Excentricitatis et reliquorum Elementorum, qui in his calculis pro ſingulis hypotheſibus reperiuntur, non amplius in progreſſione Arithmetica procedant, ita vt noſtra procedendi ratio pro determinandis Elementis, pro caſu praeſenti tantam exactitudinem non praebeat ac pro prioris generis combinationibus. Sic ex: cauſſa pro combinatione huius claſſis prima, quatuor hypotheſes priores dant hos pro ſemiparametro Logarithmos:

0,085

0,0854290; 0,0855435; 0,0823411; 0,0774660, qui multum a progressione Arithmetica abludunt. Fieri igitur vtique potest, vt valores reliquorum Elementorum, in nostra Tabula valoribus loci Nodi et inclinationes accommodati, non prorsus exacte se habeant, et licet forsan quodam artificio interpolatio huic instituto accommodata inueniri potuerit; tamen hanc operam suscipere minime necessarium duximus, quia hisce calculis nihil amplius intendimus, quam vt pro loco Nodi et inclinatione orbitae valores proxime veros detegeremus. Huius autem voti compotes nos factos fuisse, vix dubium esse potest, si perpendatur omnem incertitudinem quae circa locum Nodi, se prodit, in prioribus calculis vix vnum gradum supergredi, in posterioribus autem 36 minuta prima non excedere; vnde tuto colligi posse videtur medios valores allatos, haud vltra 5, aut ad summum 10 minuta prima, esse incertos. Idem iudicium de val ribus pro inclinatione orbitae locum habet, vbi in prioribus calculis summa discrepantia est 1'. 50'' et pro posterioribus 3 minutorum; caeterum si semel locus nodi bene constitutus fuerit, inclinatio orbitae ex ipsis obseruationibus colligi potest, vti mox ostendemus.

§. 22. Vtcunque autem minus exacte determinata haberentur reliqua Elementa ex decem posterioribus combinationibus deriuata, id tamen dubium valores Temporis Periodici vix tangit; quippe quum pro diuersis hypothesibus, hi valores non admodum discrepantes reperiantur; sic pro combinatione prima huius classis, quatuor priores hypotheses, pro Tempore Periodico sequentes dant valores:

Anni 7, 5; 6, 8; 5, 6; 4, 6,

quatuor autem posteriores: 3, 3; 4, 2; 4, 2; 3, 8.

Eadem ratione combinatio sexta, hos praebet valores octo hypo-

hypothesibus accommodatos: 6, 1; 7, 0; 6, 8; 6, 4,
4, 7; 5, 5; 5, 8; 5, 6.

Hinc igitur patet, modo locus Nodi et inclinatio proxime innotescant, de Tempore Periodico vix vllum esse dubium. At haec iterum Elementa tanto certius determinabuntur, quo maiores adsunt differentiae inter expressiones pro tempore Perihelii singulis hypothesibus accommodatas, id quod denuo exemplo combinationis primae illustrabimus:

Expressiones pro tempore Perihelii:

ex obseruatione

I. Aug.	12, 6028;	13, 4652;	14, 0339;	14, 3931
II.	10, 7176;	12, 6823;	14, 1755;	15, 3772
III.	9, 4561;	12, 3959;	14, 6165;	16, 3997

et ex quatuor hypothesibus posterioribus:

per obseruationem

I. Aug.	6, 1773;	10, 3918;	11, 8805;	12, 8235
II.	6, 6760;	10, 2983;	12, 4281;	13, 9736
III.	0, 5657;	8, 8989;	12, 1642;	14, 5065

ex quibus omnino liquet, positionem veritati consentaneam inter hypothesem secundam et tertiam reperiri.

§. 23. Supposito igitur quod Longitudo Nodi descendentis sit $10^{s}.\ 12^{\circ}.\ 20'$, ex calculis nostris inclinatio orbitae inter $1^{\circ}.\ 34'$ et $1^{\circ}.\ 34'.\ 50''$ contineri videbatur; vt vero adhuc certiores de hoc Elemento euaderemus, per Methodum §. 13. descriptam, explorare constituimus, quaenam inclinatio propositae Longitudini Nodi responderet. Hunc in finem adhibuimus obseruationes diebus 3 et 4 Augusti institutas, tumque inuenimus, propositis locis terrae, inclinationes planorum per Solem, Terram et Cometam transeuntium, se habere vt sequitur:

Long.

Long. terrae.		Inclin. Plani.	Hinc pro Long. terrae.
Pro 3 Aug.	10ˢ. 11°. 39′. 36″	1°. 31′. 40″.	10ˢ. 12°. 20′ Inclinatio.
	11. 39. 47	1. 31. 58	1°. 35′. 5″
Pro 4 Aug.	12. 34. 45	1. 36. 16	1. 34. 3
	12. 35. 25	1. 36. 31	1. 34. 18
	12. 36. 3	1. 36. 47	1. 33. 54
	12. 36. 35	1. 35. 6	1. 35. 10
	12. 37. 39	1. 35. 29	1. 35. 22
			1. 35. 36
			1. 33. 53
			1. 34. 11
			Med. 1. 34. 37

Vbi valores inclinationis allati per interpolationem obſeruationum diebus 3 et 4 Aug. factarum, ſingulas binas earum inter ſe combinando, eliciuntur. Nunc itaque ſatis tuto concludere poſſe exiſtimauimus, inclinationem orbitae, quae loco Nodi 10ˢ. 12°. 20′ reſpondet, ſine ſenſibili errore ſtatui poſſe 1°. 34′. 30″, quibus ideo Elementis deinde in reliquis calculis vſi ſumus.

§. 24. Poſtquam bina Elementa, pro ſitu plani in quo Cometa motum ſuum peragit, fuerint determinata, ad indaganda reliqua elementa, quae ipſam naturam orbitae in iſto plano deſcriptae reſpiciunt, Methodis ab illa, qua hactenus vſus eram, paulo diuerſis, vtendum eſſe exiſtimaui; cognitis nimirum binis Elementis modo dictis, binae ſufficient obſeruationes ad reliqua Elementa inueſtiganda. Pro hoc igitur inſtituto, primum obſeruationes ab initio primae apparitionis noſtri Cometae factas, cum illis quae diebus 29 Sept. 1 et 2 Oct. inſtitutae ſunt, comparandas eſſe cenſui. Quum itaque ex Longitudine Nodi et inclinatione orbitae cognitis, pro vnaquaque Cometae obſeruatione, eius elongatio a Nodo et diſtantia a Sole facili computo eliciatur; iam binas adhibendo obſeruationes, habebimus cognita differentiam anomaliarum, vt et diſtan-

 tias

tias a Sole, quare ſi inſuper diſtantia Perihelii fuerit data, ipſa orbita Cometae perfecte habebitur determinata; tum autem ſi haec diſtantia Perihelii non prorſus exacte fuerit ſuppoſita, eius correctio ita inſtituenda eſt, vt tempus Perihelii ex binis obſeruationibus, idem prodeat. Potuiſſet quidem aliud quoque elementum orbitae heic pro cognito aſſumi, verum praeſens quidem caſus praeprimis requirere videbatur, vt diſtantia Perihelii eligeretur, ſiquidem obſeruationes, quae inter ſe comparantur, vtrinque fere 90° a Perihelio diſſitae ſunt.

§. 25. Deinde comparationem inſtituendam eſſe exiſtimaui, obſeruationum prope ipſum tempus Perihelii factarum, cum illis quae diebus 29. Sept. 1 et 2 Octob. inſtitutae ſunt; vbi quum iterum pro binis locis Cometae, haberentur diſtantiae a Sole et angulus illis interceptus, ſi inſuper Excentricitas cognoſcatur, orbita Cometae omnino erit determinata. Heic autem excentricitatem praecipue pro Elemento cognito habendam cenſui, quia neque Semiparameter nec diſtantia Perihelii, cum aliquo commodo pro cognitis haberi poſſent. Nam in obſeruationibus prope Perihelium factis, diſtantia Cometae a Sole parum a diſtantia Perihelii differt, tumque iterum pro angulis anomaliae ad 90° vergentibus diſtantia a Sole cum ſemiparametro redditur congruens; vnde ſi in obſeruationibus minimi errores ſint commiſſi, inſignes producere poterunt aberrationes, ſi Elementum pro cognito habeatur, quod proxime conſentit cum illis, quae per obſeruationes habentur data. Caeterum alia occaſione, harum disquiſitionum enucleationem in his actis proponere licebit, nunc quidem ſuffecerit breuem earum ideam, noſtro propoſito conuenientem tradidiſſe.

§. 26. Quoniam valde operoſum fuiſſet, ſi calculos iuxta Methodos iam commemoratas ad finem perduxiſſem,

pro

pro meo instituto sufficere existimaui, si vtriusque generis calculos inter se compararem, vt ea ratione valores proxime veros, pro Elementis orbitae, semiparametro, distantia Perihelii et elongatione Perihelii a Nodo elicerem. Quum igitur in calculis posterioris generis, binis hypothesibus excentricitatis, eorum Logarithmis existentibus 9, 887; 9, 897, vsus fuissem et ex octodecim combinationibus, hos pro distantia Perihelii elicuissem Logarithmos:

I. Hyp.	II. Hyp.	I. Hyp.	II. Hyp.
9, 8310	9, 8311	9, 8308	9, 8306
9, 8310	9, 8311	9, 8282	9, 8280
9, 8310	9, 8311	9, 8282	9, 8280
9, 8317	9, 8318	9, 8310	9, 8311
9, 8310	9, 8309	9, 8310	9, 8311
9, 8310	9, 8309	9, 8284	9, 8283
9, 8284	9, 8283	9, 8284	9, 8283
9, 8284	9, 8283	9, 8299	9, 8305
9, 8308	9, 8306	9, 8299	9, 8305

medio sumto pro vtraque hypothesi Logarithmus distantiae Periheliae inuenietur 9,8300, quem igitur saltem haud multum erroneum vel inde concludere potui, quia immediate pro obseruationibus diebus 11, 12 et 14 Aug. id est proxime circa tempus Perihelii institutis, habeantur Logarithmi distantiarum Cometae a Sole 9, 8289; 9, 8312; 9, 8311; ita vt Logarithmus distantiae Periheliae certe inter hos limites 9, 829 et 9, 831 concludatur. In prioribus igitur calculis, quum binae essent constitutae hypotheses pro distantia Perihelii, Logarithmis existentibus 9, 829 et 9, 830; nunc adhibendos esse censui angulos anomaliarum quae obseruationibus d. 29 Sept. 1 et 2 Octob. factis ex posteriori hypothesi responderent, quorum sequentes habebantur valores:

 pro

pro 29 Sept.	pro 1 Octob.	pro 2 Octob.
80°. 22'. 16"	81°. 58'. 27"	82°. 25'. 13"
80. 24. 36	82. 2. 2	28. 54
80. 20. 51	81. 56. 1	22. 45
	81. 54. 30	21. 17
Med. 80. 22. 34	Med. 81. 57. 43	82. 24. 32

§. 27. Hinc pro Logarithmo semiparametri, posito Logarithmo distantiae Periheliae 9, 830 ex prioris generis calculis sequentes habentur valores:

0, 0812	0, 0814	0, 0811	0, 0811
0, 0812	0, 0808	0, 0809	0, 0803
0, 0813	0, 0813	0, 0810	0, 0814
0, 0814	0, 0812	0, 0805	0, 0806
0, 0814	0, 0811	0, 0804	0, 0810

ex quibus medius est 0, 0810. Tum vero adhibitis pro 29 Sept. 1 et 2 Octob. anomaliis supra allatis, calculi posterioris generis pro Logarithmo semiparametri valores praebent sequentes:

29 Sept.	1 Oct.	2 Oct.
0, 0810	0, 0806	0, 0806
	0, 0805	0, 0807
	0, 0806	0, 0813
	0, 0814	0, 0806
	0, 0808	0, 0810
	0, 0816	0, 0809
	0, 0810	

inter quos medius valor est 0, 0809.

§. 28. Deinde pro inuenienda elongatione Perihelii a Nodo, iterum duplici argumento vsi sumus, primum etenim in calculis prioris generis, elongationes locorum Cometae a Nodo, pro obseruationibus dierum 15, 17, 22 et 29 Iunii, comparaui cum angulis anomaliarum ex calculo deductis; subtracta scilicet elongatione Cometae a Nodo ab anomalia, remanebit elongatio Nodi a Perihelio; conclusiones hoc modo inuentas sequens Schema indicat:

Elong.

Elong. Com. a ☋:	pro 15 Iunii. 46°. 17'. 45''	17 Iunii. 44°. 47'. 54''	22 Iunii. 40°. 42'. 14''	29 Iunii. 34°. 12'. 7''
Anom:	90. 23. 8	88. 49. 14	84. 41. 13	78. 8. 30
	90 22. 53	88. 50. 18	84. 42. 12	78. 9. 38
	90. 21. 56	88. 50. 41	84. 43. 26	
	90. 20. 56	88. 51. 34	84. 40. 41	
	90. 26. 51	88. 48. 27	84. 47. 47	
	90. 21. 30	88. 55. 39		
	90. 20. 29			

Hinc elicientur pro elongatione ☋ a Perihelio isti valores:

44°. 5'. 23''	44°. 1'. 20''	43°. 58'. 59''	43°. 56'. 23''
5. 8	2. 24	43. 59. 58	43. 57. 31
4. 11	2. 47	44. 1. 12	
3. 11	3. 40	43. 58. 27	
9. 6	0. 33	44. 5. 33	
3. 45	7. 45		
2. 44			

inter quos medius valor est circiter 44°. 2'. 30'', quem tamen iusto maiorem esse existimamus. Ex secundi generis calculis, posito quod anomaliae pro 29 Sept. 1 et 2 Oct. supra determinatae rite se habeant, primum inuenientur anomaliae pro obseruationibus dierum 10, 11, 12, 14, 15 etc. Aug., siue proxime circa ipsum tempus Perihelii factis; tum vero datis quoque Elongationibus Cometae a nodo, quae his obseruationibus competunt, habebuntur valores pro elongatione Perihelii a nodo sequentes:

10 Aug.	44°.0'.32''	11 Aug.	44°.1'.55''	14 Aug.	44°.1'. 4''	19 Aug.	44°.0'.42''
	44. 1. 53		44. 0. 40		44. 0. 30		44. 1. 53
					44. 1. 53		
10 Aug. (β)	44. 0. 34	12 Aug.	44. 0. 42	15 Aug.	44. 0. 40		
	44. 1. 53		44. 1. 53				

 inter-

inter quos valor medius est circiter 44°. 1'. 12'', quem iam propius ac priorem ad veritatem accedere, eo magis persuasi sumus, quod valores ex quibus elicitus est, multo melius inter se conspirent, ac illi quorum ope priorem deduximus.

§. 29. Si Logarithmus semiparametri statuatur 0, 0810 et Logarithmus distantiae Periheliae 9, 830, fiet Logarithmus excentricitatis 9, 8934; caeterum ex calculis nostris prioribus pro hypothesi secunda vbi Logarithmus distantiae Periheliae = 9, 830, medio ex viginti conclusionibus sumto, habebitur Logarithmus excentricitatis 9, 8937, qui certe cum priori egregie consentit, ideoque calculis nostris confirmandis inseruit. Interim tamen omnes has conclusiones supra adductas, de valoribus Semiparametri, distantiae Periheliae et elongationis Perihelii a Nodo, vti approximationes tantum ad veritatem considerandas esse censui, earumque debitas correctiones inueniri posse, dum modi tententur, quibus obseruationes tam mense Iunii, quam mense Augusti et diebus 29 Sept. 1 atque 2 Octob. ita reddantur consentientes, vt idem praebeant tempus Perihelii.

§. 30. Primis igitur tentaminibus hunc in finem institutis, supposui Logarithmos distantiae Periheliae et Semiparametri, vti modo inuentae sunt, tumque inueni obseruationibus mense Iunii et ad finem secundae apparitionis factis, simul satis bene satisfieri, si ponatur elongatio Perihelii a ☊ 43°. 59'. 0'' et Tempus Perihelii Aug. 13, 75, nec non obseruationes mense Iunii cum illis, quae circa Perihelium institutae sunt conciliari, posita elongatione 44°. 1'. 0'' et tempore Perihelii Aug. 13, 80. Verum obseruationes prope ipsum Perihelii mense Augusti factas, animaduerti non adeo bene cum obseruationibus ad finem Septembris et initio Octo-

Octobris institutis conciliari, nisi Semiparameter diminuatur, hinc in vlterioribus tentaminibus supposui eius Logarithmum = 0, 0808 manentibus valoribus pro Logarithmo distantiae periheliae, elongatione Perihelii a Nodo et posito tempore Perihelii Aug. 13, 75. His Elementis adhibitis obseruationibus secundae apparitionis a 2 Aug. vsque ad 2 Octobris ita quidem satisfieri obseruaui, vt nullibi errores obseruationum pro Longitudine $4\frac{1}{2}$ Minuta prima excederent; quum tamen hi errores tantum non omnes eiusdem essent denominationis, et prope finem Augusti maximi euaderent, ad eos diminuendos, multum conducere perspexi, si distantia perihelii aliquantum diminueretur. Vno igitur et altero tentamine facto, vidi obseruationes supra dictas inter se egregie conciliari, si pro Cometa nostro sequentia adhibeantur Elementa:

I. Long. ☊ = $4^{s.}\ 12^{\circ}.\ 20'$
II. Inclin. Orbitae = $1^{\circ}.\ 34'.\ 30''$
III. Log. Semipar. = 0, 0808000
IV. Log. Distant. Perih. = 9, 8296000
V. Log. Excentric. = 9, 8938725
VI. Elongat. Perih. a ☊ = $43^{\circ}.\ 59'.\ 40''$
VII. Tempus Perihelii Aug. 13, 6950.

Tempus Periodicum = 5, 4992 Anni seu proxime $5\frac{1}{2}$ Anni. Tum vero erunt Logarithmi semiaxium principalis et coniugatae 0, 4935397; 0, 2871698.

§. 31. His constitutis Elementis, comparationem inter loca Cometae ex Theoria deducta et obseruata, sequens Tabula demonstrat:

Temp.

Temp. med. Parisin.	Long. Com. obseruat.	Long. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Aug. 2.15°. 3'.15"	3ˢ.6°. 2'.32"	3ˢ.6°. 2'.57"	+25"	50'. 7"	−37"
15. 39. 12	- - 2. 58	- - 3. 30	+32	50. 21	−45
3.14. 45. 9	- - 25. 15	- - 25. 17	+ 2	53. 36	−48
15. 19. 43	- - 25. 41	- - 25. 52	+11	52. 56	− 3
15. 24. 9	- - 25. 50	- - 25. 56	+ 6	53. 6	−13
4.14. 12. 48	- - 47. 24	- - 48. 25	+1'. 1	55. 44	+ 4
14. 21. 52	- - 48. 43	- - 48. 34	− 9	56. 27	−38
14. 38. 22	- - 49. 0	- - 48. 50	−10	56. 36	−44
14. 54. 12	- - 49. 14	- - 49. 5	− 9	56. 46	−53
15. 7. 35	- - 49. 36	- - 49. 17	−19	55. 46	+ 9
15. 33. 8	- - 50. 8	- - 49. 43	−25	55. 59	− 1
5.14. 38. 43	- 7. 13. 51	- 7. 13. 35	−16	59. 17	−37
14. 55. 3	- - 14. 28	- - 13. 53	−35	59. 26	−44
15. 13. 28	- - 14. 21	- - 14. 17	− 4	59. 31	−47
15. 28. 24	- - 14. 43	- - 14. 33	−10	59. 19	−24
6.14. 29. 42	- - 39. 25	- - 39. 9	−16	1°. 1. 18	− 2
14. 45. 26	- - 39. 48	- - 39. 25	−23	- 1. 12	+ 5
15. 0. 5	- - 40. 8	- - 39. 42	−26	- 1. 41	−22
7.14. 49. 19	- 8. 6. 40	- 8. 6. 16	−24	- 3. 35	+ 2
14. 56. 9	- - 6. 50	- - 6. 23	−27	- 3. 48	−10
8.14. 20. 13	- - 33. 29	- - 33. 18	−11	- 6. 36	−54
14. 20. 29	- - 34. 14	- - 33. 18	−56	- 6. 38	−56
14. 51. 12	- - 34. 13	- - 33. 57	−16	- 6. 40	−57
15. 10. 28	- - 34. 49	- - 34. 21	−28	- 6. 43	−59
9.14. 48. 10	- 9. 4. 30	- 9. 2. 38	−1. 52 *	- 9. 33	−1'.48 *
10.14. 14. 27	- - 32. 36	- - 32. 11	−25	- 9. 13	+14
14. 21. 43	- - 32. 42	- - 32. 20	−22	- 9. 13	+15
14. 30. 23	- - 32. 42	- - 32. 32	−10	- 9. 18	+11
14. 39. 32	3. 9. 32. 57	3. 9. 32. 44	−13	1. 9. 24	+ 5
46. 16	- - 32. 17	- - 32. 53	+36	- 10. 4	−34

Temp.

Temp. med. Parisin.	Longit. Com. obseruat.	Longitud. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Aug. 10. 15h. 5'. 49'	3s. 9°. 33'. 9"	3s. 9°. 33'. 10	+ 1"	1°. 9'. 46	−15"
19. 55	- - 33. 52	- - 33. 35	−17	- 9. 27	+ 5
11. 14. 23. 23	- 10. 3. 2	- 10. 2. 20	−42	- 10. 51	+13
31. 49	- - 3. 18	- - 2. 30	−48	- 10. 55	+ 9
45. 6	- - 3. 54	- - 2. 48	−1'. 6	- 12. 13	−1' 8
54. 20	- - 4. 9	- - 3. 0	−1. 9	- 12. 12	−1' 7
12. 14. 46. 25	- - 34. 48	- - 34. 17	−31	- 12. 52	−28
15. 9. 4	- - 35. 52	- - 34. 48	−1. 4	- 13. 13	−48
15. 27. 46	- - 35. 56	- - 35. 12	−44	- 12. 21	+ 6
15. 30. 25	- - 35. 46	- - 35. 16	−30	- 13. 32	−1' 5
14. 14. 37. 29	- 11. 40. 25	- 11. 39. 49	−36	- 15. 25	−35
58. 39	- - 40. 45	- - 40. 18	−27	- 15. 29	−38
15. 18. 39	- - 40. 40	- - 40. 47	+ 7	- 15. 32	−40
28. 39	- - 40. 55	- - 41. 0	+ 5	- 15. 38	−45
15. 15. 43. 33	- 12. 14. 56	- 12. 14. 45	−11	- 16. 43	−47
56. 37	- - 15. 26	- - 14. 55	−31	- 16. 45	−49
16. 4. 32	- - 15. 56	- - 15. 14	−42	- 16. 46	−49
18. 14. 24. 32	- 13. 59. 24	- 13. 58. 24	−1. 0	- 18. 35	−19
14. 43. 23	- 14. 0. 5	- - 58. 52	−1. 13	- 18. 41	−25
15. 4. 7	- - 0. 57	- - 59. 24	−1. 33	- 18. 55	−38
19. 14. 33. 18	- - 36. 3	- 14. 35. 8	−55	- 19. 18	−26
14. 57. 41	- - 36. 41	- - 35. 50	−51	- 19. 28	−35
26. 15. 39. 38	- 19. 3. 44	- 19. 2. 4	−1. 40	- 20. 45	+12
16. 16. 4	- 4. 4	- - 3. 1	−1. 3	- 20. 56	+ 1
28. 14. 44. 8	- 20. 19. 42	- 20. 18. 24	−1. 18	- 20. 55	+ 6
15. 8. 38	- - 20. 40	- - 19. 2	−1. 38	- 21. 4	− 3
29. 15. 21. 53	- 21. 0. 3	- - 58. 27	−1. 36	- 20. 5	+55
15. 43. 31	- - 0. 38	- - 59. 1	−1. 37	- 20. 41	+19
16. 3. 59	- - 1. 26	- - 59. 34	−1. 52	- 20. 40	+20
16. 25. 17	- - 2. 8	- 21. 0. 11	−1. 57	- 20. 39	+21

Temp. med. Parisin	Longit. Com. obseruat.	Longit. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Aug. 30. 14ʰ. 48′. 22	3ˢ. 21°. 39′. 12″	3ˢ. 21°. 36′. 39″	− 2′. 33″	1°. 20′. 56″	+ 0″
15. 6. 15	- - 40. 5	- - 37. 9	− 2. 56	- 20. 58	− 2
15. 26. 31	- - 40. 27	- - 37. 42	− 2. 45	- 21. 0	− 4
31. 14. 38. 25	- 22. 17. 16	- 22. 15. 42	− 1. 34	- 20. 23	+ 26
15. 19. 4	- - 18. 16	- - 16. 33	− 1. 43	- 20. 25	+ 24
Sept. 4. 15. 5. 20	- 24. 52. 41	- 24. 51. 32	− 1. 9	- 19. 23	+ 42
15. 15. 42	- - 53. 11	- - 51. 48	− 1. 23	- 19. 25	+ 40
15. 32. 12	- - 53. 41	- - 52. 16	− 1. 25	- 19. 31	+ 34
- 48. 29	- - 53. 56	- - 52. 42	− 1. 14	- 19. 34	+ 31
16. 11. 28	- - 54. 11	- - 53. 19	− 52	- 19. 53	+ 11
5. 14. 48. 37	- 25. 31. 7	- 25. 29. 34	− 1. 33	- 19. 45	+ 4
15. 2. 43	- - 31. 7	- - 29. 57	− 1. 10	- 19. 43	+ 6
- 14. 55	- - 31. 25	- - 30. 17	− 1. 8	- 19. 44	+ 5
8. 15. 57. 4	- 27. 26. 32	- 27. 25. 35	− 57	- 18. 23	+ 33
16. 5. 45	- - 26. 47	- - 25. 48	− 59	- 18. 24	+ 32
9. 15. 6. 30	- 28. 3. 19	- 28. 1. 44	− 1. 35	- 18. 22	+ 19
- 22. 5	- - 3. 34	- - 2. 10	− 1. 24	- 18. 23	+ 18
- 37. 23	- - 3. 34	- - 2. 34	− 1. 0	- 18. 24	+ 16
10. 16. 26. 23	- - 40. 26	- - 41. 14	+ 48 *	- 19. 4	− 40 *
14. 14. 16. 26	4. 1. 4. 36	4. 1. 3. 45	− 51	- 16. 18	+ 36
14. 33. 47	- - 5. 17	- - 4. 11	− 1. 6	- 16. 22	+ 32
15. 0. 21	- - 6. 6	- - 4. 54	− 1. 12	- 16. 23	+ 30
- 42. 21	- - 7. 7	- - 5. 59	− 1. 8	- 16. 25	+ 27
17. 15. 53. 3	- 2. 52. 40	- 2. 51. 32	− 1. 8	- 14. 52	+ 51
16. 5. 15	- - 52. 55	- - 51. 49	− 1. 6	- 14. 52	+ 51
- 13. 53	- - 53. 10	- - 52. 2	− 1. 8	- 14. 53	+ 50
18. 15. 30. 16	- 3. 26. 57	- 3. 25. 29	− 1. 28	- 14. 58	+ 23
- 56. 5	- - 27. 27	- - 26. 8	− 1. 19	- 15. 0	+ 21
16. 9. 58	- - 27. 42	- - 26. 27	− 1. 15	- 15. 2	+ 19

Temp.

Temp. med. Parisin.	Longit. Com. obseruat.	Longit. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Sept. 19. 15h. 19′. 4″	4s. 4°. 0′. 32″	4s. 3°. 59′. 6″	— 1′. 26″	1°. 13′. 2″	+ 1′. 54″
- 29. 50	- - 0. 47	- - 59. 21	— 1. 26	- 13. 2	+ 1. 54
20. 15. 33. 45	- - 34. 17	- 4. 32. 57	— 48	- 12. 35	+ 2. 9
29. 15. 23. 51	- 9. 14. 54	- 9. 15. 8	+ 14	- 10. 16	+ 37″
15. 37. 50	- - 14. 54	- - 15. 25	+ 31	- 11. 35	— 42
16. 39. 30	- - 15. 54	- - 16. 39	+ 45	- 10. 53	— 1
Oct. 1. 15. 23. 22	- 10. 12. 6	- 10. 13. 4	+ 58	- 9. 51	+ 16
16. 33. 22	- - 13. 54	- - 14. 14	+ 20	- 10. 4	+ 1
2. 15. 43. 37	- - 40. 51	- - 41. 29	+ 38	- 10. 4	— 23
16. 38. 50	- - 41. 52	- - 42. 31	+ 39	- 10. 10	— 30

§. 32. Ex hac Tabula satis perspicitur, Elementa nostra adeo bene obseruationibus satisfacere, vt merito dubitare liceat, an maior consensus per alia quaecunque Elementa nostris aliquantum dissimilia obtineri queat. Pro Longitudine scilicet summus error nondum ad tria minuta prima assurgit, in Latitudine vero errores vix minutum primum excedunt; obseruatio enim die 9 Aug. instituta merito pro dubia haberi debet. Pro obseruationibus autem in prima Cometae apparitione factis, maiores quidem prodeunt dissensus, qui tamen si obseruationes diebus 29 Iunii, 1 et 3 Iulii institutas, exceperis, non omnino pro enormibus haberi debent, vti sequens Tabula declarat:

 Temp.

Temp. med. Parif.	Long. obferu.	Long. ex calc.	Differ.
Iunii 15.11"23'.22"	9ˢ. 2°.51'.49"	9ˢ. 2°.57'.46"	+ 5'. 57"
17.11.11.33	- - 59.58	- 3. 6.59	+ 7. 1
20.10.40.48	- 3.16.12	- 3.23. 6	+ 6.54
21.10.27.45	- - 23.17	- 3.28. 9	+ 4.52
22.12. 9.36	- - 33.43	- 3.40.38	+ 6.55
24.12. 3.18	- - 59.58	- 4. 7. 5	+ 7. 7
25.13.27.55	- 4.21.42	- 4.26. 4	+ 4.22
27.13.13.17	- 5.34.54	- 5.42.57	+ 8. 3
28.10.46.34	- 6.45.58	- 6.49.50	+ 3.52
29.11.59.26	- 9.42.45	- 9.40.31	− 2.14
30.12. 3.11	- 20.24.28	- 19. 8. 8	−1°.16'.20"
Iulii. 1.12. 3.23	1.25.41.48	1.20.51.27	−4.50.21
3.11. 3.45	2.29.16.22	2.27.18. 0	−1.58.22

Caeterum fateor pro his obferuationibus calculos a me obiter tantum effe inftitutos. exceptis obferuationibus dier. 15 et 29 Iunii, ita vt non pronunciare aufim differentias inter calculum et obferuationes tales praecife effe, quales haec Tabula exhibet; fcilicet pro meo inftituto fufficiebat, quod fatis liquido conftet obferuationes diem 29 Iunii praecedentes vix cum illis conciliari poffe, quae fiue hoc die, fiue poftmodum inftitutae funt. Sepofita autem confideratione vltimarum harum obferuationum, reliquae per menfem Iunii inftitutae, ad confenfum cum illis, quae fub fecunda Cometae apparitione factae funt, redigentur, dum elongatio Perihelii a nodo 30 aut 40 fcrupulis fecundis minuitur. Verum obferuatio diei 29 Iunii cum illa 15 Iunii, per mutationem quandam leuiorem fiue in loco Nodi, fiue in elongatione Perihelii a Nodo, non reddi poteft confentiens, nifi fatis quoque fenfibiles mutationes fufcipiantur cum femiparametro et diftantia Perihelii, tum vero vix am-

amplius ſpes eſſe videtur, vt obſeruationes ſecunda apparitione factae, impleantur. Hinc omnino praeſumere conuenit, obſeruationum pro diebus 30 Iunii 1 et 3 Iulii diſſenſum a calculo potiſſimum actioni telluris in noſtrum Cometam eſſe adſcribendum, nec alia ſane excogitari poteſt ratio adaequata, vnde errores tam enormes deriuari poſſent. Simul vero ac ſupponatur Cometae motum dictis diebus a tellure fuiſſe perturbatum, nihil plane neceſſe eſt, vt ſolliciti ſimus de componendis inter ſe obſeruationibus primae et ſecundae apparitionis, et tum quidem ſuffecerit Elementa detexiſſe, quibus poſterioris generis obſeruationes adimpleantur.

§. 33. Quum ſit ſemiaxis maior ellipſeos, in qua Cometam moueri inuenimus = 3, 115586 et diſtantia Perihelii 0, 675461, erit diſtantia Aphelii = 5, 555711, et excentricitas in partibus diſtantiae mediae Solis a Terra = 2, 440125; hinc perſpicitur Cometam noſtrum in Perihelio Soli eſſe propriorem, quam Planetam Venerem, longius autem remotum quam Mercurium; contra vero Cometa in aphelio exiſtens aliquantulo magis a Sole erit remotus quam Iupiter, ideoque orbita Cometae tota intra orbitam Saturni comprehendetur, vti viciſſim orbitam Mercurii includit, reliquorum autem planetarum orbitae, partim intra, partim extra ellipſin Cometae iacebunt. Angulus porro anomaliae a Perihelio computatus pro diſtantia media Cometae a Sole, erit $141°. 33'. 16''$ et tempus quod Cometa impendit ad deſcribendum hunc angulum a Perihelio erit 251, 77 Dier., quod ſi ſubtrahatur a ſemiſſi temporis Periodici 2, 7496 Annis, reſiduum dabit tempus quo Cometa a diſtantia media ad Aphelium pergit = 752, 53 Dier. Per aphelium vero Cometam noſtrum tranſiiſſe intelligitur, Anno 1767 die 13, 3964 Nouembris; exiſtente tum Longitudine eius $5^s. 26°. 19'$.

§. 34. Licet Cometa Anni 1770 non ſit ex eorum numero, qui in tranſitu per nodum telluri valde appropinquare poſſunt; tamen inter omnes hactenus obſeruatos Cometas, nullus eſt de quo conſtet, quod propius ad terram acceſſerit. Quum ſcilicet elongatio Perihelii a Nodo deſcendente ſit fere 44°, erit diſtantia Cometae a Sole in Nodo = 0, 77043, ideoque Cometa in Nodo ab orbita telluris ſatis erit remotus. At tamen quum inclinatio orbitae huius Cometae ad Eclipticam ſit adeo exigua, vt inter ipſos Planetas, praeter Iouem, quisquam non ſit, qui minorem habeat inclinationem orbitae, fieri vtique poteſt, vt hic Cometa interuallo a Nodo ſatis magno ad Telluris orbitam valde prope accedere queat; quod euenire neceſſe eſt, quando diſtantia Cometae a Sole aequalis ſit diſtantiae puncti correſpondentis in orbita terreſtri. Hinc quia Tempus Perihelii pro Cometa incidebat in 13, 69 Aug. 1770, inuenietur pro 1 Iulii eiusdem Anni angulus anomaliae 76° circiter graduum et diſtantia Cometae a Sole pro hac anomalia = 1, 0126, eodem vero tempore erat diſtantia Solis a Terra = 1, 0167, vnde iam ſtatim liquet Cometam proxime ad terram accedere debuiſſe, ſi haec Aſtra e Sole viſa tum temporis quoque in coniunctione fuerint. Erat vero Longitudo terrae $3^{s}. 10°$, ideoque elongatio terrae a Nodo e Sole viſa 31°. circiter, vnde quum elongatio Cometae ſupra habeatur 32°, iam perſpicue intelligitur huiusmodi propinquam coniunctionem Cometae et Terrae reapſe contigiſſe. Calculo autem inſtituto pro temporibus obſeruationum diebus 29, 30 Iunii 1 et 3 Iulii factarum, ſequentes inueni valores diſtantiarum Cometae a Terra:

29	Iunii	0, 026079	1	Iulii	0, 015601
30	-	0, 017699	3	-	0, 030906

proximam autem diſtantiam Cometae a Sole fuiſſe inueni = 0, 015379, ideoque 65 ciciter partem diſtantiae mediae Solis

Solis a Terra. Ideoque quum diſtantia haec media, poſita parallaxi Solis 8″, 63, ſit 23900,9 Semidiametrorum aequatoris terreſtris, habetur diſtantia Cometae proxima a Tellure = 367, 57 ſemidiametrorum terrae; parallaxis autem Cometae tum temporis erat 9′. 22″, denique diſtantia Cometae a Tellure non niſi ſex vicibus diſtantiam mediam Lunae a Terra ſuperabat.

§. 35. Per obſeruationem Cel. *Meſſier* die 2 Aug. inſtitutam de magnitudine huius Cometae iudicium ferri poteſt; inuenit enim Cel. hic Aſtronomus diametrum nuclei Cometae 45″, et quum Cometae diſtantia a tellure tum temporis eſſet 0, 3994 talium partium, qualium diſtantia media Solis a tellure ponitur pro vnitate, intelligitur diametrum Cometae ad diſtantiam huic mediae aequalem e terra viſam, aequari debere 18″, 1. Si itaque ponatur, parallaxis Solis pro diſtantia media 8″, 63, ideoque diameter terrae 17″, 26, perſpicitur hunc Cometam magnitudine ipſam tellurem noſtram aliquantum ſuperare; ſaltem quatenus huic obſeruationi fidem habere licet, de qua tamen omnimodam exactitudinem ſperare non fas eſt, ob nucleum Cometae non bene terminatum; quicquid autem ſit, ſufficit nobis quod ex hac obſeruatione cognoſcatur Cometam noſtrum magnitudine ipſam terram fere aequare.

§. 36. Singulares ſane et maxime memoratu dignae, iſtae ſunt proprietates noſtri Cometae, quod inclinationem orbitae minorem habeat, quam vllus alius reliquorum ſiue Cometarum, ſeu Planetarum, Ioue excepto, et quod ad ad Tellurem noſtram vicinior factus ſit, quam vllus reliquorum Cometarum, quorum Elementa per obſeruationes habentur cognita; verum enim vero quod huic Cometae prae reliquis praecipuum attentionis meritum conciliare

ciliare debet, eſt iſta inexſpectata omnino et mira eius proprietas, quod tam breue habeat tempus Periodicum, vt etiam citius ſuam reuolutionem circa Solem peragat, quam bini Planetarum, Iupiter et Saturnus, id quod ne ſpe quidem de quopiam Cometarum praeſumere licuiſſet. Confidimus ſane, nos in hac inueſtigatione tam caute proceſſiſſe, vt de Cometae Elementis nihil pronuntiare voluerimus antequam omnes et ſingulas circumſtantias, quae pro iis ſtabiliendis facere poſſent, penitius expenderimus; interim tamen ſi cuipiam videatur noſtra argumenta nondum plenam gignere poſſe conuictionem, ſaltem fatebitur illis meritum coniecturae valde veriſimilis non eſſe denegandum. Fatemur quidem id praeter omnem exſpectationem accidiſſe, vt Cometa tam breui tempore in orbem rediens, non niſi An. 1770 ſit obſeruatus, nec dubium grauiſſimum, quod inde contra determinationem Temporis Periodici peti poſſet, ſufficienter ſoluere nos poſſe, ſperamus; quum tamen haec res omnem Aſtronomorum attentionem mereatur, eam heic proponendam eſſe exiſtimauimus, eum in finem vt cum tempore veritas vel falſitas noſtrae diſquiſitionis innoteſcat.

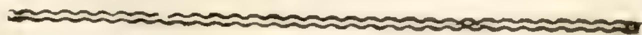
§. 37. Quum inueſtigationibus noſtris praecipue inſeruierint obſeruationes diebus 29. Sept. 1 et 2 Octob. inſtitutae, etiam illud dubium moueri poſſet, quod ſi his obſeruationibus grauiores ineſſent errores, noſtrae determinationes eo ipſo erroneae euaderent. Verum hic primum obſeruare conuenit, ſingulis iſtis diebus binas vel tres inſtitutas fuiſſe a Cel. *Meſſier* obſeruationes ſatis bene inter ſe conſentientes, ita vt vix credere fas ſit, fortuito euenire potuiſſe, vt ſingulae ſeptem obſeruationes eodem modo erroneae factae ſint; tum vero ſi loco harum obſeruationum illae adhibeantur, quae diebus 18, 19 vel 20 Sept.

inſti-

inſtitutae ſunt, certum eſt tempus Periodicum adhuc minus inueniri, ita vt concluſiones tum eo mineri probabilitate gauderent.

§. 38. Diximus inueſtigationem a nobis propoſitam, non niſi veriſimilitudine ſua ſe commendare, plena autem conuictio hoc in negotio obtinebitur, ſi demonſtrari potuerit, Elementis noſtris ita immutatis, vt tempus Periodicum maius euadat, obſeruationibus ſecundae apparitionis errores inſignes quinque vel plurium minutorum primorum induci; tum enim audacter ſtatuere licebit noſtra Elementa rite ſe habere, ſaltem quatenus obſeruationibus vllam habere liceat fidem. Huiusmodi autem diſquiſitionem nondum ſuſcipere mihi licuit, quam igitur ſi in poſterum exſecutus fuero, quae per eam mihi innotuerint, Aſtronomis communicare non intermittam. Interim veniam a lectoribus me petere fas eſt, quod in deſcribenda mea argumentandi ratione, nimis forſan prolixus fuerim, id autem eam ſolum ob cauſſam factum eſt, vt vnicuique pateret, hoc in negotio me nihil temere et praecipitanter ſtatuere voluiſſe.

§. 39. Denique iam e re quidem eſſet, vt oſtenderem qua ratione iſta coeli loca indicari queant, vbi Cometam quaerere neceſſe ſit in proximo eius ad Perihelium acceſſu, qui An. 1781 contingere deberet; verum quum diſquiſitio noſtra iam fere modum diſſertationis excedat, quae hac de re monenda ſunt, ſingulari Diſſertatione complecti animus eſt.



EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXVI.
SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1776.

Menſe	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Altitudo media
	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 75	6. } 8. } XI. p. m.	27. 52	24 IV. a. m.	1. 23	28. 13	28. 26
Februar.	28. 28	1. III. p. m.	27. 16	6. IX a. m.	1. 12	27. 72	27. 78
Mart.	28. 38	22. III. p. m.	27. 41	25 IV. a. m	0. 97	27. 89	27. 92
April.	28. 73	21. Meridie	27. 33	13 IV. a. m.	1 40	28. 03	28. 03
Maii	28. 53	1[illegible]. IX a. m.	27. 46	22 VIII. a. m.	1. 07	28 00	28. 06
Iunii	28. 38	10. IV. p. m	27. 62	26. Meridie	0. 76	2[illegible]. 00	[illegible]8. 04
Iulii	28. 35	26. IX. a. m	27. 75	10. I. a. m.	0. 60	28. 05	28. 07
Auguſt	28. 38	7. XI. a. m	27. 58	2[illegible]. V. a. m.	0. 80	27. 98	28. 0[illegible]
Sept.	28. 29	25. Meridie	27. 57	6. V. a. m	0. 72	27. 93	[illegible]8. [illegible]0
Octobr.	28. 78	24. Meridie	27. 16	10. VIII a. m.	1. 62	27. 97	8. 26
Nouembr.	28. 87	12. IX. a. m	27. 02	21 } 22. } media nocte	1. 85	27 94	28. 15
Decembr.	28. 83	1. III. p. m	27. 51	24. III. a. m.	1. 32	28. 17	[illegible]8 07
Anno 1776.	28. 87	Nouembr.	27. 02	Nouember	1. 85	27. 94	28. 06

2. Nume-

2. Numerus dierum, quibus altitudo barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	ſupra 27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	16. 6	18. 15	22. 18	26. 12	28. 0	28. 25
Febr.	0. 12	3. 12	6 3	11. 15	15. 0	27. 81
Mart.	3. 12	7. 15	12. 0	17. 18	20. 15	27. 95
April.	8. 21	10. 0	13. 9	18. 15	22. 15	27. 97
Maii	9. 0	14. 12	20. 6	24. 0	25. 12	28. 08
Iunii	5. 18	14. 0	19. 18	22. 6	25. 21	28. 08
Iul.	6. 12	12. 9	20 15	27. 18	30. 6	28. 05
Aug.	7. 12	10. 15	17. 15	23. 6	25. 15	28. 02
Sept.	3. 0	9. 15	16. 21.	22. 3	26. 0	28. 02
Oct.	18. 9	22. 21	24. 18	26. 9	27. 0	28. 33
Nou.	16. 9	18. 18	19. 18	20. 21	22. 9	28. 28
Dec.	7. 12	12. 9	17. 3	22. 3	26. 6	28. 03
Anno 1776.	103. 3	154. 21	211. 0	263 6	295. 3	28. 02

Notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros deſignare, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m, verum *poſt meridiem.*

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima Barometri 28. 87: menſe Nouembris die 12 hora ante meridiana 9. Thermom. Deslisl. 170. Coelum ſerenum; malacia.
2. Altitudo Barometri minima 27. 02: itidem menſe Nouembris die 21 media nocte, Thermom. Deslisl. 151. Coelum obductum, nix copioſa, et ventus SO.

3. Variatio maxima 1. 85 vel 1 $\frac{85}{100}$ poll.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27. 94.

5. Altitudo barometri media inter omnes obſeruatas, ſeu ſumma omnium altitudinum per numerum earum diuiſa 28. 06; quae notabiliter minor eſt illis, quas praeteritis annis eruimus.

6. Ex ſecunda tabula patet, mercurium in tubo barometri ſe ſuſtentaſſe ſupra

28 $\frac{20}{100}$ poll. per dies 103$\frac{1}{8}$
28 $\frac{10}{100}$ poll. per dies 154$\frac{7}{8}$
28. poll. per dies 211
27 $\frac{90}{100}$ poll. per dies 263$\frac{1}{4}$
27 $\frac{80}{100}$ poll. per dies 295$\frac{1}{8}$.

Vnde concluditur, mercurium per interuallum dimidii anni vel 183 dierum, ſe ſuſtentaſſe ſupra altitudinem 28 $\frac{2}{100}$ poll. quae iterum minor eſt altitudine media. Summatim autem deprehendimus, ſtatum barometri hoc 1776 anno multo depreſſiorem fuiſſe illo, qui annis praeteritis obſeruatus fuit.

3. Sequuntur iam obſeruationes nonnullae deſcenſuum et aſcenſuum barometri ſubitaneorum et notabiliorum.

Menſe Ianuario.

d. 9. meridie - - 28. 75
d. 10. hora 6. p. m. 28. 62 } differentia 0. 52 per 24 h.
d. 11. hora 6. p. m. 28. 10 }
d. 13. hora 8. a. m. 27. 96.

Coelum nubibus obductum. Ventus ex oriente: tum vero nix et boreas

d. 16.

d. 16. meridie - - 27. 82 } differentia 0. 63 per 36. horas.
d. 17. media nocte 28. 45 }

Coelum serenum. Ventus ex oriente, paulo post malacia

d. 18. meridie 28. 47 } differentia 0. 50. per 24 horas.
d. 19. meridie 27. 97 }

Coelum obductum. Ventus e regione W.

d. 24. hora 6. a. m. 27. 52 } diff. 0. 91 per 54 horas.
d. 26. meridie - - 28. 43 }

Coelum serenum, malacia

d. 27. hora 9. a. m. 28. 45 } diff. 0. 47 per 21 horas.
d. 28. hora 6. a. m. 27. 98 }

Coelum nubilum, malacia

d. 29. hora 3. p. m. 28. 31 } diff. 0. 74 per 42 horas.
d. 31. hora 9. a. m. 27. 57 }

Coelum plane obductum, nix et procella e regione NW.

Mense Februario.

Ian. d. 31. hora 9. a. m. 27. 57 } diff. 0. 71 per 30 horas.
d. 1. hora 3. p. m. 28. 28 }

Coelum serenum. Ventus NO

d. 2. meridie 27. 72 diff. 0. 56 per 21 horas.

Coelum obductum, nix

d. 5. meridie - - 27. 78 } diff. 0. 62 per 21. horas.
d. 6. hora 9. a. m. 27. 16 }

Nix et pluuia: procella e plaga SW

d. 11. hora 9. a. m. 27. 45 } diff. 0. 67 per 60 horas.
d. 13. hora 9. p. m. 28. 12 }

Coelum obductum, nix cum vento e meridie flante

d. 20. media nocte 27. 98 } diff. 0. 67 per 45 horas.
d. 22. hora 9. p. m. 27. 31 }

Nix copiosa: procella ex occidente

d. 25. hora 6. a. m. 27. 35 } diff. 0. 62 per 36. horas.
d. 26. hora 6. p. m. 27. 97 }

Coelum erat obductum et ventus leniter flabat ex SO.

d. 27. meridie - - 27. 95 } diff. 0. 52. per 18 horas.
d. 28. hora 6. a. m. 27. 43 }

Nix copiosa et ventus ex occidente vehementer flabat.

Mense Martio.

d. 20. hora 6. p. m. 27. 43 } diff. 0. 95 per 45 horas.
d. 22. hora 3. p m. 28. 38 }

Coelo existente sereno et vento flante e septentrione

d. 25. hora 4. a. m. 27. 41 diff. 0. 97 per 61 horas.

Coelum obductum, nebulosum; nix et ventus e meridie

d. 26. hora 9. a. m. 28. 13 diff. 0. 72 per 29 horas.

Boreas procellosus, nix copiosa; tum vero coelum serenum

d. 27. meridie 27. 42 diff. 0. 71 per 27 horas.

Coelum obducebatur: ningebat et ventus vehementer flabat e regione NW.

Mense Aprili.

d. 14. hora 9. a. m. 27. 42 } diff. 0. 71 per 33 horas.
d. 15. hora 6. p. m. 28. 13 }

Coelo existente sereno et vento leniter flante e NW.

d. 16. hora 9. a. m. 27. 82 } diff. 0. 71 per 42 horas.
d. 18. hora 3. a. m. 28. 53 }

Coelum nubilum, ventus vehementer flabat e NW.

d. 21. meridie 28. 73 } diff. 0. 98 per 3 dies.
d. 24. meridie 27. 75 }

Coelum erat plane serenum et ventus leniter flabat e NO.

Mense

Menſe Maio.

d. 19. hora 6. p. m. 28. 23 } diff. 0. 77 per $2\frac{1}{2}$ dies.
d. 22. hora 6. a. m. 27. 46 }

Coelum erat ſerenum et malacia regnabat, tum vero nubibus obducebatur, et pluuia cadebat vento vehementer flante ex oriente.

Menſe Auguſto.

d. 12. hora 6. a. m. 28. 29 } diff. 0. 64 per $2\frac{1}{2}$ dies.
d. 14. hora 6. p. m. 27. 65 }

Coelum nubibus obductum; pluuia copioſa; tonitru et procella e ſeptentrione.

Menſe Septembri.

d. 14. hora 11. p. m. 28. 05 } diff. 0. 40 per 7 horas.
d. 15. hora 6. a. m. 27. 65 }

Pluuia et procella e regione SW.

d. 16. meridie - - - 28. 18 diff. 0. 53 per 30 horas.

Coelum ſerenum, malacia

d. 18. meridie - - - 28. 05 } diff. 0. 42 per 21 horas
d. 19. hora 9. a. m. 27. 63 }
d. 20. hora 9. a. m. 28. 15 diff. 0. 52 per 24 horas.

Coelum fuit obductum: pluit abundanter, vento vehementer flante e regione SO.

Menſe Octobri.

d. 30. Sept. media nocte 27. 99 } diff. 0. 55 interuallo 36 h.
d. 2. Oct. meride - - 28. 54 }

Coelum nubilum, pluuia et malacia

d. 7. meridie 28. 14 } diff. 0. 98 interuallo 3 dierum.
d. 10. meridie 27. 16 }

Coelum obductum, pluuia copioſa et auſter procelloſus.

Menſe

Menſe Nouembri.

d. 3. media nocte 28. 30 }
d. 4. media nocte 27. 38 } diff. 0. 92 interuallo 24 horar.

Coelum fuit plane obductum: ninxit et pluit abundanter, procella e SW. flante

d. 21. media nocte 27. 02 }
d. 25. hora 3. p. m. 28. 47 } differentia 1. 45 per 87 h.

Coelum maxima parte obductum: nebula, nix et malacia.

Menſe Decembri.

d. 1. meridie - - 28. 83
d. 3. meridie - - 28. 58 }
d. 5. hora 4. a. m. 27. 93 } differentia 0. 65 per 40 horas.

Coelum obductum; nix; ventus ex occidente

d. 8. hora 10. p. m. 27. 97
d. 9. hora 4. p. m. 28. 59 diff. 0. 62 interuallo 18 horar.

Coelum nubilum, nix, et ventus ex occidente

d. 10. hora 9. p. m. 28. 09 diff. 0. 50 interuallo 29 horar.

Tempeſtate non variata

d. 14. hora 9. p. m. 27. 75 }
d. 15. hora 2. p. m. 28. 32 } diff. 0. 57 interuallo 17 hor.

Coelum ſerenum et ventus ex occidente

d. 16. hora 9. p. m. 27. 67 diff. 0. 65 interuallo 31 horar.

Coelum obductum erat et ventus vehementer flabat e regione SW.

II. Ther-

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae et maximae pro singulis mensibus anni 1776 secundum Calendarium correctum.

Mense.	Altitudo minima.			Altitudo maxima			Different.
	Gradus	die	hora	Gradus	die	hora	
Ianuar.	200	18.	VIII. a. m.	155	31.	IX. p. m.	45. Gr.
Februar.	187	4.	VI. a. m.	145	15.	II. p. m.	42.
Mart.	177	31.	VI. a. m	142	16.	II. p. m.	35.
April.	176	1.	V. a. m.	136	10	II. p. m.	40.
Maii	152	2.	X. p. m.	114	10.	II. p. m.	38.
Iunii	141	6.	V. a. m.	114	13.	II. p. m.	27.
Iulii	133	13.	V. a. m.	106	22. 29.	II. p. m.	27.
August.	139	28.	VI. a. m.	109	9. 13.	II. p. m.	30.
Septembr.	149	21.	VI. a. m.	124	29.	II. p. m.	25.
Octobr.	156	27. 29.	VII. a. m.	128	7.	II. p. m.	28.
Nouemb.	172	12.	VII. a. m.	141	4.	X. p. m.	31.
Decembr.	172	8.	VII. a. m.	147	10.	VI. p. m.	25.
Anno 1776.	200	Ianuarius		106	Iulius		94. Gr.

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigidiores Gradibus.						Dies calidiores Gradibus.					
	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150	160
Ianuar.	6	16	27	31	31	31						3
Februar.		3	5	7	18	29					21	24
Mart.			4	14	28	31					16	27
April.			1	6	25	30				7	27	30
Maii					2	16		6	16	26	31	31
Iunii						1		14	30	30	30	30
Iulii							9	28	31	31	31	31
Auguſt.							2	16	31	31	31	31
Septembr.						16			15	29	30	30
Octobr.					11	27			2	11	30	31
Nouembr.			1	13	29	30					9	29
Decembr.			1	9	29	31					8	28
Anno 1776.	6	19	39	80	173	242	11	64	125	165	264	325

Ex tabula priori intelligitur, per totum annum fuiſſe:

1. Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 200 grad. Delisl. menſe Ianuarii die 18, hora ante meridiana VIII^{va}. Barometro tunc temporis momento $28\frac{47}{100}$, coelo exiſtente ſereno et malacia perfecta.

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 106 grad. Delisl. menſe Auguſti, diebus 22da et 29na hora poſtmeridiana ſecunda. Fuit autem illa 22da die coelum ſerenum ſed nebuloſum: malacia et altitudo Barometri $28\frac{20}{100}$: hac vero die 29na coelum nubilum, vento flante ex occidente et Barometro exiſtente $28\frac{8}{100}$.

3. Hinc variatio Thermometri maxima 94 grad. ſecundum Thermometrum Delislianum.

Tabu-

Tabula secunda ostendit fuisse hoc 1776 anno, dies 173 frigidiores gradu 150, hoc est congelationis naturalis termino, inter quos 80 fuerunt dies, quibus frigus superabat 160 gradus. In his porro numerauimus 39 dies frigidiores gradu 170, 19 dies frigidiores gradu 180 et tandem 6 dies, quibus frigus superabat gradum 190.

Deinde patet ex eadem Tabula, hoc 1776 anno quoad calorem fuisse 264 dies calidiores gradu 150, et 165 dies calidiores gradu 140, inter quos 125 dies annotauimus, quibus calor superabat gradum 130, et 64 dies, quibus transibat gradum 120, tandem 11 dies calidiores gradu 110.

Speciatim frigus obseruatum fuit intra gradus.

		Dies.
190 et 200	die 6. 15. 17. 18. 20. 26. Ianuarii -	6
180 et 190	die 3. 4. 5. 11. 12. 14. 19. 25. 27. 29. Ian. et die 1. 3. 4. Februarii -	13
170 et 180	die 2. 7 — 10. 13. 16. 21. 24. 28. 31. Ian. die 2. 5. Febr. die 7. 29. 30. 31. Martii; die 1 Aprilis; die 12 Nouembr. et die 8 Decembris - - -	20
160 et 170	die 1. 22. 23. 30 Ian. du 9. 10. Febr. die 4. 5. 6. 9. 10. 22. 25 — 28 Mart. die 2. 14. 15. 21. 22 April. die 9. 11. 13. 14. 17. 18. 23. 24. 25. 28. 29. 30 Nouembr. et die 2. 7. 9. 15. 28 — 31 Decembris - - - -	41

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus:

		Dies.
110 et 100	die 18. 20 — 23. 26 — 29. Iulii et die 9. 13. Aug. - - -	11
120 et 110	die 8. 9. 10. 12. 13. 18. Maii, die 1 — 4. 7 — 13. 20. 21. 23. Iunii, die 1 — 9. 12. 14 — 17. 19. 24. 25. 30. 31. Iulii, die 1. 2. 4 — 8. 10. 11. 12. 14. 17. 18. 23. Auguſti - -	53
130 et 120	die 4. 11. 14. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 30. Maii. die 5. 6. 14 — 19. 22. 24 — 30. Iunii, die 10. 11. 13. Iulii, die 3. 15. 16. 19 — 22. 24 — 31. Auguſti, die 1 — 7. 11. 12. 13. 26 — 30. Septemb. et die 6. 7. Octobris - -	61
140 et 130	die 9. 10. 18. 23. 26. 29. 30. Aprilis, die 3. 5. 7. 15. 22. 23. 26. 27. 29. 31. Maii, die 8. 9. 10. 14 — 18. 20 — 25. Sept., die 1 — 5. 8 — 11. Octobris - - - -	40

Frigus medium hoc anno ſtatui poteſt 149 graduum et calor medius 140 graduum. Ac ſi menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hiemalibus Ian. — April. Nouembr. — Decembr. ſeparamus, reperimus in illis calorem medium fuiſſe 125 grad. et in his frigus medium 161 gradum.

De Barometro et Thermometro denique monenda ſunt ſequentia, quae quidem in Tomo XVII. et XVIII. nouorum commentariorum noſtrae Academiae amplius narrantur.

Baro-

Barometrum eſt ſimplex; diameter tubi partem decimam pollicis aliquantillum ſuperat; ſcala diuiſa eſt in pollices, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, et quiuis pollex iterum ſubdiuiſus eſt in viginti partes aequales. Eleuatio huius inſtrumenti ſupra ſuperficiem mediam Neuae eſt 18 pedum et locus Barometri diſtat ab oſtio huius fluminis interuallo 5000 circiter pedum.

Thermometrum deslislianum mercurio impletum, aëri verſus ſeptentrionem expoſitum et in tali loco poſitum eſt, vt ſol id nec directe nec per reuerberationem irradiare poſſit. Conſtat autem, in Scala eiusmodi thermometri deslisliani, calorem aquae bullientis per ciphram, et punctum congelationis aquae naturalis per numerum 150 indicari.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia	Vent lenis	Vent fortis	Procelloſus	Nord	N O	Oſt	S-O	Sud	S-W	Weſt	N-W	Variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	die	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	5	18	5	3	5	6	6	0	0	1	8	5	0
Febr.	1	14	10	4	1	1	0	6	10	6	4	1	0
Mart	4	16	8	3	9	0	7	1	2	5	5	2	0
April.	4	19	6	1	8	3	4	3	1	1	5	5	0
Maii	8	18	5	0	6	4	5	5	4	1	2	4	0
Iunii	6	14	9	1	0	8	8	1	3	2	4	1	3
Iulii	5	17	8	1	0	8	9	2	5	2	2	1	2
Aug.	5	19	4	3	0	6	2	2	5	4	8	0	4
Sept.	5	10	11	4	2	0	2	3	2	7	6	6	2
Oct.	5	18	7	1	2	1	3	5	6	4	5	4	1
Nou.	7	14	4	5	2	1	2	8	7	2	2	6	0
Dec.	0	14	13	4	1	1	8	3	2	8	5	3	0
Anno 1776.	5[illegible]	191	90	30	36	39	56	39	47	43	56	38	12

Hinc perspicitur, hoc anno 1776 maxime regnasse ventos ex oriente et occidente flantes, tum vero Austrum, deinde ventum e regione S—W. Porro patet hunc annum minus ventosum fuisse anno proxime praeterlapso: malaciae frequentius obseruatae fuerunt mensibus, Maii, Nouembris et Iunii: procellae et venti vehementiores verum frequentius occurrunt mensibus Decembris, Septembris et Februarii.

In specie autem hoc anno procellae flabant et regione.

	dies
Nord. die 21. 25. Mart. - - -	2.
N—O. die 13. Ian. - - - -	1.
Ost. die 20. Decembris - - - -	1.
S—O. die 18. Aug. d. 4. Sept. d. 10. Oct. d. 19. December - - - -	4.
Sud. die 14. Iun. d. 15. Aug. d. 17. 18. Nou. -	4.
S—W. die 5. 6. 11. Febr. d. 5. Mart. d. 16. Apr. d. 30. Iul. d. 14. Aug. d. 15. Sept. d. 4. Nou. d. 11. 13. Decembris - - -	11.
West. die 23. Febr. d. 20. Sept. d. 5. Nou. -	3.
N—W. die 30. 31. Ian. d. 21. Sept. d. 6. Nou.	4.

IV.

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies
Ianuar.	9.	13.	3.	0.	6.
Februar.	1.	16.	2.	10.	17.
Martii	5.	15.	3.	2.	16.
Aprilis	10.	5.	3.	6.	12.
Maii	7.	7.	5.	16.	1.
Iuuii	14.	3.	1.	8.	—
Iulii	10.	1.	5.	8.	—
Auguſti	10.	12.	6.	17.	—
Septemb.	10.	6.	5.	10.	—
Octobr.	6.	11.	3.	9.	2.
Nouemb.	4.	14.	3.	1.	17.
Decemb.	2.	19.	0.	4.	15.
Anno 1776.	88.	122.	39.	91.	86.

Numerus dierum ſerenorum hoc anno notabiliter minor fuit, quam praeteritis quatuor annis: excellebant autem quoad ſerenitatem coeli menſes Iunii, Iulii et Aprilis. Ac frequentius pluit menſe Auguſti et Maii et nix copioſa cecedit praeſertim menſe Februarii, Nouembris, Martii et Decembris.

V. Reliqua phaenomena.

Grando cecidit diebus 3: die ſcilicet 20. Februarii, die porro 19. Aprilis et denique die 22. Iunii.

Tonuit decies, et quidem longinque die 9. 11. 14. Maii die 26. Iunii, porro die 5. 12. 13. 15. Auguſti. In

vicinia

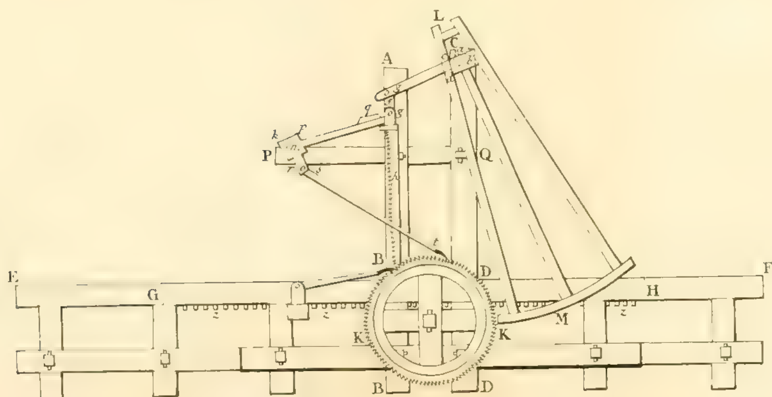
vicinia autem verſabatur tonitru die 22. Iunii et die 28 Iulii.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 12: et quidem 3 perlucidae die 28. Martii, d. 5. Septembris et d. 7. Octobris. Reliquae 9 aurorae boreales debiliores annotabantur d. 18. Ianuarii, d. 9. Martii, d. 3. 8. 9. 16. 19. 23. Septembris et d. 6. Octobris.

Parhelia d. 17. et 27. Ianuarii, d. 23 Octobris et d. 8. Decembris.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit d. 25. Aprilis, poſtquam per ſpatium 165 dierum glacie obductum perſtitit. Tum vero d. 12. Nouembris maxima parte perfrigeſcebat et 17 eiusdem menſis vbique glacie obducebatur, poſtquam ergo per 200 dies a glacie liberatum manſit.





L
C
A
P
Q
B
E
G
D
F
H
K
M
B
D

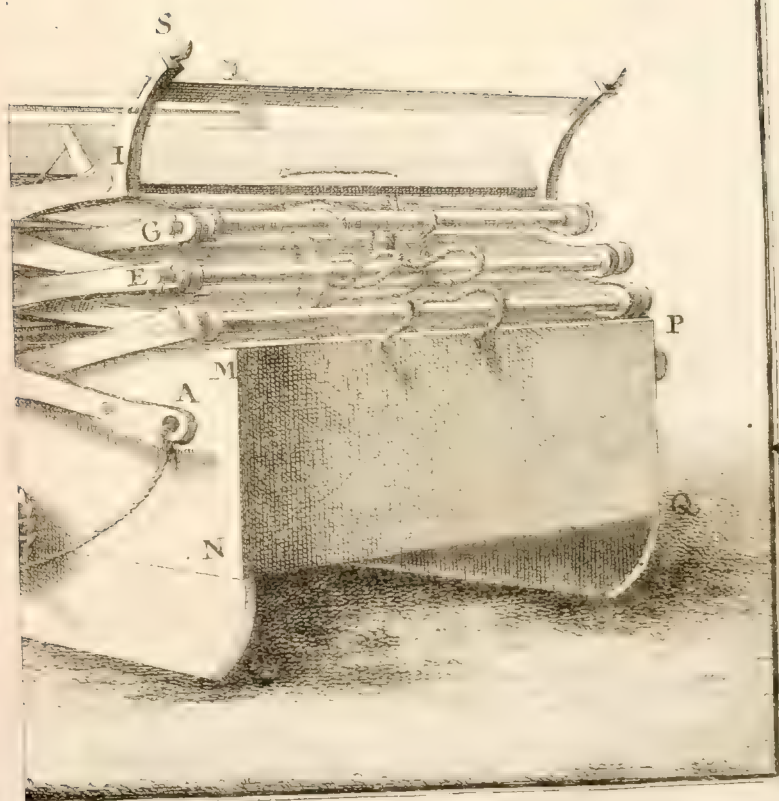
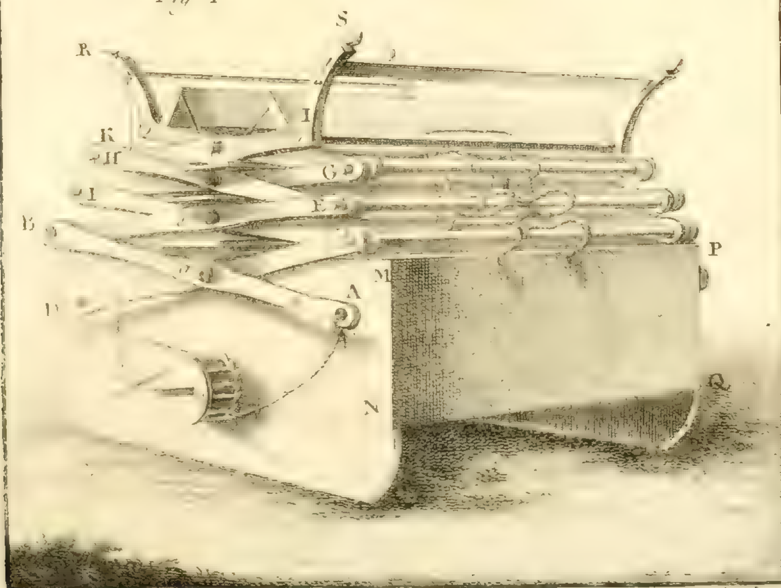
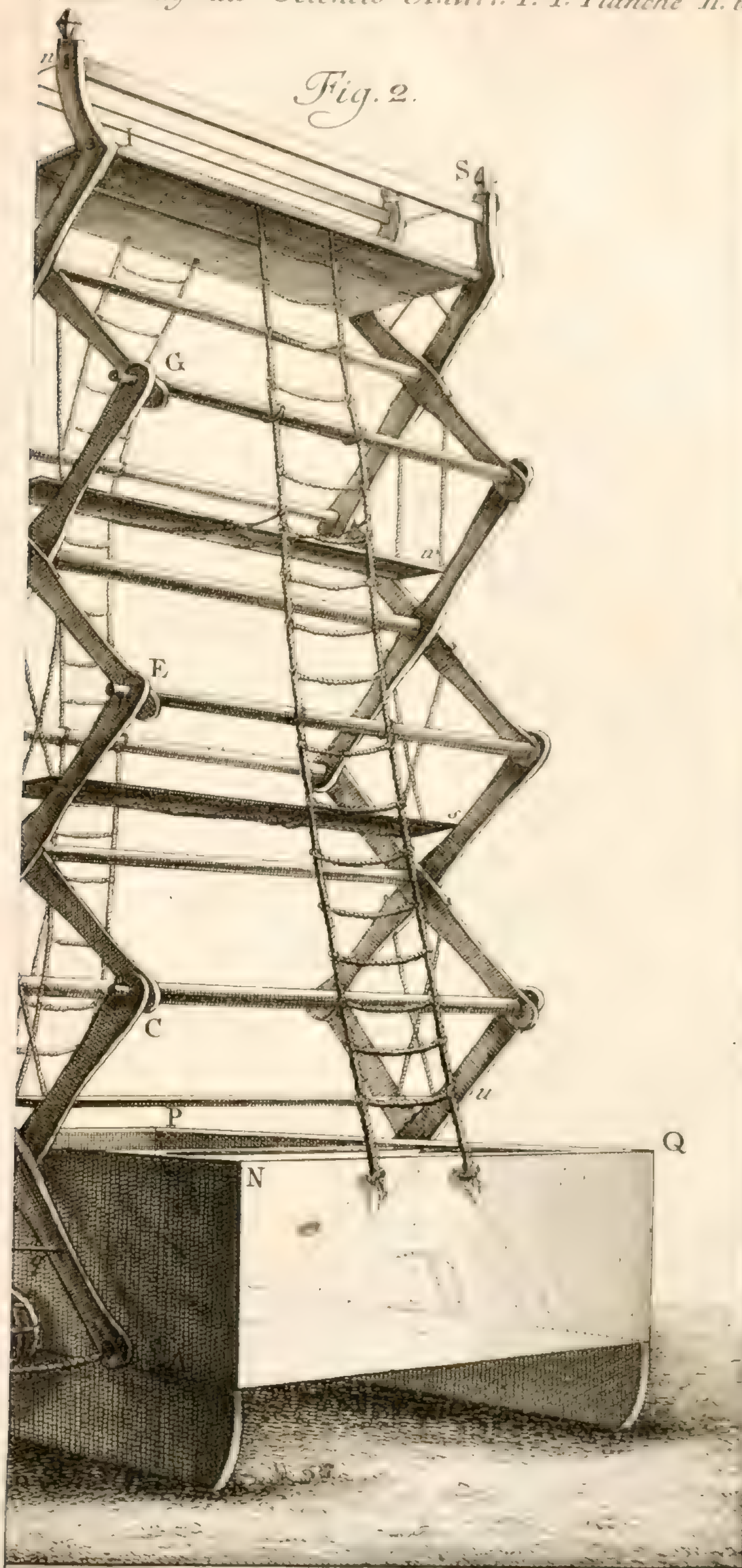
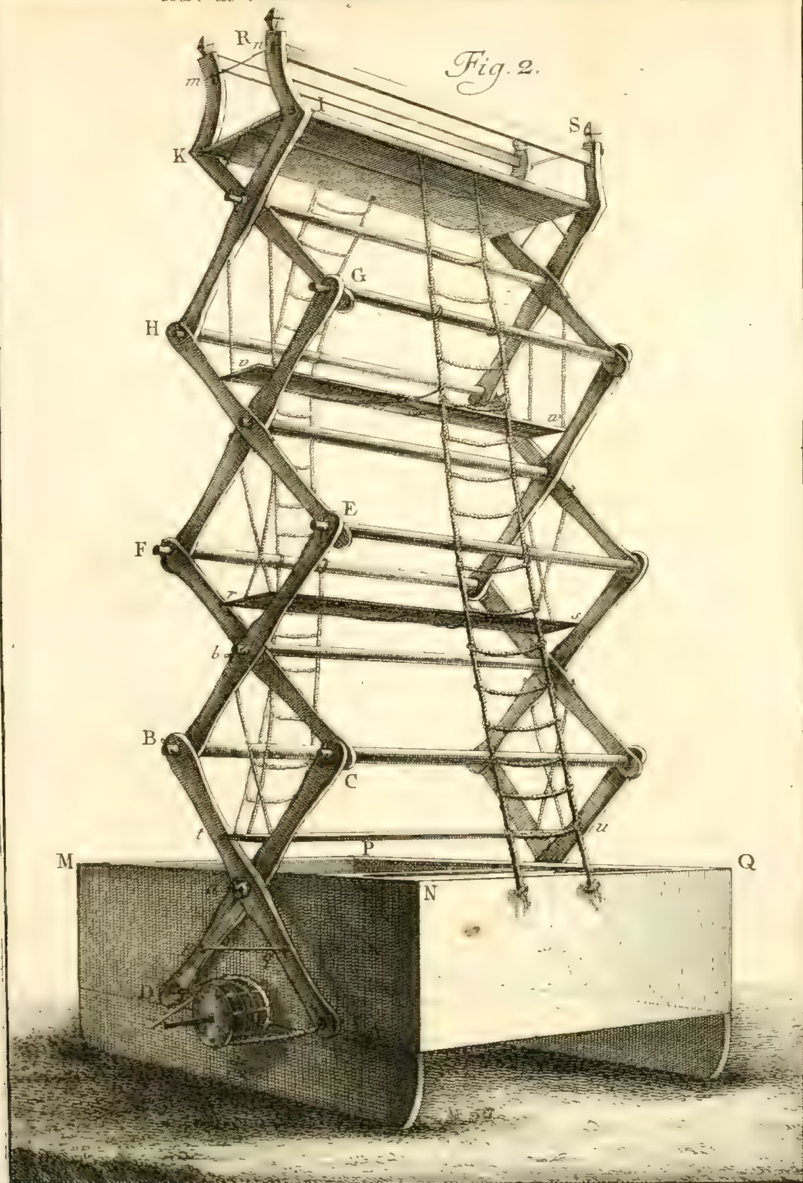
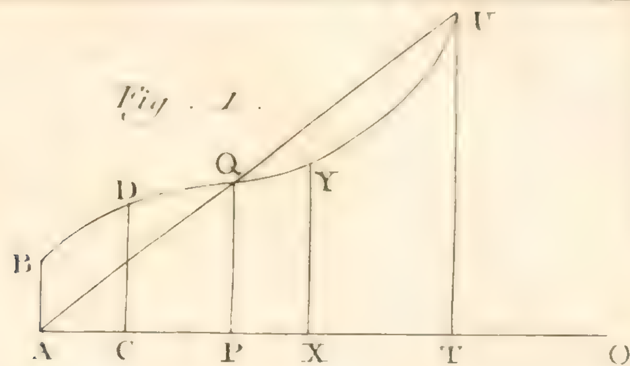

S
I
G
E
P
M
A
Q
N

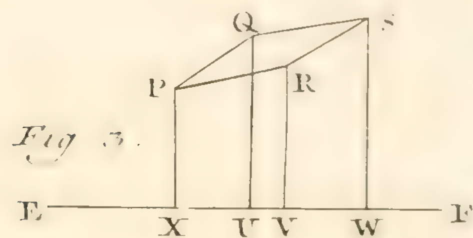
Fig. 1

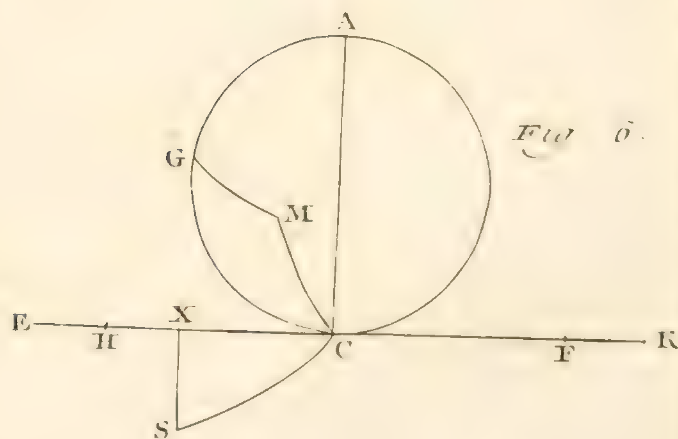



Fig. 2.
S
G
n
E
s
C
u
P
Q
N


Fig. 2.
R
n
m
K
I
S
G
H
v
w
E
F
r
s
b
B
C
t
u
P
M
Q
N
D


Fig. 1.
U
Q
D
Y
B
A
C
P
X
T
O


Q
S
P
R
Fig. 3.
E
X
U
V
W
F


A
Fig. 6.
G
M
E
X
H
C
F
K
S

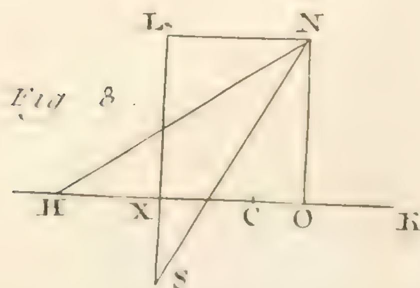
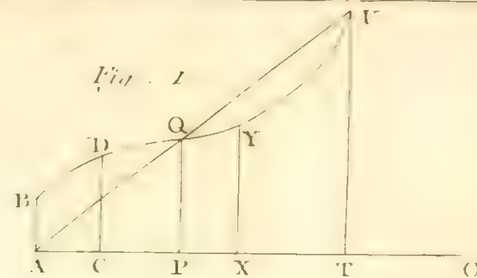
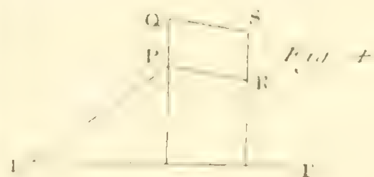
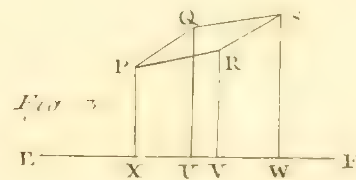
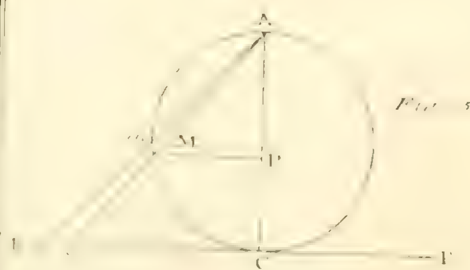

L
N
Fig. 8.
H
X
C
O
K
S

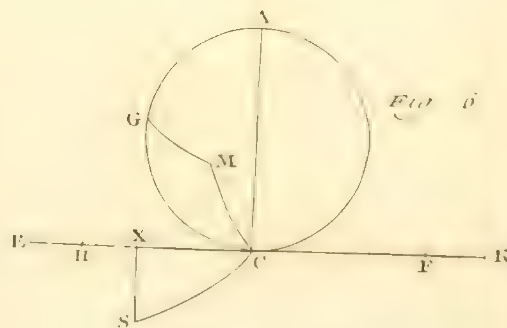

Fig. 2

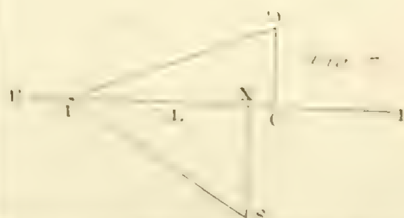

Fig. 1
V
Q
Y
D
B
A
C
P
X
T
O

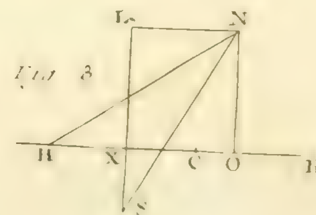

Q
S
P
R
Fig. 4
F

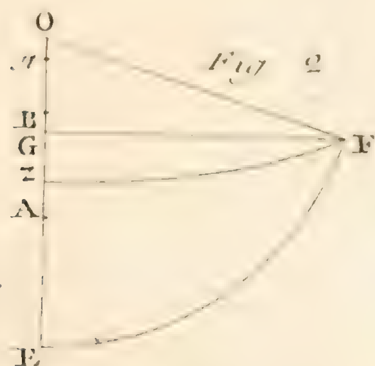

Q
S
P
R
Fig. 3
E
X
U
V
W
F

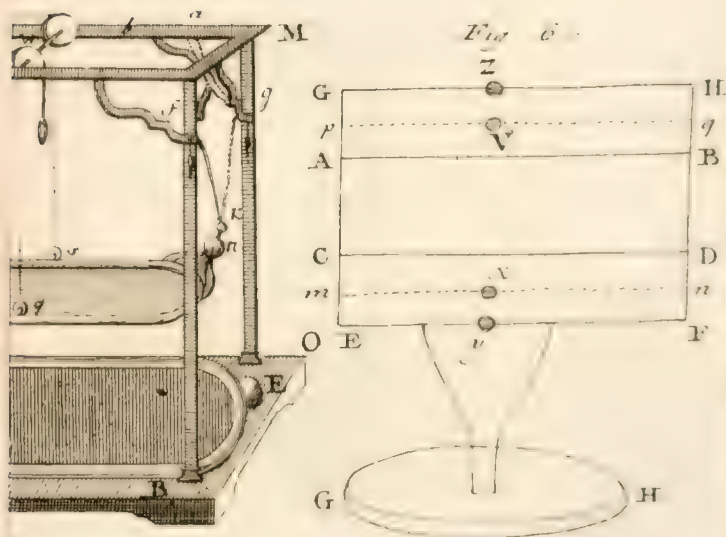

A
Fig. 5
M
P
C
F


A
Fig. 6
G
M
E
H
X
C
F
K
S


X
L
C
S


L
N
Fig. 8
H
X
C
O
K
S


Fig 2
O
B
G
z
A
E
F


M
O
E
B
Fig 6
Z
G
H
p
q
V
A
B
C
D
m
n
E
F
G
H

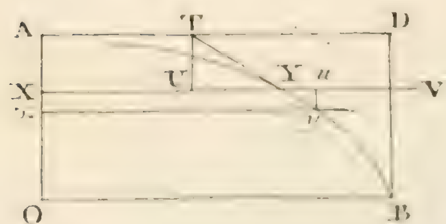

Fig 5
A
T
D
X
U
Y
V
O
B

Fig. 1

O B Q X P A b q x p a

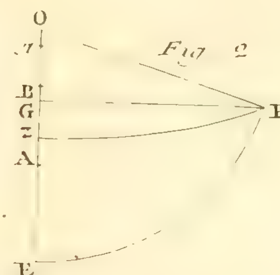


Fig. 2

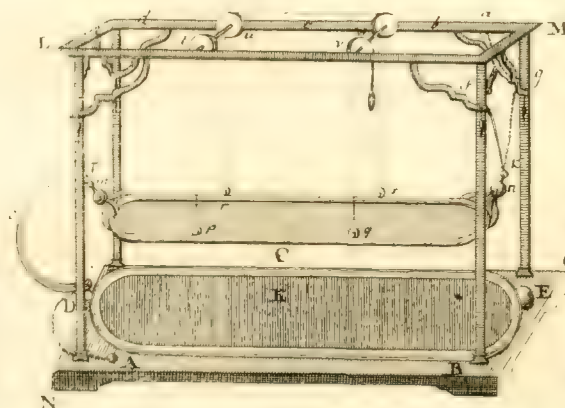


Fig. 3

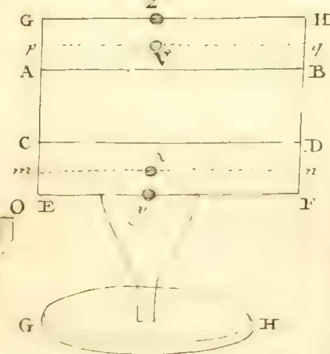


Fig. 6

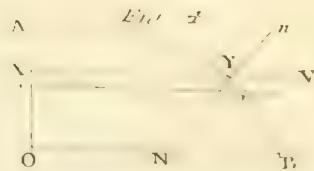


Fig. 4

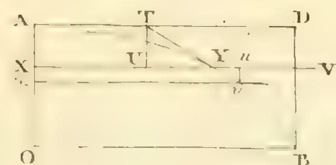


Fig. 5



Fig. 2



Fig. 1

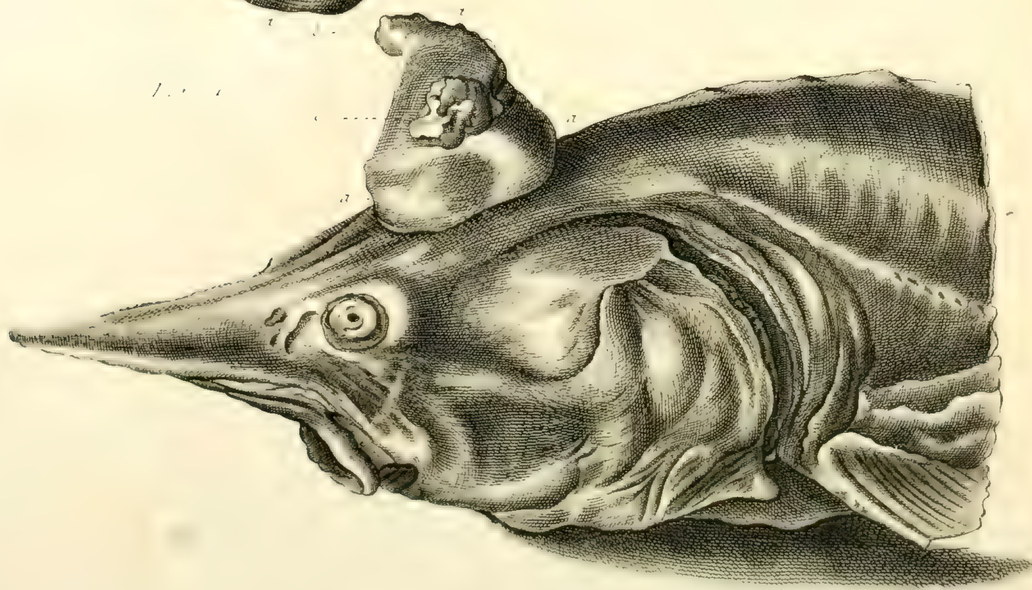
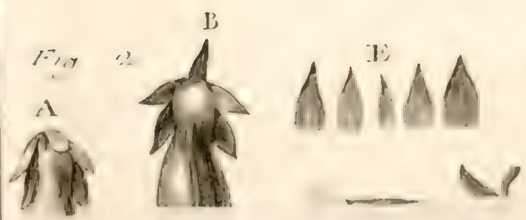



Fig. 1


Fig. 2
A
B
E


Tab. IV
Fig. I


Tab. III
Fig. 2

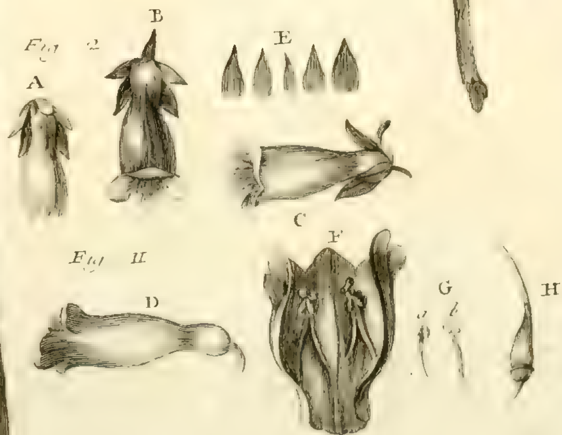

Fig. 2
A
B
E
C
F
Fig. II
D
G
a
b
H

Fig. 1.

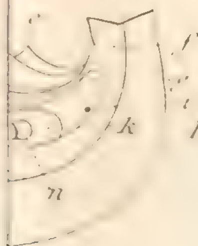
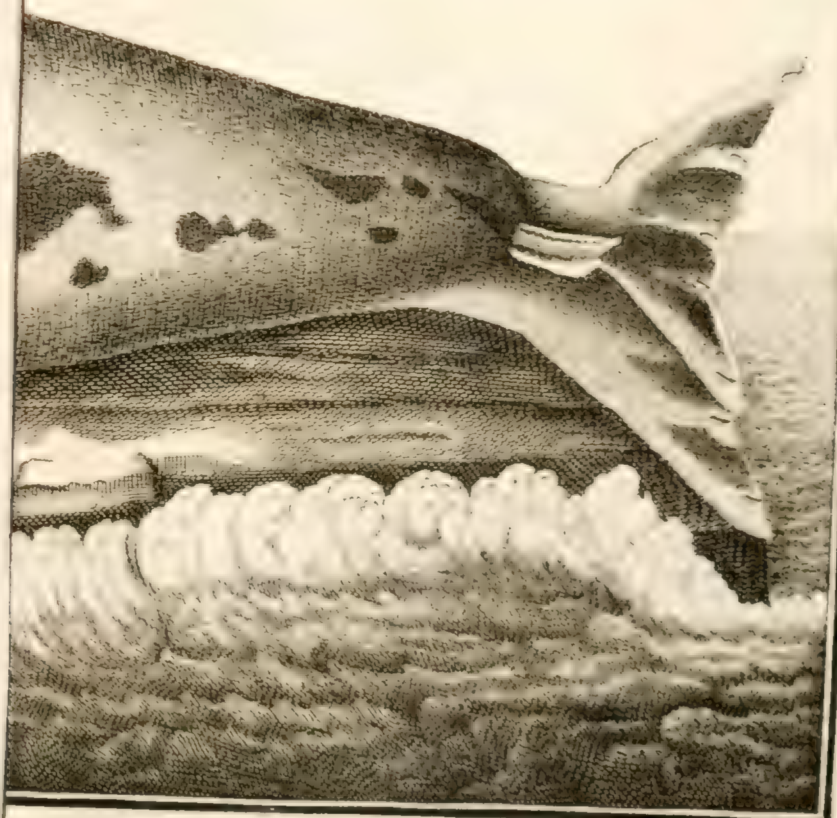
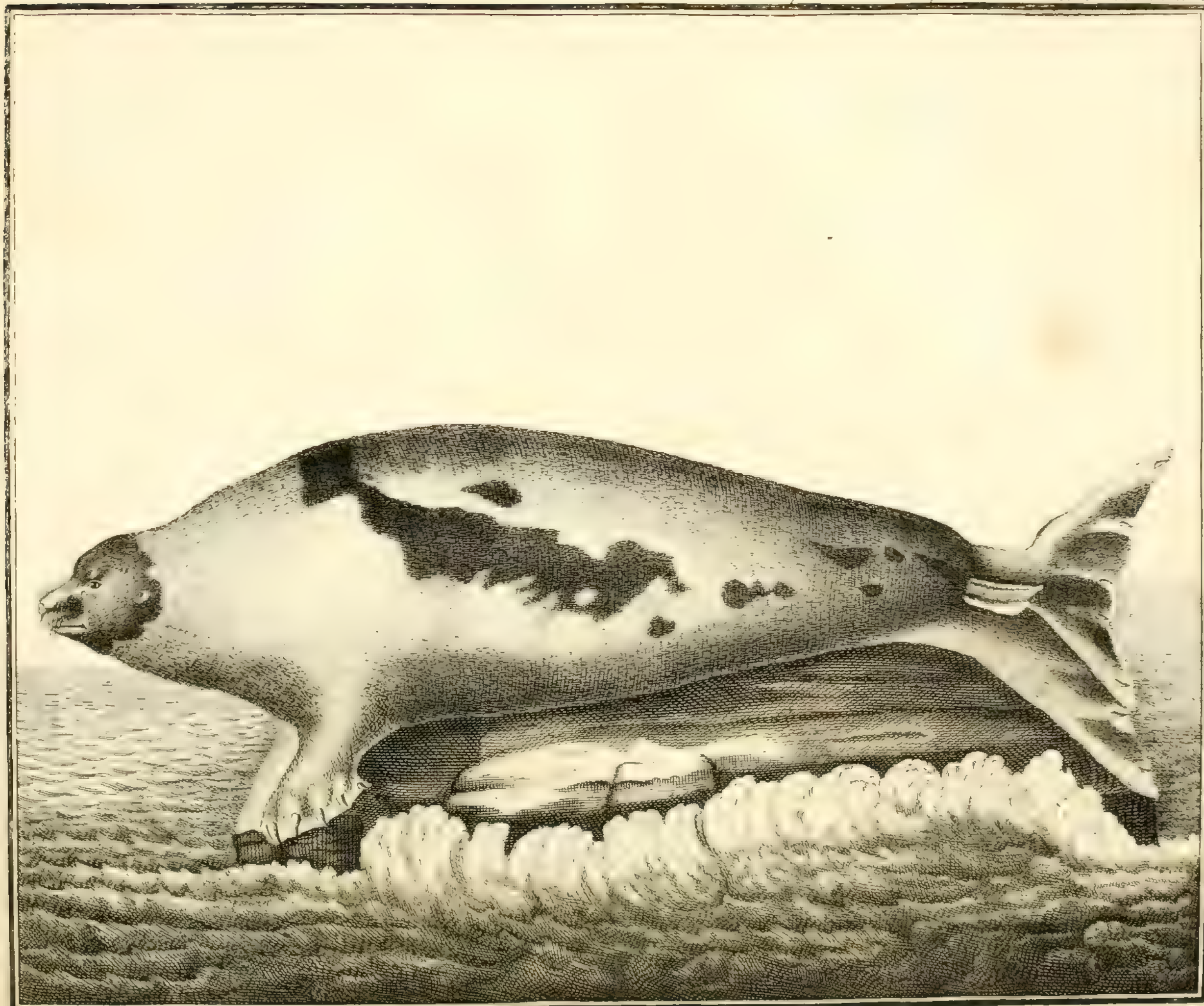


Fig. 2.




Fig 1

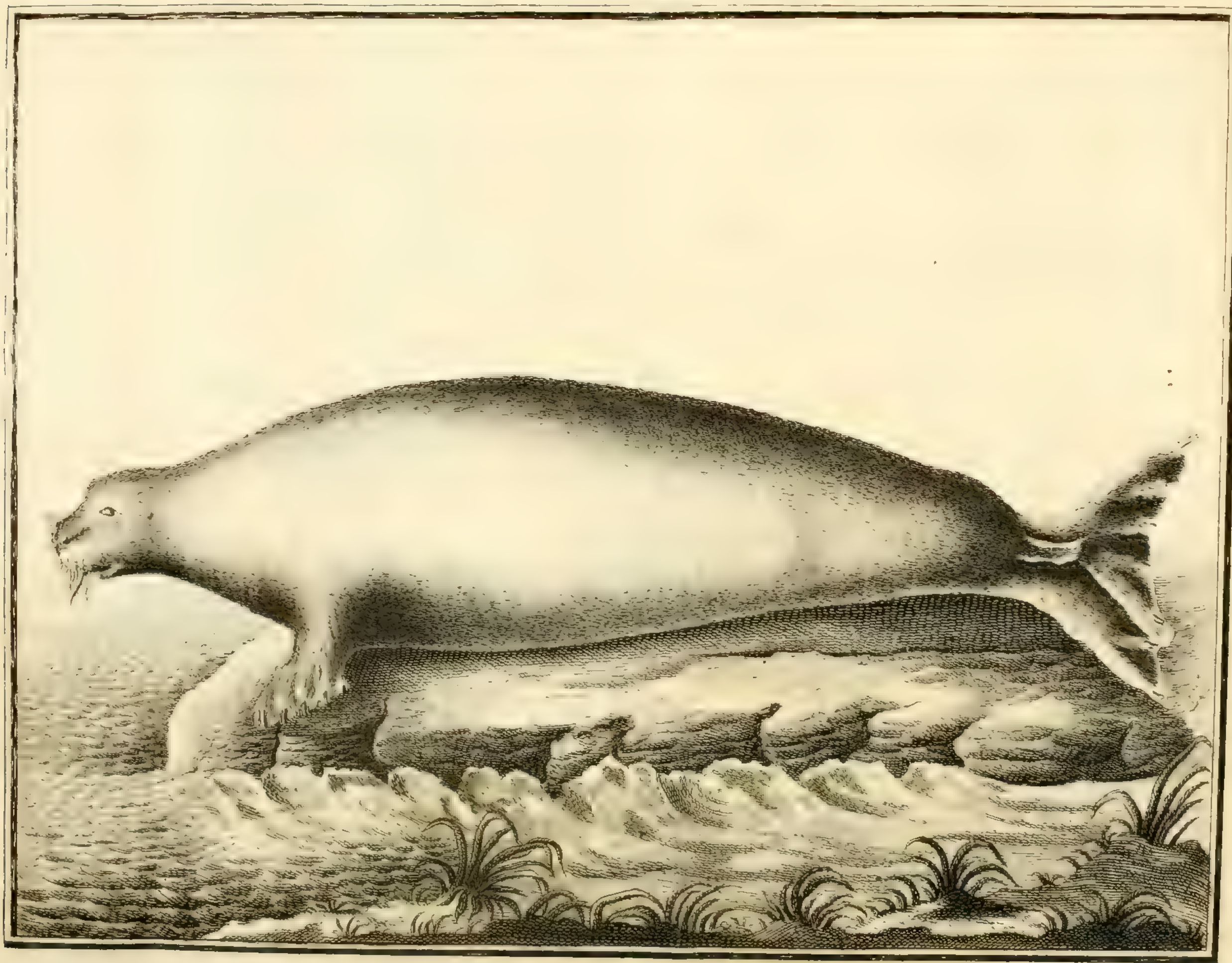



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24





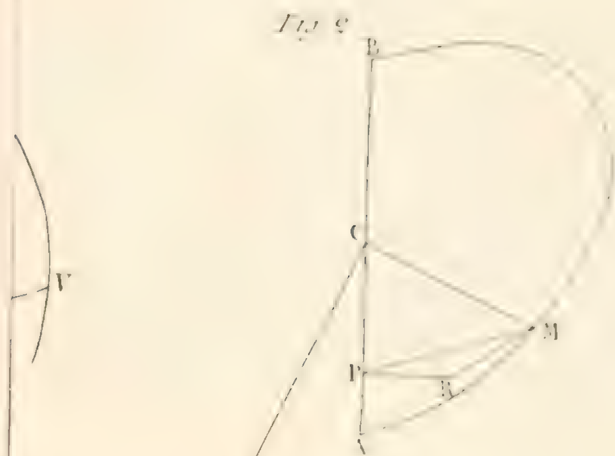




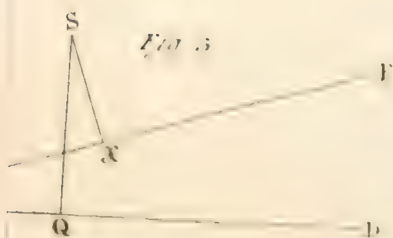


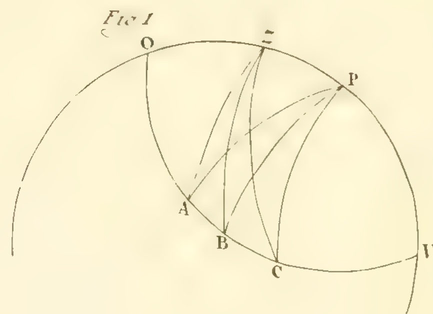


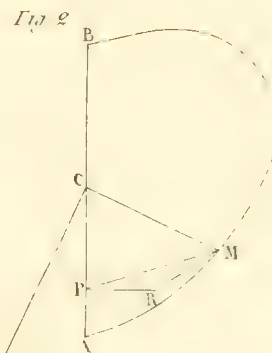

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

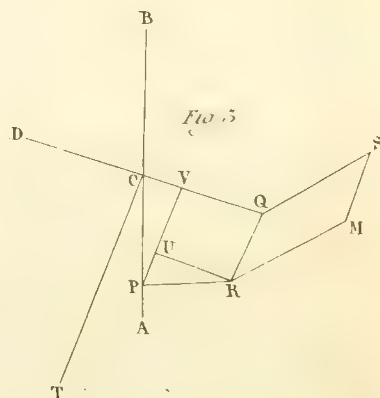

Fig 2
B
C
V
M
P
R
A

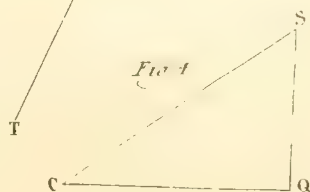

S
Fig 1
S
M
T
C
Q

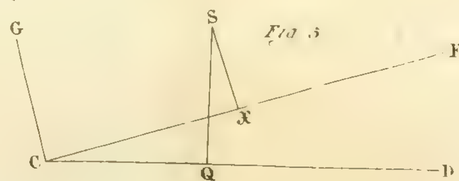

S
Fig 3
F
X
Q
D


Fig 1
O
Z
P
A
B
C
V


Fig 2
B
C
M
P
R
A
T

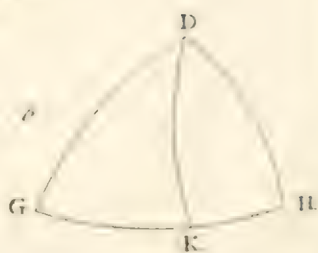

B
Fig 3
D
S
C
V
Q
M
U
P
R
A
T

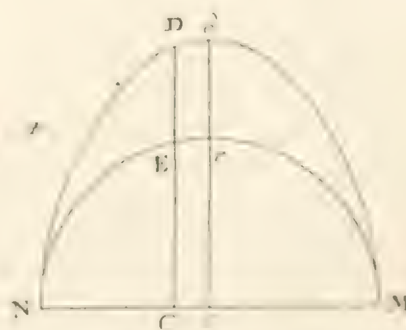

S
Fig 4
C
Q

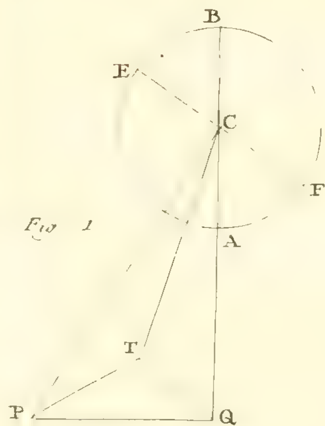

G
S
Fig 5
F
X
C
Q
D

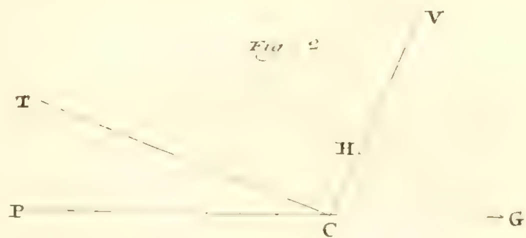

V
H
G
C

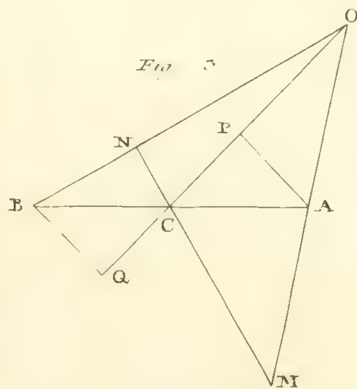

C
E
B
T
S
V

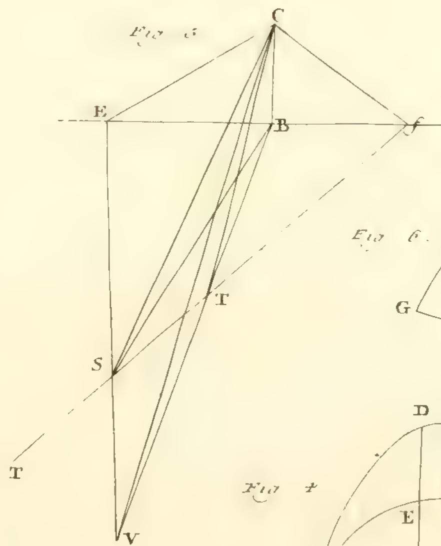

D
G
H
K

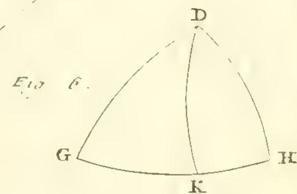

D
E
N
C
M

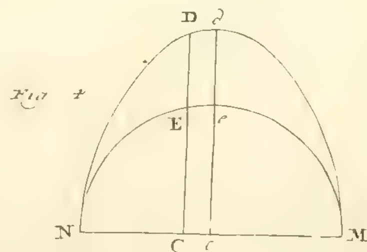

B
E
C
F
Fig. 1
A
T
P
Q

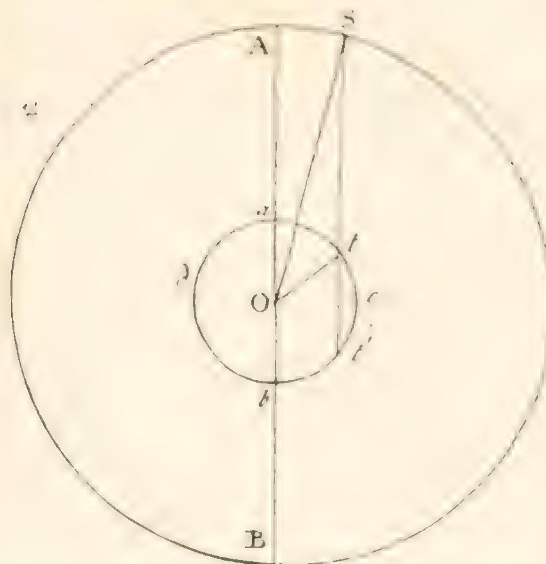

V
Fig. 2
T
H.
P
C
G


O
Fig. 3
N
P
B
C
A
Q
M

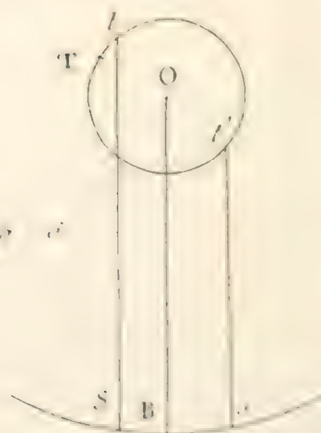

C
Fig. 5
E
B
f
T
S
T
V

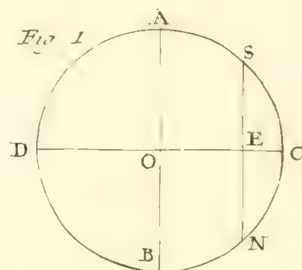

D
Fig. 6.
G
H
K

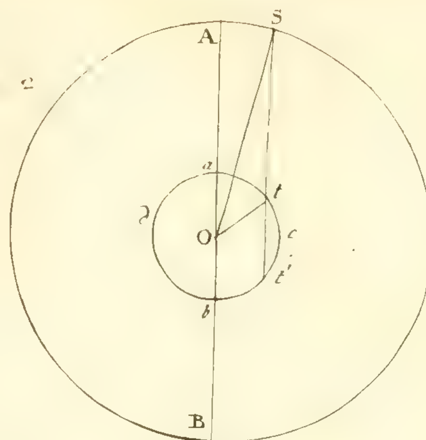

D
Fig. 4
E
N
C
M

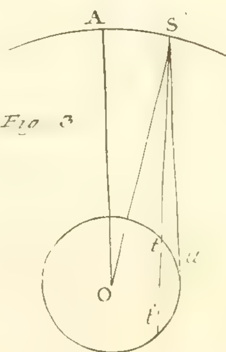

Fig. 2.
S
A
a
t
O
c
t'
b
B

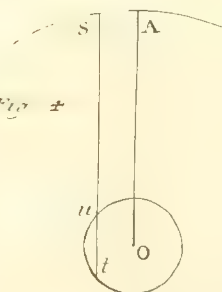

S
A
Fig. 4.
O
t

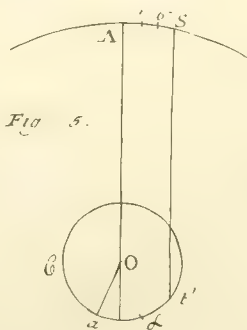

t
T
O
t'
Fig. 3.
S
B

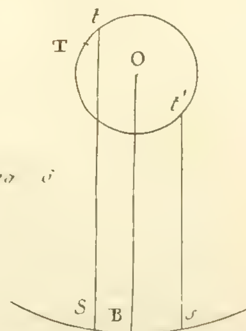

Fig 1
A
S
D
E
C
O
B
N

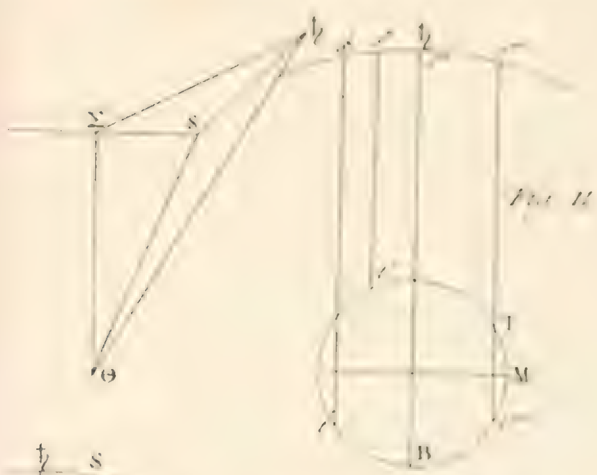

Fig 2
A
S
a
t
O
c
t'
b
B


A
S
Fig 3
t'
u
O


S
A
Fig 4
u
O
t


A
S
Fig 5.
O
t'
a

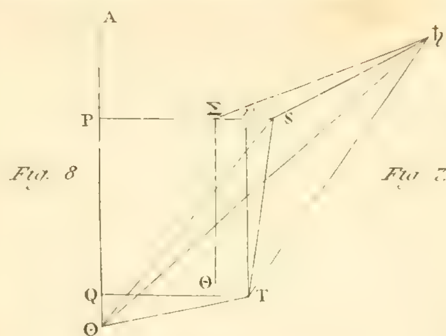

t
T
O
t'
Fig 6
S
B
s

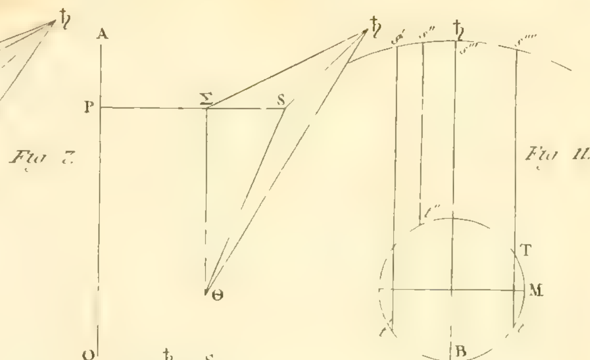

♄
♄
S
S
Fig. 11
T
M
B
Θ

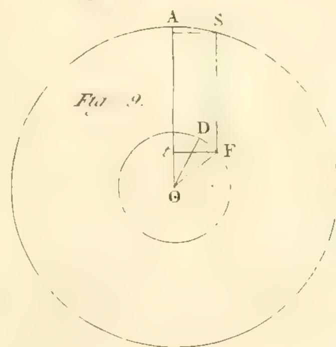

♄
S
Θ
M
T
B

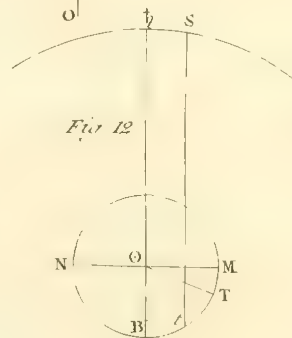

♄
Fig. 13
A
T
Θ

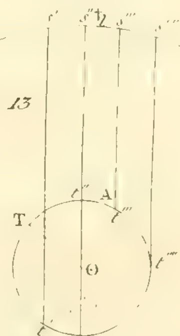


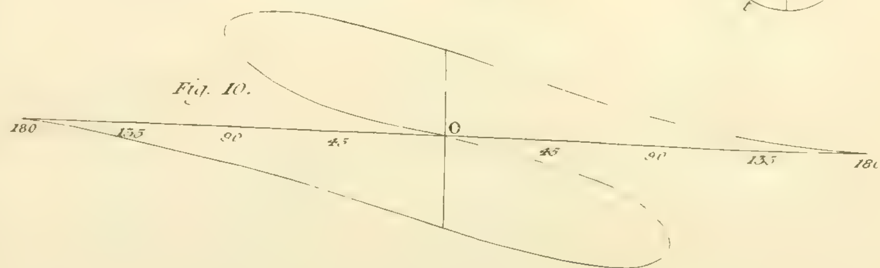

A
P
Σ
S
Q
Θ
T
♄
Fig. 8


A
P
Σ
S
Θ
O
♄
Fig. 7.
Fig. 11.
T
M
B


A
S
Fig. 9.
D
t
F
Θ


♄
S
Fig. 12
N
O
M
T
B
t


♄
Fig. 13
T.
A
Θ
t


Fig. 10.
O
180
135
90
45
45
90
135
180

Nova. Act. 1777.
Einheimische Arzneipflanzen v. Gillibert u. Pallas
1.) Euphorbia cyparissias. p. 40
2.) Asarum europäum p. 41
3.) Eupatorium cannabinum p. 41.
4.) Saponaria p. 41.
5.) Lychnis chalcedonica p. 42
6.) Clematis recta. p. 43
7.) Ranunculus acris p. 43
8.) Anemone pratensis p. 43
9.) radix Liquiritiae gegen Flechten, u. Plica polonica. p. 43

Bemerkungen über die Plica polonica v. Gillibert p. 44

Merkwürdige Versteinerung von Gillibert (Erdlenwurzeln in Agat verwandelt)

Beobachtung über Menianthes trifoliata p. 45

Ephedra monostachya ein Calmuckisches Arzneimittel gegen Rheumatismen von Jährig p. 25.

Ei im Ei p. 78

Gryllus migratorius bei Astrachan. p. 81.

Lobeliae hybridae auct. Koelreuter p. 185

Cranium Rhinocerotis africani auct. Camper. p. 193.

Es finden sich hier auch von pag. 202 an einige Bemerkungen über die fossilen Thiergerippe, u. namentlich über den Unterschied zwischen den Knochen des Africanischen u. der sibirischen fossilen von Pallas beschriebenen Nashorns

Additamentum auctore Pallas

Abbildung des ganzen Kopfs seines sibirischen fossilen Rhinoceros und Bemerkungen Campers übers Asiatische.

Observatio de dentibus molaribus fossilibus ignoti animalis canadensibus analogis ad Uralense jugum repertis auctore Pallas.

Observationes circa Myrmecophagam africanam et Didelphidis novam speciem orientalem e litteris Camperi excerpta a P. Pallas.

Description du Buffle a queue de Cheval, precedée d'~~Obs~~ Observations Generales sur les especes sauvages du gros betail. par Pallas


100125004